FOLIEN VON D. GRAU ZUR VORLESUNG "ELEKTRODYNAMIK UND RELATIVITÄTSTHEORIE"

nach dem Skriptum von H. Nowotny

Kapitel 8

VIII. RELATIVISTISCHE MECHANIK

Newtonsche Mechanik G-kovariant Mechanik muß daher abgeändert werden

VIII.1. Invariante Masse, Viererimpuls und relativistischer Impuls eines Punktteilchens

Punktteilchen : Trägheitseigenschaften durch
L-invariante Masse m (= Ruhmasse ; s. später)
gekennzeichnet

Definition 1 : Viererimpuls des Teilchens

$$\vec{\vec{p}}(\tau) := m\vec{\vec{u}}(\tau) \qquad (1)$$

Mit $p^\nu = m u^\nu \quad , \quad (u^\nu) = \gamma(u)\,(c, \vec{u})$

folgt für die

kontravarianten Komponenten bzgl. S

$$(p^\nu) = (p^0, p^1, p^2, p^3) = m\gamma(u)\,(c, u_x, u_y, u_z)$$
$$= m\gamma(u)\,(c, \vec{u})$$

(2)

Definition 2: relativistischer Impuls ("Dreierimpuls") des Teilchens

$$\vec{p} := m\gamma(u)\vec{u} \qquad (3)$$

Bemerkung: Der relativistische Impuls tritt an die Stelle des Newtonschen Impulses

$$\vec{p}_{\text{Newton}} = m\vec{u} \, .$$

Mit der Abkürzung ("geschwindigkeitsabhängige Masse")

$$m(u) := m\gamma(u)$$

gilt

$$\vec{p} = m(u)\vec{u} \, .$$

Wegen

$$m(0) = m$$

nennt man die invariante Masse auch Ruhmasse.

$$(p^\mu) = (p^0, \overbrace{p^1, p^2, p^3}^{\vec{p}}) = m\gamma(u)\,(c, \vec{u})$$

p^0: redundante Information (s. VIII-3)

$$\left.\begin{array}{l} \vec{p} = m\vec{u} \\ \vec{u}\cdot\vec{u} = c^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \vec{p}(\tau)\cdot\vec{p}(\tau) = m^2c^2 \, , \quad \forall \tau \qquad (4)$$

$$p^\mu p_\mu = (p^0)^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2c^2$$

$$p^0 = \sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^{\,2}} \qquad (p^0 = m\gamma(u)c > 0) \quad (5)$$

VIII.2. Relativistische Bewegungsgleichung

VIII.2.A. Viererkraft. Bewegungsgleichung

Newtonsche Mechanik:

BG $\quad \underbrace{\frac{d}{dt}\vec{p}_{\text{Newton}}}_{= m\vec{a}} = \vec{F}$

G-kovariant, wenn $\vec{F}' = \vec{F}$ (achsenparallele Bezugssysteme)

$\vec{F}$ "gewöhnliche Kraft" = "Dreierkraft" (in Elektrodynamik "übliche" Lorentzkraft)

Relativistische Mechanik:
POSTULAT (in "Dreierschreibweise")

BG $\quad \frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}$

L-kovariant bei geeigneter Transformation von $\vec{F}$

$\vec{p}(t) = m\gamma(u(t))\vec{u}(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{p}(t) \overset{\text{i.a.}}{\not\propto} \vec{a}(t)$! s. später

Fragen:

1) Welches Transformationsgesetz ist für $\vec{F}$ zu fordern?

2) Wie sieht die Formulierung mit Vierervektoren, d.h. die offensichtlich L-kovariante Formulierung aus?

