FOLIEN VON D. GRAU ZUR VORLESUNG "ELEKTRODYNAMIK UND RELATIVITÄTSTHEORIE"

nach dem Skriptum von H. Nowotny

Kapitel 9

$$E^2 - c^2\vec{p}^2 = 0$$

$$(E_{B'} + E_{C'})^2 - c^2(\vec{p}_{B'} + \vec{p}_{C'})^2 = 0 \qquad (66)$$

$$\underbrace{E_{B'}^2 - c^2\vec{p}_{B'}^2}_{m_e^2c^4} + \underbrace{E_{C'}^2 - c^2\vec{p}_{C'}^2}_{m_e^2c^4} + 2(E_{B'}E_{C'} - c^2\vec{p}_{B'}\cdot\vec{p}_{C'}) = 0$$

$$m_e^2c^2 + \frac{E_{B'}}{c}\frac{E_{C'}}{c} - \vec{p}_{B'}\cdot\vec{p}_{C'} = 0$$

$$\underbrace{m_e^2c^2}_{>0} + \underbrace{\left(\sqrt{\vec{p}_{B'}^2 + m_e^2c^2}\sqrt{\vec{p}_{C'}^2 + m_e^2c^2} - \vec{p}_{B'}\cdot\vec{p}_{C'}\right)}_{>0} = 0 \qquad (67)$$

Widerspruch!

IX. DIE ELEKTRODYNAMIK ALS L-KOVARIANTE THEORIE

IX.1. Feldtensor, Maxwellgleichungen

IX.1.A. Viererstrom und Viererpotential

Viererstromdichte $\vec{\vec{j}}$

Wie man beweisen kann, bilden $c\rho, \vec{j}$ die kontravarianten Komponenten eines Vierervektorfeldes bzgl. S, welches man als Viererstromdichte $\vec{\vec{j}}$ bezeichnet.

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\vec{j}}:\ S:&\ (j^\mu) = (c\rho, \vec{j}) \\ S':&\ (j'^\mu) = (c\rho', \vec{j}') \\ &\ \vdots \end{aligned}}$$

Beachte: $c\rho(x^0, x^1, x^2, x^3)$, $\vec{j}(x^0, x^1, x^2, x^3)$

$c\rho'(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$, $\vec{j}'(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$

Beweis (anders als im Skriptum):

Wir betrachten den Fall einer beliebig bewegten Punktladung q. Es gilt dann $\rho(\vec{r},t) = q\,\delta(\vec{r} - \vec{r}(t))$, $\vec{j}(\vec{r},t) = \vec{u}(t)\,\rho(\vec{r},t)$.

Additivität und
L-Invarianz der Ladung:

$$\underline{\rho' d^3r' = \rho\, d^3r} \iff \rho\, d^3r = \text{Viererskalarfeld}$$

$$\Rightarrow \quad \rho\, d^3r\, dx^\mu = \rho \underbrace{d^3r\, d(ct)}_{d^4x} \frac{1}{c}\frac{dx^\mu}{dt}$$

$$= \frac{1}{c} d^4x\, \rho\, \frac{dx^\mu}{dt} = \text{Vierervektorfeld}$$

(kontravariante Komponenten bzgl. S)

L-Invarianz des vierdimensionalen Volumselementes+):

$$\underline{d^4x'} = \underbrace{\frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}}_{\det\Lambda = 1} d^4x \quad \underline{= d^4x}$$

$\det\Lambda = 1$ für beliebige eigentliche LT (LT ohne Spiegelung)

Beachte: $\det {}^{St}\Lambda = 1$, ferner $\det {}^{D}\Lambda = 1$ (Drehung)
und $\det\Lambda = \det({}^{D'}\Lambda\, {}^{St}\Lambda\, {}^{D}\Lambda)$ (s. Gl. (VII.11))
$= \det {}^{D'}\Lambda \cdot \det {}^{St}\Lambda \cdot \det {}^{D}\Lambda$.

$$\underbrace{\frac{1}{c} d^4x}_{\text{L-Invariante}}\, \underbrace{\rho\, \frac{dx^\mu}{dt}}_{=: j^\mu} = \text{Vierervektorfeld (kontravariante Komponenten)}$$

$\Rightarrow$ Vierervektorfeld (kontravariante Komponenten)

+) Pseudoskalar bzgl. räumlichen Spiegelungen

$$j^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{dt} = \rho \underbrace{\frac{d\tau}{dt}}_{\frac{1}{\gamma(u)}} \underbrace{\frac{dx^\mu}{d\tau}}_{u^\mu}$$

$$(j^\mu) = \rho \frac{1}{\gamma(u)} (u^\mu) = \rho \frac{1}{\cancel{\gamma(u)}} \cancel{\gamma(u)} (c, \vec{u})$$

$$= (c\rho, \vec{u}\rho) = (c\rho, \vec{j})$$

Beliebige (mikroskopische) Ladungs- und Stromverteilungen kann man sich additiv aus den Beiträgen von Punktladungen zusammengesetzt denken. Mit (A Teilchenindex) $\vec{\vec{j}}_A$ ist aber auch $\sum_A \vec{\vec{j}}_A = \vec{\vec{j}}$ Vierervektorfeld.

Vierergradientenoperator $\vec{\vec{\partial}}$, Quablaoperator+)

$\underline{\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}}$ transformiert bei homogenen LT wie x_μ : kovariante Komponenten eines Vierervektoroperators, des Vierergradienten $\vec{\vec{\partial}}$ bzgl. S

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\vec{\partial}}:\ S:\ (\partial_\mu) &= \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) \\ (\partial^\mu) &= \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right) \\ S':\ &\text{analog} \end{aligned}} \quad ! \qquad (7)$$

+) s. Skriptum Anhang A.1.3

Es gilt

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\vec{\partial}}\cdot\vec{\vec{\partial}} &= \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = -\Box \\ &= \partial'^\mu \partial'_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \Delta' = -\Box' \end{aligned}} \qquad (10)$$

L-invarianter und forminvarianter Operator

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0 \qquad (20)$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} c\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = \partial_\mu j^\mu = 0 \qquad (21)$$

Offensichtlich L-kovariante Formulierung der Ladungserhaltung

$$\boxed{\vec{\vec{\partial}}\cdot\vec{\vec{j}} = 0}$$

Viererpotential $\vec{\vec{A}}$

Feldgleichungen für die elm. Potentiale $\phi, \vec{A}$:

(II.13a): $\Box\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi + \operatorname{div}\vec{A}\right) = -\frac{4\pi}{c} c\rho$ (4a,

(II.13b): $\Box\vec{A} - \operatorname{grad}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi + \operatorname{div}\vec{A}\right) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$

Frage: Gibt es ein Transformationsgesetz für $\phi, \vec{A}$, welches zusammen mit den bekannten L-Transformationen von $(ct, \vec{r})$ und von $(c\rho, \vec{j})$ diese Gln. forminvariant läßt?