In der Vierervektorformulierung kann nur statt $S: \frac{d}{dt}\vec{p}(t)$ ($S': \frac{d}{dt'}\vec{p}\,'(t')$ etc.) der Vierervektor $\frac{d}{d\tau}\vec{\vec{p}}(\tau)$ verwendet werden:

> **Relativistische Mechanik:**
> POSTULAT (in Vierervektorschreibweise)
> $$\frac{d}{d\tau}\vec{\vec{p}}(\tau) = \vec{\vec{F}}(\tau) \tag{7}$$

per constructionem ("offensichtlich") L-kovariant, wofern $\vec{\vec{F}}$ Vierervektor

Damit die "räumlichen" Komponenten bzgl. S mit dem früheren Postulat $\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}$ übereinstimmen, muß wegen $d\tau = \frac{dt}{\gamma(u)}$

$\vec{\vec{F}}: S: (F^\mu) = (\,\cdot\,, \gamma(u)\vec{F})$ gelten. Deshalb:

Definition: Viererkraft auf ein Teilchen

> $$\vec{\vec{F}}: \quad S: \quad (F^\mu) = (F^0, F^1, F^2, F^3) = (F^0, \gamma(u)\vec{F})$$
> $\vec{F}$ Dreierkraft
>
> S': analog [(8)]
>
> F^0 (bzw. F'^0 etc.) bestimmt durch
> $$\vec{\vec{F}}(\tau)\cdot\vec{\vec{u}}(\tau) = 0 \;, \quad \forall\tau$$

Bemerkungen:

1) Die "0"-Komponente von (7) muß redundante Information enthalten. WELCHE? (s. nächster Abschnitt)

2) Die Forderung $\vec{\vec{F}}\cdot\vec{\vec{u}} = 0$, welche F^0 (bzw. F'^0 etc.) bestimmt, ergibt sich aus Konsistenzgründen:

$$\vec{\vec{p}}(\tau) = m\vec{\vec{u}}(\tau) \Rightarrow \frac{d}{d\tau}\vec{\vec{p}}(\tau) = m\frac{d\vec{\vec{u}}(\tau)}{d\tau} = m\vec{\vec{a}}(\tau)$$

(VIII.41): $\left.\begin{aligned} &\vec{\vec{a}}(\tau)\cdot\vec{\vec{u}}(\tau) = 0 \;, \quad \forall\tau \\ &\frac{d}{d\tau}\vec{\vec{p}}(\tau) = m\vec{\vec{a}}(\tau) = \vec{\vec{F}}(\tau) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$

Forderung $\vec{\vec{F}}(\tau)\cdot\vec{\vec{u}}(\tau) = 0, \forall\tau$. ✓

"Nebenergebnis": Man kann statt (7) auch alternativ

$$\boxed{m\vec{\vec{a}}(\tau) = \vec{\vec{F}}(\tau)} \tag{9}$$

schreiben.

Berechnung von F^0: $(F^\mu) = (F^0, \gamma(u)\vec{F})$
$(u_\mu) = \gamma(u)\,(c, -\vec{u})$

$$0 = F^\mu u_\mu = \gamma(u)\,(F^0 c - \gamma(u)\vec{F}\cdot\vec{u}) \Longrightarrow$$

$$\boxed{F^0 = \gamma(u)\frac{\vec{F}\cdot\vec{u}}{c}} \tag{10}$$

3) Aus

$$(F^\mu) = \gamma(u)\left(\frac{\vec{F}\cdot\vec{u}}{c}, \vec{F}\right) \;, \quad (F'^\mu) \text{ analog}$$

und

$$F'^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha F^\alpha$$

ergibt sich das für die L-Kovarianz der BG $\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}$ notwendige und hinreichende Transformationsgesetz $\vec{F} \to \vec{F}'$. (Für Standard-LT selbst anschreiben!)