Bemerkung: Stellt man die analoge Frage für die GT, so lautet die Antwort "Nein"!

HIER:
Antwort: "Ja"

Postulieren wir dieses Transformationsgesetz für $\phi, \vec{A}$, so erhalten wir eine L-kovariante Theorie.

Postulat: Viererpotential

$$\vec{\vec{A}}: \quad S: (A^\mu) = (\phi, \vec{A}) \qquad (8)$$
$$S': (A'^\mu) = (\phi', \vec{A}')$$
$$\vdots$$

Damit folgt:

$$\underline{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi + \operatorname{div}\vec{A}} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$

$$= \partial_\mu A^\mu = \underline{\vec{\vec{\partial}}\cdot\vec{\vec{A}}} \qquad (9)$$

$$\underbrace{\square}_{-\vec{\vec{\partial}}\cdot\vec{\vec{\partial}}}\underbrace{\phi}_{A^0} + \underbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}}_{\partial^0}\underbrace{\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi + \operatorname{div}\vec{A}\right)}_{\vec{\vec{\partial}}\cdot\vec{\vec{A}}} = \underbrace{-\frac{4\pi}{c}}_{\text{inv.}}\underbrace{c\rho}_{j^0}$$

$$\underbrace{\square}_{-\vec{\vec{\partial}}\cdot\vec{\vec{\partial}}}\underbrace{A_x}_{A^1} + \underbrace{\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)}_{\partial^1}\underbrace{\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi + \operatorname{div}\vec{A}\right)}_{\vec{\vec{\partial}}\cdot\vec{\vec{A}}} = \underbrace{-\frac{4\pi}{c}}_{\text{inv.}}\underbrace{j_x}_{j^1}$$

analog y-, z-Komponente

$$\boxed{\left(-\vec{\vec{\partial}}\cdot\vec{\vec{\partial}}\right)\vec{\vec{A}} + \vec{\vec{\partial}}\left(\vec{\vec{\partial}}\cdot\vec{\vec{A}}\right) = -\frac{4\pi}{c}\vec{\vec{j}}} \qquad (11a)$$

offensichtlich L-kovariante Formulierung der FG für die elm. Potentiale

Bezüglich <u>Eichung und Eichtransformationen</u> s. IX.2.A.

IX.1.B. Feldtensor.

<u>Maxwellgleichungen 1. Teil</u>

(Coulombsches und Amperesches Gesetz)

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} \qquad (2)$$

<u>Definition:</u> Feldtensor (Feldstärketensor) des elm. Feldes

$$\overset{\Leftrightarrow}{F}: \quad S: \quad (F^{\mu\nu}) \qquad (12)$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Es gilt

$$\underline{F^{\nu\mu} = -F^{\mu\nu}} \qquad \underline{\text{antisymmetrischer Tensor 2. Stufe}} \qquad (13)$$

$\Rightarrow \exists$ 6 unabhängige Komponenten

<u>Zeige selbst:</u> $F^{01} = \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 = \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x} = -E_x$ usf.

Zeile Spalte

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad (14)$$

"ELEKTROMAGNETISCHES FELD" Maßsystem!

(11a): $$-\partial_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = -\frac{4\pi}{c} j^\nu$$

$$\partial_\mu \underbrace{(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)}_{F^{\mu\nu}} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

Somit:

Offensichtlich L-kovariante Formulierung der Maxwellgleichungen 1. Teil (Gln. mit Quelltermen).

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{4\pi}{c} c\rho$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \tag{3}$$

"Verkettungsterm" (kein Quellterm; ~~Verschiebung= Strom des Vakuums~~)

S: $$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu} \tag{15}$$

S': $$\partial'_\mu F'^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j'^\nu$$

Bemerkung:

Symbolisch (bezugssystemunabhängig) kann man schreiben:

$$\vec{\partial} \cdot \overleftrightarrow{F} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Mit $\overleftrightarrow{F} = F^{\mu\nu} \vec{e}_\mu \circ \vec{e}_\nu$, $\vec{\partial} = \partial_\sigma \vec{e}^\sigma$

$\vec{j} = j^\nu \vec{e}_\nu$ und $\vec{e}^\sigma \cdot \vec{e}_\mu = \delta^\sigma_\mu$

erhält man sofort wieder Gl. (15).

ABER: Symbolische Schreibweise wird in der Feldtheorie nicht verwendet, da

1) für Beweistechnik unvorteilhaft
2) nicht auf Tensoren höherer als 2. Stufe verallgemeinerbar

IX.1.C. Zu $\overleftrightarrow{F}$ dualer Feldtensor $\hat{\overleftrightarrow{F}}$.

Maxwellgleichungen 2. Teil (Quellenfreiheit des Magnetfeldes und Faradaysches Gesetz)

Definition 1: vollständig antisymmetrischer Tensor 4. Stufe (Levi-Civita-Tensor)

$$\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (\mu\nu\sigma\tau) \text{ gerade Permutation von } (0123) \text{ ist} \\ -1 & \text{falls } (\mu\nu\sigma\tau) \text{ ungerade Permutation von } (0123) \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{16}$$

Bemerkung: Pseudotensor unter räumlichen Spiegelungen

Definition 2: zu $\overleftrightarrow{F}$ dualer Tensor $\hat{\overleftrightarrow{F}}$ ("dualer Feldtensor")

$$\hat{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} F_{\sigma\tau} \tag{17a}$$

Es gilt

$$\underline{\partial_\mu \hat{F}^{\mu\nu}} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}\,\partial_\mu \underline{F_{\sigma\tau}}$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}\,\partial_\mu\,\underline{(\partial_\sigma A_\tau - \partial_\tau A_\sigma)}$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}\,\partial_\mu\partial_\sigma A_\tau$$

$$- \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}\,\partial_\mu\partial_\tau A_\sigma \qquad (18b)$$

$$= \frac{1}{2}\big(\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} - \underbrace{\varepsilon^{\mu\nu\tau\sigma}}_{-\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}}\big)\,\partial_\mu\partial_\sigma A_\tau$$

$$= \varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}\,\partial_\mu\partial_\sigma A_\tau$$

$$= -\underbrace{\varepsilon^{\mu\sigma\nu\tau}}_{-\varepsilon^{\sigma\mu\nu\tau}}\,\underbrace{\partial_\mu\partial_\sigma}_{\partial_\sigma\partial_\mu} A_\tau \;\underline{= 0}$$

FG $\partial_\mu \hat{F}^{\mu\nu} = 0$ folgen also allein aus Definition des Feldtensors!

Offensichtlich L-kovariante Formulierung der Maxwellgleichungen 2. Teil (Gln. ohne Quellterme)

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$
$$\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \qquad (1)$$

$$\boxed{\partial_\mu \hat{F}^{\mu\nu} = 0} \qquad (18a)$$

zu Gl. (18a): Führe die folgenden Rechnungen selbst durch!

1) Aus Gl. (14)

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

folgt mit

$$F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\mu}\underbrace{g_{\beta\nu}F^{\mu\nu}}_{} = g_{\alpha\mu}F^{\mu\nu}g_{\nu\beta}$$
$$\qquad\qquad g_{\nu\beta}$$

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

2) Daraus folgt mit

$$\hat{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}F_{\sigma\tau}$$

$$(\hat{F}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} \qquad (17b)$$

Beachte: $\underline{(F^{\mu\nu}) \longrightarrow (\hat{F}^{\mu\nu})}$ formal durch $\boxed{\begin{matrix}\vec{E} \to \vec{B} \\ \vec{B} \to -\vec{E}\end{matrix}}$

3) Damit sieht man unmittelbar:

$$\partial_\mu \hat{F}^{\mu 0} = 0 \iff \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} \partial_\mu \hat{F}^{\mu i} = 0 \\ i=1,2,3 \end{array}\right\} \iff \mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$$

"Verkettungsterm" (kein Quellterm)

4) Man kann leicht zeigen, daß den vier Gln. (18a) die vier Gln.

$$\partial^\sigma F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\sigma} + \partial^\nu F^{\sigma\mu} = 0 \qquad (19)$$

$$(\sigma,\mu,\nu) = (0,1,2),\ (0,1,3),\ (0,2,3),\ (1,2,3)$$

äquivalent sind.

Die Gln. für andere Wertetripel von (σ,μ,ν) sind $\perp$ trivialerweise erfüllt; z.B. $(\sigma,\mu,\nu) = (0,1,1)$:

$$\partial^0 \underbrace{F^{11}}_{0} + \partial^1 F^{10} + \partial^1 \underbrace{F^{01}}_{-F^{10}} = 0$$

$\perp$ äquivalent oder

IX.1.D. Kontinuitätsgleichung und Ladungserhaltung

Kontinuitätsgleichung

Haben wir bereits offensichtlich L-kovariant angeschrieben:

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0} \qquad (21)$$

Mathematisch betrachtet ist sie Integrabilitätsbedingung der Mx-Gln.:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \implies \underbrace{\underbrace{\partial_\nu \partial_\mu}_{\partial_\mu\partial_\nu} \underbrace{F^{\mu\nu}}_{-F^{\nu\mu}}}_{0} = \frac{4\pi}{c}\partial_\nu j^\nu \qquad (22)$$

Physikalisch betrachtet drückt sie raum-zeitlich lokal die Ladungserhaltung aus. Global gilt:

Ladungserhaltung:

Für eine räumlich lokalisierte Quellverteilung ist

$$\boxed{Q = \int d^3r\, \rho(\vec{r},t) \quad \text{zeitunabhängig}} \qquad (25b)$$

Beweis mit Hilfe des vierdimensionalen Gaußschen Integralsatzes:

HIER NUR SKIZZIERT: näheres dazu s. Skriptum Anhänge A.1.3, A.1.4

$\mathcal{V}$ beliebiges Vierdimensionales Gebiet

$$d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \text{L-Invariante}^{+)}$$

Vierdimensionales Volumselement

+) Pseudoskalar

$\mathcal{R}(\mathcal{V})$ dreidimensionale Berandung von $\mathcal{V}$

= dreidimensionale geschlossene Hyperfläche

$$x^\mu = x^\mu(u, v, w)$$

$d^3\sigma^\mu$ dreidimensionales "vektorielles" Hyperflächenelement = Vierervektor, "senkrecht" zur Hyperfläche, "Betrag" = Inhalt des Hyperflächenelementes

$$d^3\sigma_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial u} \frac{\partial x^\sigma}{\partial v} \frac{\partial x^\tau}{\partial w} \, du \, dv \, dw$$

Gaußscher Satz ($d^3\sigma^\mu$ nach "außen" orientiert)

$$\int_{\mathcal{V}} d^4x \, \partial^\mu \ldots = \oint_{\mathcal{R}(\mathcal{V})} d^3\sigma^\mu \ldots \tag{23}$$

Σ raumartige dreidimensionale Hyperfläche:

beliebige Weltpunkte (Ereignisse) auf Σ besitzen raumartigen Abstand

$d^3\sigma^\mu$ zeitartig, zukunftgerichtet gewählt

$$(d^3\sigma^\mu) = (\underbrace{dx^1 dx^2 dx^3}_{d^3r > 0}, dx^2 dx^3 dx^0, dx^3 dx^0 dx^1, dx^0 dx^1 dx^2)$$

Spezialfall: Σ Zeithyperebene

$$x^0 = \text{konst.}$$
$$x^1 = u$$
$$x^2 = v$$
$$x^3 = w$$

$$(d^3\sigma^\mu) = (d^3r, 0, 0, 0)$$

Offensichtlich L-kovariante Formulierung des globalen Erhaltungssatzes der Ladung

$$\int_{\mathcal{V}} d^4x \, \underbrace{\partial^\mu j_\mu}_{0} = \oint_{\mathcal{R}(\mathcal{V})} d^3\sigma^\mu j_\mu \Rightarrow \oint_{\mathcal{R}(\mathcal{V})} d^3\sigma^\mu j_\mu = 0 \tag{24}$$

Spezielle Wahl von $\mathcal{V}$: $\mathcal{V}$ sei von zwei raumartigen Hyperflächen Σ_1, Σ_2 (beide zukunftsorientiert) und einer im räumlich Unendlichen liegenden "Seiten"-Hyperfläche Γ begrenzt.