4) "Räumliche" Komponenten von

$$\frac{d}{d\tau}\vec{\vec{p}} = \vec{\vec{F}}$$

bzgl. S : $(p^\mu) = (p^0, \vec{p})$, $(F^\mu) = \gamma(u)\left(\frac{\vec{F}\cdot\vec{u}}{c}, \vec{F}\right)$

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{d\vec{p}}{dt}\underbrace{\frac{dt}{d\tau}}_{\gamma(u)} = \gamma(u)\vec{F}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad ✓$$

5) "Räumliche" Komponenten von

$$m\vec{\vec{a}}(\tau) = \vec{\vec{F}}$$

bzgl. S (kontravariant) geben (s. (a^μ) Folie VII-46)

$$m\gamma^2(u)\left(\vec{a} + \gamma^2(u)\frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{u}\right) = \cancel{\gamma(u)}\vec{F}$$

$$m\gamma(u)\vec{a} + m\gamma^3(u)\frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{u} = \vec{F} \quad \Big| \cdot \frac{\vec{u}}{c^2} \qquad (12)$$

$$\Rightarrow \quad m\gamma(u)\frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{c^2}\underbrace{\left(1 + \gamma^2(u)\frac{u^2}{c^2}\right)}_{\gamma^2(u)} = \frac{\vec{F}\cdot\vec{u}}{c^2} = m\gamma^3(u)\frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{c^2}$$

$\Rightarrow$ BG

$$\underbrace{m\gamma(u)}_{m(u)\ !}\vec{a} = \vec{F} - \frac{\vec{F}\cdot\vec{u}}{c^2}\vec{u} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Kraft $\vec{F}$ verursacht Beschleunigung $\vec{a}$, welche i.a. nicht die Richtung von $\vec{F}$ besitzt.

Ausnahmen : 1) $\vec{F} \perp \vec{u}$; z.B. geladenes Teilchen im Magnetfeld

2) $\vec{F} \parallel \vec{u}$; z.B. geladenes Teilchen im longitudinalen elektrischen Feld (Linearbeschleuniger)

Beachte:
$\tilde{S}_t$: $m\vec{\vec{a}} = \vec{\vec{F}}$! $\Rightarrow$ physikalische Bedeutung der L-inv. Masse m

VIII.2.B. Arbeitssatz bzw. Energiesatz

Newtonsche Mechanik:

BG $\quad \frac{d}{dt}(\underbrace{m\vec{u}}_{\vec{p}_{Newton}}) = \vec{F} \quad \Longrightarrow$

Arbeitssatz

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\frac{mu^2}{2}}_{T_{Newton}} = \vec{F}\cdot\vec{u}$$

Relativistische Mechanik:

BG $\quad \frac{d}{dt}(m\gamma(u)\vec{u}) = \vec{F} \quad \Longrightarrow \quad$ (s. unten +))

Arbeitssatz

$$\frac{d}{dt}\underbrace{(m\gamma(u)c^2)}_{mc^2 + T} = \vec{F}\cdot\vec{u}$$

mc^2: Ruhenergie (innere Energie)

T: relativistische kinetische Energie

$$T := mc^2(\gamma(u) - 1)$$

+) $\vec{F}\cdot\vec{u} = mc^2\gamma^3(u)\frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{c^2} = \frac{d}{dt}(m\gamma(u)c^2)$

1) Nun sehen wir explizit, daß die "0"-Komponente von

$$\frac{d}{d\tau}\vec{p} = \vec{F}$$

den bereits aus den "räumlichen" Komponenten folgenden Arbeitssatz, also redundante Information, enthält:

S: $\frac{dp^0}{d\tau} = F^0$ gibt mit $p^0 = m\gamma(u)c$

$$F^0 = \gamma(u)\frac{\vec{F}\cdot\vec{u}}{c}$$

$$\frac{d}{d\tau} = \gamma(u)\frac{d}{dt}$$

$$\cancel{\gamma(u)}\frac{d}{dt}(m\gamma(u)c) = \cancel{\gamma(u)}\frac{\vec{F}\cdot\vec{u}}{c}$$

$$\frac{d}{dt}(m\gamma(u)c^2) = \vec{F}\cdot\vec{u} \quad ✓$$

2) Aus dem Arbeitssatz

$$\frac{d}{dt}(m\gamma(u)c^2) = \frac{dA}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{u} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt}$$

folgt der differentielle Arbeitssatz

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r} = d(m\gamma(u)c^2) \qquad (15)$$