Dann lautet (24):

$$\int_{\Sigma_1} d^3\sigma^\mu j_\mu - \int_{\Sigma_2} d^3\sigma^\mu j_\mu + \underbrace{\int_{\Gamma} d^3\sigma^\mu j_\mu}_{\text{0 für räumlich lokalisierte Quellen}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\Sigma_1} d^3\sigma^\mu j_\mu = \int_{\Sigma_2} d^3\sigma^\mu j_\mu}$$

offensichtlich L-kov. Erhaltungssatz

Weitere Spezialisierung:

Σ_1 Zeithyperebene $x^0 = ct_1$

Σ_2 Zeithyperebene $x^0 = ct_2$

t_1, t_2 beliebig, fest

$(d^3\sigma^\mu) = (d^3r, 0, 0, 0)$

$$\int_{\Sigma_1} d^3\sigma^\mu j_\mu = \int_{\Sigma_2} d^3\sigma^\mu j_\mu \qquad (25a)$$

$$\int d^3r\, j_0(ct_1, \vec{r}) = \int d^3r\, j_0(ct_2, \vec{r})$$

$$\int d^3r\, \rho(\vec{r}, t_1) = \int d^3r\, \rho(\vec{r}, t_2) \qquad (25b)$$

IX.2. Transformation der Feldstärken. Feldinvarianten

IX.2.A. Transformation der Feldstärken

Eichtransformationen

(II.14b): $\phi \longrightarrow \phi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\psi$

(II.14a): $\vec{A} \longrightarrow \vec{A} - \text{grad}\,\psi$

In "Viererschreibweise":

$$\boxed{A^\mu \longrightarrow A^\mu + \partial^\mu \psi} \qquad (27)$$

$$\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu}$$

$$\partial^\mu \overbrace{(A^\nu + \cancel{\partial^\nu \psi})}\, - \partial^\nu \overbrace{(A^\mu + \cancel{\partial^\mu \psi})} = F^{\mu\nu} \quad \checkmark$$

Lorenzeichung

(II.15): $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi_L + \text{div}\,\vec{A}_L = 0$

Stellt eine L-kovariante Beziehung dar:

$$\partial_\mu A^\mu_L = 0 \qquad (28)$$

Lorenzeichung bleibt also bei Bezugssystemwechsel erhalten (Coulombeichung nicht!)

FG für (A^μ_L):

$$\underbrace{\partial_\mu \partial^\mu}_{-\Box} A^\nu_L = \frac{4\pi}{c} j^\nu \qquad (29)$$

LT der Feldstärken

$$\boxed{F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}} \qquad (30)$$

In Matrixschreibweise: Wegen $F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha F^{\alpha\beta} \Lambda^\nu{}_\beta$

$$F' = \Lambda F \Lambda^T$$

Standard-LT

$$ {}^{st}\Lambda = ({}^{st}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^{st}\Lambda^{T} \qquad (30) $$

Beachte: Für allgemeine LT gilt $\Lambda^T = \Lambda$ nicht!

$$ \begin{pmatrix} 0 & -E'_x & -E'_y & -E'_z \\ E'_x & 0 & -B'_z & B'_y \\ E'_y & B'_z & 0 & -B'_x \\ E'_z & -B'_y & B'_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot $$

$$ \cdot \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (32) $$

Ausmultiplizieren gibt:

$E'_x = E_x$	$B'_x = B_x$
$E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z)$	$B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z)$
$E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y)$	$B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y)$

Standard-LT der Feldstärken (33)

IX.2.B. Feldinvarianten

Da $\overleftrightarrow{F}$ antisymmetrisch ist, kann man aus den Komponenten des Feldtensors durch "Verjüngen" und "Überschieben" nur zwei unabhängige nichttriviale Viererskalarfelder (L-invariante Felder) bilden:

$$ \boxed{F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad , \quad F^{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu}} $$

Beachte: $F^{\mu}{}_{\mu} = F_{\mu}{}^{\mu} = \hat{F}^{\mu}{}_{\mu} = \hat{F}_{\mu}{}^{\mu} = 0$,
da $\overleftrightarrow{F}$ und damit $\hat{\overleftrightarrow{F}}$ antisymmetrisch, also triviale Viererskalarfelder. Ferner: $F^{\mu\nu} F_{\nu\mu} = -F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, $F^{\mu\nu} \hat{F}_{\nu\mu} = -F^{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu}$ wegen Antisymmetrie, also "nichts Neues" (nicht unabhängig von obigen Größen).

Weniger offensichtlich (s. weiter unten):

$$ \hat{F}^{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu} = -F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} , $$

also auch "nichts Neues".

Beachte: $\vec{E} \to \vec{B}$, $\vec{B} \to -\vec{E}$ macht aus $(F^{\mu\nu}) \to (\hat{F}^{\mu\nu})$!

Ausrechnung gibt:

$$ \boxed{F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \quad , \quad F^{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu} = -4 \vec{E} \cdot \vec{B}} \qquad (34) $$

"Feldinvarianten" des elm. Feldes

Für beliebige LT $S \to S'$ gilt also

$$ \boxed{\begin{aligned} \vec{E}^2(\vec{r},t) - \vec{B}^2(\vec{r},t) &= \vec{E}'^2(\vec{r}',t') - \vec{B}'^2(\vec{r}',t') \\ \vec{E}(\vec{r},t) \cdot \vec{B}(\vec{r},t) &= \vec{E}'(\vec{r}',t') \cdot \vec{B}'(\vec{r}',t') \end{aligned}} \qquad (35) $$

Folgerungen: **Am selben Ereignis E**

$$S: \ (x^\mu) = (ct, \vec{r})$$
$$S': \ (x'^\mu) = (ct', \vec{r}')$$
$$\vdots$$

gilt:

1) Ist in einem Inertialsystem der Betrag der elektrischen Feldstärke kleiner (gleich) [größer] als der Betrag der magnetischen Feldstärke, so gilt dies in allen Inertialsystemen.