Potentialfeld

Gilt $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$, V Potential der Kraft (16

so läßt sich der Arbeitssatz als Energiesatz interpretieren:

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\vec{\nabla}V\cdot d\vec{r} = -dV = d(m\gamma(u)c^2)$$

$$d(m\gamma(u)c^2 + V) = 0$$

$$\underbrace{m\gamma(u)c^2}_{mc^2+T} + V = E \quad \text{Konstante der Bewegung} \qquad (17)$$

Ruhenergie + kinetische Energie + potentielle Energie

= Gesamtenergie (zeitlich konstant)

VIII. 2.C. Kräftefreies Teilchen

$$E = m\gamma(u)c^2 = mc^2 + T = m(u)c^2 \qquad (18)$$

Einsteinbeziehung

EINSTEIN: Steht zur Umwandlung in andere Energieformen zur Verfügung

(z.B. "Zerstrahlung" eines e^-e^+-Paares in zwei Photonen)

(2), (5): $\quad p^0 = m\gamma(u)c = \sqrt{m^2c^2+\vec{p}^2}$

$$\Rightarrow \quad p^0 = \frac{E}{c} \quad , \quad (p^\mu) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \qquad (19)$$

$$E = \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^2} \qquad (20)$$

Nichtrelativistischer Grenzfall: $u \ll c$

$$E = mc^2 + T = mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{\vec{p}^4}{8m^3c^2} + - \dots \qquad (21)$$

VIII. 2.D. Hyperbolische Bewegung

Annahmen: 1) $\vec{F} = (F, 0, 0)$

F zeitlich konstant > 0

2) AB: $\vec{r}(0) = \vec{0}$, $\vec{u}(0) = \vec{0}$

$$\text{BG:} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\gamma(u)\vec{u}) = \vec{F} = F\vec{e}_x \qquad (23)$$

bzw.

$$m\gamma(u)\vec{a} = \vec{F} - \frac{\vec{F}\cdot\vec{u}}{c^2}\vec{u} = F\vec{e}_x - \frac{Fu_x}{c^2}\vec{u}$$

Wegen AB folgt daraus:

$$u_y(t) = u_z(t) = 0 \quad , \quad y(t) = z(t) = 0 \qquad (24)$$

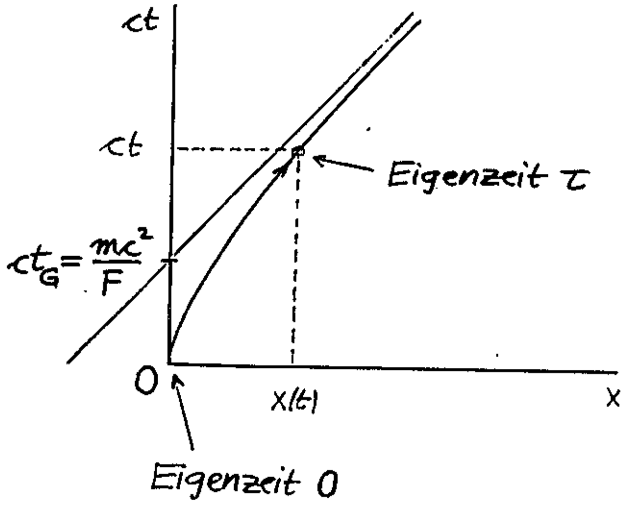
$$\frac{d}{dt}(m\gamma(u)u) = F \quad \text{mit } u = u_x > 0$$

$$\frac{d}{dt}(m\gamma(u)u) = F \quad , \quad m\gamma(u)u = Ft \quad \text{(AB)}$$

$$\Rightarrow u(t) = u_x(t) = \frac{ct}{\sqrt{t^2 + \frac{m^2c^2}{F^2}}}$$

$$x(t) = \frac{mc^2}{F}\left(\sqrt{1+\frac{F^2t^2}{m^2c^2}} - 1\right) \qquad \text{(AB)} \quad (26)$$

Hyperbel im Minkowskidiagramm mit Asymptote $\quad ct = x + \frac{mc^2}{F}$



Zeige selbst: $\quad a(t) = a_x(t) = \dfrac{\frac{F}{m}}{\left(1+\frac{F^2t^2}{m^2c^2}\right)^{3/2}}$

Beachte: Für $t \uparrow +\infty$ folgt $u(t) \uparrow c$, $a(t) \downarrow 0$.