2) Ist in einem Inertialsystem der Winkel zwischen elektrischer und magnetischer Feldstärke $> \frac{\pi}{2}$ $(= \frac{\pi}{2})$ $[< \frac{\pi}{2}]$, so gilt dies in allen Inertialsystemen.

3) Sind in einem Inertialsystem elektrische und magnetische Feldstärke zueinander senkrecht und von gleichem Betrag, so gilt dies in allen Inertialsystemen.

4) Gilt in einem Inertialsystem S $\vec{E} = \vec{0}$ $(\vec{B} = \vec{0})$, so gilt in einem beliebigen gegenüber S bewegten Inertialsystem S' $\vec{E}' \perp \vec{B}'$.

5) Ohne Beweis (offensichtlich konsistent mit Feldinvarianten):
Gilt in einem Inertialsystem S $\vec{E} \perp \vec{B}$ und $|\vec{E}| > |\vec{B}|$ $(\vec{E} \perp \vec{B}$ und $|\vec{E}| < |\vec{B}|)$, so gibt es Inertialsysteme S' mit $\vec{B}' = \vec{0}$ $(\vec{E}' = \vec{0})$.

IX.3. Kraft- und Energiebeziehungen

IX.3.A. Lorentz-Viererkraftdichte

Definition: Lorentz-Viererkraftdichte

$$f^\mu = \frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu \qquad (39)$$

Mit

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$(j_\nu) = (c\rho, -j_x, -j_y, -j_z)$$

folgt

$$f^0 = \frac{1}{c} F^{0\nu} j_\nu = \frac{1}{c} \vec{E} \cdot \vec{j}$$

$$f^1 = \frac{1}{c} F^{1\nu} j_\nu = \frac{1}{c} E_x c\rho + \frac{1}{c}(B_z j_y - B_y j_z)$$

$$f^1 = \rho E_x + \left(\frac{\vec{j}}{c} \times \vec{B}\right)_x \quad , \ f^2, f^3 \text{ analog}$$

also

$$\boxed{(f^\mu) = (f^0, \vec{f}) \quad \text{mit} \quad f^0 = \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{E} \ (38), \quad \vec{f} = \rho \vec{E} + \frac{\vec{j}}{c} \times \vec{B} \ (36)}$$

Somit:

1) "räumliche" Komponenten der Lorentz-Viererkraftdichte = gewöhnliche Lorentz-(Dreier-)Kraftdichte von Gl. (I.41e).

2) cf^0 = Leistungsdichte = vom Feld pro Zeit- und Volumseinheit an den Ladungen geleistete Arbeit

Elimination des Viererstromes und Umformung mit Hilfe der Mx-Gln.: Ziel: $\frac{1}{c} f^\mu = -\partial_\nu T^{\nu\mu}$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(39):} & f^\mu = \frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu \\ \text{(15):} & \partial^\sigma F_{\sigma\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\nu \\ \text{(19):} & \partial^\sigma F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\sigma} + \partial^\nu F^{\sigma\mu} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

(39): $\frac{1}{c} f^\mu = \frac{1}{c} F^{\mu\nu} \underbrace{\frac{1}{c} j_\nu}_{(15):\ \frac{1}{4\pi}\partial^\sigma F_{\sigma\nu}} = \frac{1}{4\pi c} F^{\mu\nu} \partial^\sigma F_{\sigma\nu}$ (40)

$$= \frac{1}{4\pi c} \partial^\sigma (F^{\mu\nu} F_{\sigma\nu}) - \frac{1}{4\pi c} F_{\sigma\nu} \partial^\sigma F^{\mu\nu}$$

Ziel: $\frac{1}{c} f^\mu = -\partial_\nu T^{\nu\mu}$

$$\frac{1}{c} f^\mu = \frac{1}{4\pi c} \underbrace{\partial^\sigma (F^{\mu\nu} F_{\sigma\nu})}_{\mathrm{I}} - \frac{1}{4\pi c} \underbrace{F_{\sigma\nu} \partial^\sigma F^{\mu\nu}}_{\mathrm{II}}$$

I: $\partial^\sigma (F^{\mu\nu} F_{\sigma\nu}) = \partial^\nu (F^{\mu\sigma} \underbrace{F_{\nu\sigma}}_{})$

$F_{\sigma\nu} = -g_{\nu\tau} F_\sigma{}^\tau$

$$= -\underbrace{g_{\nu\tau} \partial^\nu}_{\partial_\tau} (F^{\mu\sigma} F_\sigma{}^\tau) = -\partial_\nu (F^{\mu\sigma} F_\sigma{}^\nu)$$

I

II: $F_{\sigma\nu} \partial^\sigma F^{\mu\nu} = \underbrace{F_{\nu\sigma}}_{-F_{\sigma\nu}} \partial^\nu \underbrace{F^{\mu\sigma}}_{-F^{\sigma\mu}} = F_{\sigma\nu} \partial^\nu F^{\sigma\mu}$

$$= \frac{1}{2} F_{\sigma\nu} \underbrace{(\partial^\sigma F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\sigma\mu})}_{(19):\ -\partial^\mu F^{\nu\sigma} = \partial^\mu F^{\sigma\nu}}$$

zuerst: τ

$$= \frac{1}{2} F_{\sigma\nu} \partial^\mu F^{\sigma\nu} = \frac{1}{4} \underbrace{\partial^\mu}_{\text{hierauf: } g^{\mu\nu}\partial_\nu} (F_{\sigma\nu} F^{\sigma\nu})$$

$$= \partial_\nu \left(\frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau}\right)$$

II

$$\frac{1}{c} f^{\mu} = -\partial_{\nu} \Big\{ \underbrace{\frac{1}{4\pi c}\left(F^{\mu\sigma} F_{\sigma}{}^{\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau}\right)}^{T^{\nu\mu}} \Big\} \qquad (41)$$

IX.3.B. Energie–Impuls Vierertensor des elm. Feldes

Definition: Energie–Impuls–Vierertensor

$$\boxed{T^{\nu\mu} = \frac{1}{4\pi c}\left(F^{\mu\sigma} F_{\sigma}{}^{\nu} + \frac{1}{4} g^{\nu\mu} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau}\right)} \qquad (42)$$

Damit gilt:

$$\boxed{\frac{1}{c} f^{\mu} = -\partial_{\nu} T^{\nu\mu}} \qquad (43)$$

Symbolisch geschrieben:

$$\underbrace{\frac{1}{c}\vec{f}}_{\frac{1}{c}\cdot\text{Viererkraftdichte}} = -\underbrace{\vec{\partial}\cdot\overleftrightarrow{T}}_{\text{"Viererdivergenz" von } \overleftrightarrow{T}}$$

$$\boxed{\overleftrightarrow{T} \text{ ist symmetrisch} : T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}}$$

Beweis: 1. Term in (42)

$$F^{\mu\sigma} F_{\sigma}{}^{\nu} = g_{\sigma\tau} F^{\mu\sigma} F^{\tau\nu} = -g_{\sigma\tau} F^{\mu\sigma} F^{\nu\tau}$$

symmetrisch, 2. Term symmetrisch.

$T^{\nu\mu}$ **Berechnung** (Details s. Unterlagen)

$$T^{\nu\mu} = \underbrace{\frac{1}{4\pi c}}_{\text{Faktor}}\Big(\underbrace{F^{\mu\sigma} F_{\sigma}{}^{\nu}}_{\text{"1. Term"}} + \underbrace{\frac{1}{4} g^{\nu\mu} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau}}_{\text{"2. Term"}}\Big)$$

"1. Term": $F_{\sigma}{}^{\nu} = g_{\sigma\tau} F^{\tau\nu}$ gibt

$$(F_{\sigma}{}^{\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Damit folgt:

$$(F^{\mu\sigma} F_{\sigma}{}^{\nu}) =$$

$$\begin{pmatrix} \vec{E}^2 & (\vec{E}\times\vec{B})_x & (\vec{E}\times\vec{B})_y & (\vec{E}\times\vec{B})_z \\ \cdot & \vec{B}^2 - (E_x^2 + B_x^2) & -E_x E_y - B_x B_y & -E_z E_x - B_z B_x \\ \cdot & \cdot & \vec{B}^2 - (E_y^2 + B_y^2) & -E_y E_z - B_y B_z \\ \cdot & \cdot & \cdot & \vec{B}^2 - (E_z^2 + B_z^2) \end{pmatrix}$$

"2. Term": (34a): $F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau} = -2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \Rightarrow$

$$\left(\frac{1}{4} g^{\nu\mu} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau}\right) = -\frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)\, \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$$

$\frac{1}{4\pi c}$ ("1. Term" + "2. Term") gibt mit

$$w_{em} = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) \qquad \text{Energiedichte (II.46)}$$

$$\vec{g}_{em} = \frac{1}{4\pi c}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right) = \frac{\vec{S}}{c^2}$$

$\vec{S}$ Energiestromdichte (II.45)

$\vec{g}_{em}$ Impulsdichte (II.53)

$$T^{(M)}_{jk} = \frac{1}{4\pi}\left[E_j E_k + B_j B_k - \frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right)\delta_{jk}\right]$$

Maxwellscher Spannungstensor
(= −Impulsstromdichtetensor) (II.52)
des elm. Feldes

für den Energie-Impuls-Vierertensor

$$\left(T^{\nu\mu}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} \frac{1}{c} w_{em} & g_{em,x} & g_{em,y} & g_{em,z} \\ \hline g_{em,x} & & & \\ g_{em,y} & & \left(-\frac{1}{c} T^{(M)}_{jk}\right) & \\ g_{em,z} & & & \end{array}\right) \qquad (45)$$

$$\begin{array}{c|ccc} & \frac{1}{c^2} S_x & \frac{1}{c^2} S_y & \frac{1}{c^2} S_z \\ \hline \frac{1}{c^2} S_x & & & \\ \frac{1}{c^2} S_y & & & \\ \frac{1}{c^2} S_z & & & \end{array}$$

IX.3.C. Bilanzgleichungen

$$\left.\begin{array}{l} f^\mu = \frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu \\ \frac{1}{c} f^\mu = -\partial_\nu T^{\nu\mu} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\partial_\nu T^{\nu\mu} + \frac{1}{c^2} F^{\mu\nu} j_\nu = 0} \qquad (46)$$

lokale Energie und Impulsbilanz
für das aus elm. Feld und Quellen
bestehende Gesamtsystem

Zerlegung in 0-Komponente und "räumliche" Komponenten:

$$\left(\frac{1}{c^2} F^{\mu\nu} j_\nu\right) = \left(\frac{1}{c} f^\mu\right) = \text{ s. (36), (38)}$$

$$= \left(\frac{1}{c^2}\vec{j}\cdot\vec{E},\ \frac{1}{c}\left[\rho\vec{E} + \frac{\vec{j}}{c}\times\vec{B}\right]\right)$$

$$\left(\partial_\nu T^{\nu\mu}\right) = \left(\underbrace{\partial_\nu T^{\nu 0}}, \underbrace{\partial_\nu T^{\nu 1}}, \partial_\nu T^{\nu 2}, \partial_\nu T^{\nu 3}\right)$$

analog

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{c} w_{em} + \vec{\nabla}\cdot\underbrace{\vec{g}_{em}}_{\frac{\vec{S}}{c^2}}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} g_{em,x} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\frac{1}{c} T^{(M)}_{j1}\right)$$

$$\partial_\nu T^{\nu\mu} + \frac{1}{c^2} F^{\mu\nu} j_\nu = 0$$

$$\Updownarrow$$

s. Abschnitt II.4.A, II.4.B

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} w_{em} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} + \vec{j}\cdot\vec{E} = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial t}\vec{g}_{em} + \vec{\nabla}\cdot\left(-\overleftrightarrow{T}^{(M)}\right) + \rho\vec{E} + \frac{\vec{j}}{c}\times\vec{B} = \vec{0} \end{aligned}} \qquad (47)$$

<u>Definition:</u> Viererimpuls des elm. Feldes
(Σ Zeithyperebene)

$$p^\mu_{feld} = \int_\Sigma d^3\sigma_\nu \, T^{\nu\mu} = \int d^3r \, T^{0\mu} \qquad (48)$$

$T^{00} = \frac{1}{c} w_{em}$
$T^{01} = g_{em,x}$
usf.