Für "kleine" t gilt:

$$x(t) \approx \frac{a}{2}t^2 \quad , \quad u(t) \approx at \quad , \quad a(t) \approx a \quad \text{mit } a := \frac{F}{m}$$

$$u(t) = u_x(t) = \frac{ct}{\sqrt{t^2 + \frac{m^2c^2}{F^2}}} \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{u^2(t)}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{F^2t^2}{m^2c^2}}}$$

$$\int \overbrace{\sqrt{1 - \frac{u^2(t)}{c^2}}\, dt}^{d\tau} = \int \frac{dt}{\sqrt{1 + \frac{F^2t^2}{m^2c^2}}} = \frac{mc}{F} \operatorname{arsh} \frac{Ft}{mc} + C$$

Eigenzeit ($\tau = 0$ für $t = 0$ gewählt)

$$\tau(t) = \frac{mc}{F} \operatorname{arsh} \frac{Ft}{mc} < t \qquad (27)$$

Bemerkungen: Für diese Art der Bewegung ist die Beschleunigung im jeweiligen momentanen inertialen Ruhsystem $\tilde{S}_t$ (t fest : $\tilde{S}_t : \tilde{u}(\tilde{t}) = 0$) fest und durch den Wert $a := \frac{F}{m}$ gegeben*), weshalb man von einer "gleichförmig beschleunigten Bewegung im Sinne der SRT" spricht.
Falls es sich um eine gleichförmig beschleunigte Bewegung einer Rakete (im Sinne der SRT) handelt, ist m nicht zeitlich konstant, die Formeln für $x(t)$, $u(t)$, $a(t)$ gelten dann aber mit der Ersetzung $\frac{F}{m} \rightarrow a$. ●

*) Zeige selbst:

1) Für eine eindimensionale Bewegung gilt allgemein

$$\tilde{a}(\tilde{t}) = \gamma^3(u(t))\, a(t) \,.$$

2) Für die oben besprochene hyperbolische Bewegung gilt

$$a(t) = \frac{F}{m} \frac{1}{\gamma^3(u(t))} \,.$$

Aus 1) + 2) folgt die Behauptung.

VIII.3. Relativistische Teilchenstoßprozesse

(inkl. Umwandlungsprozesse bzw. Reaktionen)

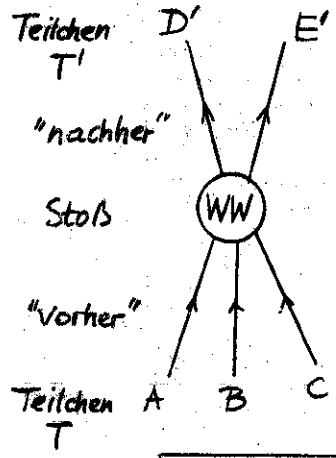
VIII.3.A. Erhaltung des Gesamtviererimpulses

"Stoßnäherung"

WW der Teilchen wird außerhalb eines als raum-zeitlich klein angesehenen WW-Bereiches vernachlässigt.

Sind keine äußeren Kräfte (Felder) vorhanden, gilt dann:

"vor dem Stoß" } Teilchen kräftefrei $\Rightarrow$
"nach dem Stoß" } Viererimpuls jedes Teilchens zeitunabhängig



$$\vec{\vec{P}}_{\text{nachher}} = \sum_{T'} \vec{\vec{p}}_{T'}$$

elm., starke, schwache WW $\boxed{\text{QT}}$ (~~Gravitation~~) gekrümmte Raumzeit

$$\vec{\vec{P}}_{\text{vorher}} = \sum_{T} \vec{\vec{p}}_{T} \qquad (28)$$

Postulat: $\vec{\vec{P}}_{\text{nachher}} = \vec{\vec{P}}_{\text{vorher}}$

+ weitere Erhaltungssätze! (29)

Bemerkungen:

1) Bedeutet Energie- und Impulserhaltung. Summe der Ruhmassen muß nicht erhalten sein.