Aus
$$\underline{\partial_\nu T^{\nu\mu} + \frac{1}{c} f^\mu = 0}$$
folgt dann

$$\int d^3r \, \underline{\partial_\nu T^{\nu\mu}} + \frac{1}{c}\int d^3r \, f^\mu = 0$$

$$\underline{\int d^3r \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} T^{0\mu} + \frac{\partial}{\partial x^i} T^{i\mu}\right)} + \frac{1}{c}\int d^3r \, f^\mu = 0$$

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\underbrace{\int d^3r \, T^{0\mu}}_{p^\mu_{feld}} + \frac{1}{c}\underbrace{\int d^3r \, f^\mu}_{\frac{d}{dt} p^\mu_{mech}} = -\int d^3r \frac{\partial}{\partial x^i} T^{i\mu} \qquad (49)$$

$$\boxed{\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\left(p^\mu_{mech} + p^\mu_{feld}\right) = -\int d^3r \frac{\partial}{\partial x^i} T^{i\mu}} \qquad (50)$$

Gauß

<u>$\mu = 0$:</u> <u>Energieerhaltungssatz</u> (II.49)

<u>$\mu = 1,2,3$:</u> <u>Impulserhaltungssatz</u> (II.56)

<u>IX.3.D. Bewegungsgleichung für eine Punktladung in einem äußeren elm. Feld</u>

<u>BG:</u>

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\vec{p}(t)}_{m\gamma(u(t))\vec{u}(t)} = \vec{F}(t) = \underbrace{q\left[\vec{E}(\vec{r}(t),t) + \frac{\vec{u}(t)}{c}\times\vec{B}(\vec{r}(t),t)\right]}_{\text{(Dreier-) Lorentzkraft}} \qquad (51)$$

$\Rightarrow$ <u>AS:</u>

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(m\gamma(u(t))c^2\right)}_{mc^2 + T(t)} = \vec{F}(t)\cdot\vec{u}(t) = q\,\vec{E}(\vec{r}(t),t)\cdot\vec{u}(t) \qquad (52)$$

Zusammengefaßt in Vierergleichung, und damit offensichtlich L-kovariant formuliert

$$\underline{\frac{d}{d\tau} p^\mu = F^\mu} \quad \text{mit} \quad p^\mu = m u^\mu$$

und
$$(F^\mu) = \left(\gamma(u)\frac{\vec{F}\cdot\vec{u}}{c}, \gamma(u)\vec{F}\right) = q\gamma(u)\left(\frac{\vec{E}\cdot\vec{u}}{c}, \vec{E} + \frac{\vec{u}}{c}\times\vec{B}\right)$$

$$(F^\mu) = q\,\gamma(u)\left(\frac{\vec{E}\cdot\vec{u}}{c}\,,\ \vec{E} + \frac{\vec{u}}{c}\times\vec{B}\right)$$

<u>Vierer-Lorentzkraft</u>

muß sich durch Feldtensor und Vierergeschwindigkeit ausdrücken lassen

Es gilt:

$$\boxed{F^\mu = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu}$$

$\underline{\mu=0}$: $F^0 = \frac{q}{c} F^{0\nu} u_\nu = \frac{q}{c} \underbrace{F^{0i} u_i}_{\gamma(u)\,\vec{E}\cdot\vec{u}}$ ✓

F^{0i}: $-E_x, -E_y, -E_z$; u_i: $-\gamma(u)u_x, -\gamma(u)u_y, -\gamma(u)u_z$

$\underline{\mu=1}$: $F^1 = \frac{q}{c} F^{1\nu} u_\nu$

$$= \frac{q}{c}\Big[\underbrace{F^{10} u_0}_{c\,\gamma(u) E_x} + \underbrace{F^{1i} u_i}_{\gamma(u)\,(B_z u_y - B_y u_z)}\Big] \qquad (F^{11} = 0)$$

$$= \gamma(u)\,(\vec{u}\times\vec{B})_x$$ ✓

$\mu = 2,3$ analog

BG: (bei Vernachlässigung der Selbstkraft = Strahlungsrückwirkungskraft)

$$\boxed{m\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu} \qquad (53)$$

IX.4. Monochromatische ebene Wellen. Dopplereffekt und Aberration

IX.4.A. Monochromatische ebene Wellen

Homogene Maxwellgleichungen:

$$\partial_\sigma F^{\sigma\nu} = 0 \qquad (54)$$

$$\partial_\sigma \,\Big|\ \partial^\sigma F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\sigma} + \partial^\nu F^{\sigma\mu} = 0 \qquad (55)$$

$$\underbrace{\partial_\sigma \partial^\sigma}_{-\Box} F^{\mu\nu} + \partial^\mu \underbrace{\partial_\sigma F^{\nu\sigma}}_{0} + \partial^\nu \underbrace{\partial_\sigma F^{\sigma\mu}}_{0} = 0$$

$$\boxed{\Box F^{\mu\nu} = 0 \quad \text{Wellengleichungen}} \qquad (56)$$

notwendig für die Erfüllung der Mx-Gln. (54), (55)

Ansatz:

$$F^{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3) = f^{\mu\nu} e^{-i k_\sigma x^\sigma} \qquad (57)$$

$\vec{\vec{k}}$ (Kreis-)Wellenzahlvierervektor

Behauptung:
Notwendige Bedingung für Erfüllung von (56):

$$\vec{\vec{k}}\cdot\vec{\vec{k}} = 0 \qquad (\vec{\vec{k}}\ \text{"lichtartig"}) \qquad (58)$$

Beweis:

$$\Box F^{\mu\nu} = \underbrace{f^{\mu\nu}}_{\substack{\text{nicht } \forall \mu,\nu \\ \text{gleich } 0}} \underbrace{\Box e^{-ik_\sigma x^\sigma}}_{0} = 0$$

$$\underbrace{\Box}_{\vec{\vec{\partial}}\cdot\vec{\vec{\partial}}} e^{-ik_\sigma x^\sigma} = -g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta e^{-ik_\sigma x^\sigma}$$

$$= -g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta \qquad = \underbrace{g^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta}_{\vec{\vec{k}}\cdot\vec{\vec{k}}=0 \;\checkmark} e^{-ik_\sigma x^\sigma} = 0, \quad \forall x^0, x^1, x^2, x^3$$

$$\left(\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)$$

Setzen wir

$$-ik_\sigma x^\sigma = i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t),$$

so folgt

$$k_\sigma x^\sigma = k_0 x^0 + k_i x^i = \underbrace{\omega t}_{\frac{\omega}{c}ct} - \vec{k}\cdot\vec{r}$$

$$(k^\mu) = (k^0, \vec{k}) = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right) \qquad (59)$$

$$\vec{\vec{k}}\cdot\vec{\vec{k}} = 0 \iff \omega = c|\vec{k}| = ck \qquad (60)$$

Dispersionsbeziehung (V.9)

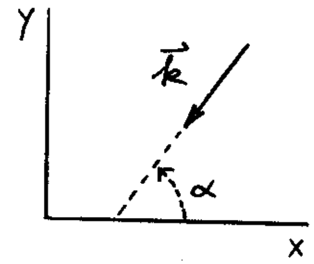
Stoßprozesse: Photon: Einstein, de Broglie

$$(p^\mu) = (\hbar k^\mu) = \left(\frac{\hbar\omega}{c}, \hbar\vec{k}\right) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \qquad (61)$$

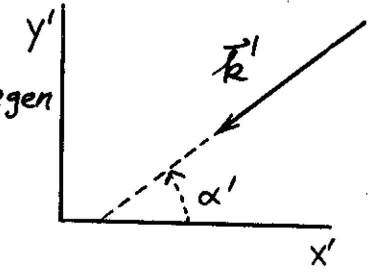
IX.4.B. Dopplereffekt

Standard-LT für $\vec{k}$: $(k^\mu) = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right) = k(1, \vec{n})$, mit $\frac{\omega}{c} = k$, $\vec{k} = k\vec{n}$

S:



S': v gegen S



$$\vec{k} = k\vec{n} = \frac{\omega}{c}\vec{n} \qquad \vec{k}' = k'\vec{n}' = \frac{\omega'}{c}\vec{n}'$$

$$(k^\mu) = k(1, \overbrace{-\cos\alpha, -\sin\alpha, 0}^{\vec{n}}) \qquad (62)$$

$$(k'^\mu) = k'(1, \overbrace{-\cos\alpha', -\sin\alpha', 0}^{\vec{n}'}) \qquad (67)$$

$$k'^0 = \gamma(k^0 - \beta k^1)$$

$$k'^0 = k' = \frac{\omega'}{c}, \quad k^0 = k = \frac{\omega}{c}, \quad k^1 = -k\cos\alpha = -\frac{\omega}{c}\cos\alpha$$

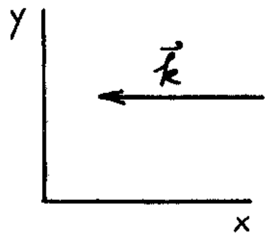
$$\boxed{\omega' = \omega\gamma(1 + \beta\cos\alpha)} \qquad (64)$$

Dopplereffekt

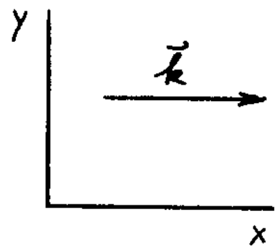
$$\underline{\omega' = \omega\gamma(1+\beta\cos\alpha)}$$

Spezialfälle

a) Longitudinaler Dopplereffekt

(S) 

oder



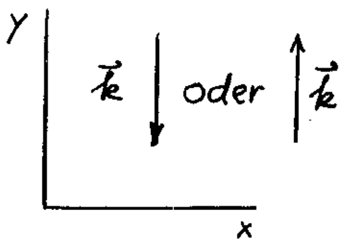
$\alpha = 0$ $\qquad$ $\alpha = \pi$

$\omega' = \omega\gamma(1+\beta)$ $\qquad$ $\omega' = \omega\gamma(1-\beta)$ (65)

Effekt 1. Ordnung in β

Vorrelativistisch: Falls S Äthersystem analoge Formeln, allerdings ohne γ-Faktoren. Unterschiede zu SRT also erst in 2. Ordnung in β

b) Transversaler Dopplereffekt

(S) 

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3\pi}{2}$

$$\omega' = \omega\gamma \qquad (66)$$

Effekt 2. Ordnung in β

Ives & Stilwell 1938

Vorrelativistisch: kein Effekt

SRT: Zeitdilatation!

IX.4.C. Aberration

$$(k^\mu) = k(1, \underbrace{-\cos\alpha, -\sin\alpha, 0}_{\vec{n}})$$

$$(k'^\mu) = k'(1, \underbrace{-\cos\alpha', -\sin\alpha', 0}_{\vec{n}'})$$

Standard-LT

$k'^0 = \gamma(k^0 - \beta k^1)$ $\qquad$ $k' = k\gamma(1+\beta\cos\alpha)$

$k'^1 = \gamma(k^1 - \beta k^0)$ $\qquad$ $k'\cos\alpha' = k\gamma(\cos\alpha + \beta)$

$k'^2 = k^2$ $\qquad$ $k'\sin\alpha' = k\sin\alpha$

$k'^3 = k^3$ $\qquad$ $0 = 0$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\sin\alpha' = \frac{\sin\alpha}{\gamma(1+\beta\cos\alpha)} \qquad (68a) \\ \cos\alpha' = \frac{\cos\alpha + \beta}{1+\beta\cos\alpha} \qquad (68b)}$$

$\sin^2\alpha' + \cos^2\alpha' = 1$ ✓

Bemerkung: Siehe die Anwendungen in Abschnitt VII.4 (Folien VII-52', VII-52'' und VII-57, VII-58.)

Setzt man in

$$\cos\alpha' = \frac{\cos\alpha + \beta}{1 + \beta\cos\alpha}$$

die Identitäten

$$\cos\xi = \frac{1 - \tan^2\frac{\xi}{2}}{1 + \tan^2\frac{\xi}{2}} \quad , \xi = \alpha', \alpha$$

ein, so erhält man (s. Skriptum)

$$\boxed{\tan\frac{\alpha'}{2} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\tan\frac{\alpha}{2}} \qquad (69)$$

Penrose 1959 : Der Inhalt dieser Aberrations=formel kann als stereografische Projektion plus zentrische Streckung interpretiert werden.

Diese Abbildung ist konform (winkeltreu), Kreise (und Geraden) der Projektionsebene ("Schirm") werden auf Kreise auf der Projektionskugel ("Himmelssphäre") abgebildet und umgekehrt.

$\Longrightarrow$ Unsichtbarkeit der Längenkontraktion für ein Objekt, welches in seinem Ruhsystem eine Kugel ist, für beliebige (relativ zu diesem Objekt beliebig nahe oder ferne und beliebig bewegte) Beobachter.