2) Rechenaufwand läßt sich durch geschickte Wahl des Bezugssystems u. U. beträchtlich vermindern; z. B. Auswertung in S', Transformation der Ergebnisse nach S. ●

VIII. 3. B. Schwerpunktsystem S^* für ein System kräftefreier Teilchen

Gesamtviererimpuls $\quad \vec{\vec{p}} = \sum_T \vec{\vec{p}}_T$

Definition des Schwerpunktsystems

$$S^*: \quad (p^{*\mu}) = \left(\frac{E^*}{c}, \vec{0}\right)$$

Transformation $S \longrightarrow S^*$ für den Fall

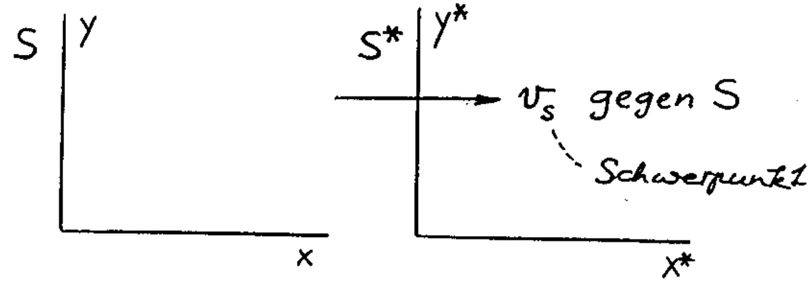
$$S: \quad (p^\mu) = \left(\frac{E}{c}, p, 0, 0\right), \; p > 0 \qquad (32)$$

(durch geeignete Wahl des KS bzgl. S stets erreichbar)

DANN: Standard-LT zwischen S und S^* möglich

$$S: \quad (p^\mu) = \left(\frac{E}{c}, p, 0, 0\right), \; p > 0$$

$$S^*: \quad (p^{*\mu}) = \left(\frac{E^*}{c}, 0, 0, 0\right)$$



Zusammenhang zwischen E^* und E, p

$$\vec{\vec{p}} \cdot \vec{\vec{p}} = p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = p^{*\mu} p^*_\mu = \frac{E^{*2}}{c^2}$$

$$\Longrightarrow \quad (p^{*\mu}) = \left(\sqrt{\frac{E^2}{c^2} - p^2}, \vec{0}\right) \qquad (35)$$

v_S bzw. $\beta_S \equiv \beta(v_S)$, $\gamma_S \equiv \gamma(v_S)$

$$LT: \quad \underset{\substack{\| \\ 0}}{p^{*1}} = \gamma_S (\underset{\substack{\| \\ p}}{p^1} - \beta_S \underset{\substack{\| \\ \frac{E}{c}}}{p^0}) \quad \Longrightarrow \beta_S = \frac{p}{\frac{E}{c}} \qquad (34)$$

$$\gamma_S = \frac{\frac{E}{c}}{\sqrt{\frac{E^2}{c^2} - p^2}}, \qquad \beta_S \gamma_S = \frac{p}{\sqrt{\frac{E^2}{c^2} - p^2}}$$

Definition: Invariante Schwerpunktmasse M

$$M^2 c^2 := \vec{\vec{p}} \cdot \vec{\vec{p}} \qquad (36)$$

$$(p^\mu) = \left(\frac{E}{c}, p, 0, 0\right)$$

$$(p^{*\mu}) = \left(\sqrt{\frac{E^2}{c^2} - p^2}, 0, 0, 0\right)$$

$$\gamma_s = \frac{\frac{E}{c}}{\sqrt{\frac{E^2}{c^2} - p^2}} \quad , \quad \beta_s \gamma_s = \frac{p}{\sqrt{\frac{E^2}{c^2} - p^2}}$$

$$\underline{M^2 c^2} = \vec{\vec{p}} \cdot \vec{\vec{p}} = p^\mu p_\mu = \underline{\frac{E^2}{c^2} - p^2}$$

$$(p^{*\mu}) = (Mc, 0, 0, 0)$$

$$\gamma_s = \frac{E}{Mc^2} \quad , \quad \beta_s \gamma_s = \frac{p}{Mc} \tag{37}$$

$$\frac{E}{c} = M \gamma_s c \quad , \quad p = M \gamma_s v_s$$

$$(p^\mu) = M \underbrace{\gamma_s (c, v_s, 0, 0)}_{(v_s^\mu)}$$

$$p^\mu = M v_s^\mu \quad \text{bzw.} \quad \vec{\vec{p}} = M \vec{\vec{v}}_s$$

LT $S \rightarrow S^*$: $\quad x^{*\mu} = {}^{st}\Lambda^\mu{}_\alpha x^\alpha$ mit

$$({}^{st}\Lambda^\mu{}_\alpha) = \begin{pmatrix} \gamma_s & -\beta_s\gamma_s & 0 & 0 \\ -\beta_s\gamma_s & \gamma_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{Mc^2} & -\frac{p}{Mc} & 0 & 0 \\ -\frac{p}{Mc} & \frac{E}{Mc^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Spezialfall: Zwei Teilchen

$$(p_A^\mu) = \left(\frac{E_A}{c}, \vec{p}_A\right) = \left(\frac{E_A}{c}, p_A, p_y, p_z\right)$$

$$(p_B^\mu) = \left(\frac{E_B}{c}, \vec{p}_B\right) = \left(\frac{E_B}{c}, p_B, -p_y, -p_z\right) \tag{38}$$

$$(p^\mu) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = \left(\frac{E_A + E_B}{c}, p_A + p_B, 0, 0\right)$$

"Energie-Impuls-Beziehungen"

$$\vec{\vec{p}}_A \cdot \vec{\vec{p}}_A = m_A^2 c^2 = \frac{E_A^2}{c^2} - \vec{p}_A^{\,2}$$

$$\vec{\vec{p}}_B \cdot \vec{\vec{p}}_B = m_B^2 c^2 = \frac{E_B^2}{c^2} - \vec{p}_B^{\,2} \tag{39}$$

$$\vec{\vec{p}} \cdot \vec{\vec{p}} = \underline{M^2 c^2} = \frac{(E_A + E_B)^2}{c^2} - \underbrace{(p_A + p_B)^2}_{(\vec{p}_A + \vec{p}_B)^2} \tag{40}$$

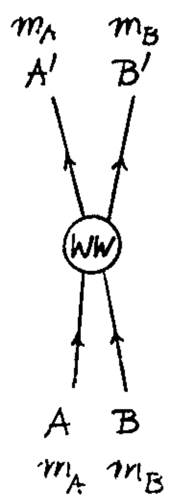
$$= \underbrace{\frac{E_A^2}{c^2} - \vec{p}_A^{\,2}}_{\underline{m_A^2 c^2}} + \underbrace{\frac{E_B^2}{c^2} - \vec{p}_B^{\,2}}_{\underline{m_B^2 c^2}} + \underline{\frac{2 E_A E_B}{c^2} - 2 \vec{p}_A \cdot \vec{p}_B}$$

$$M^2 = (m_A + m_B)^2 + 2\left(\frac{E_A E_B}{c^4} - \frac{\vec{p}_A \cdot \vec{p}_B}{c^2} - m_A m_B\right) \tag{41}$$

VIII. 3. C. Elastische und inelastische Stoßprozesse

Elastisch: Nach dem Stoß liegen dieselben Teilchen vor wie vor dem Stoß.
Bei einem zusammengesetzten Teilchen ändert sich nicht der innere Anregungszustand (und damit auch nicht die Ruhmasse).

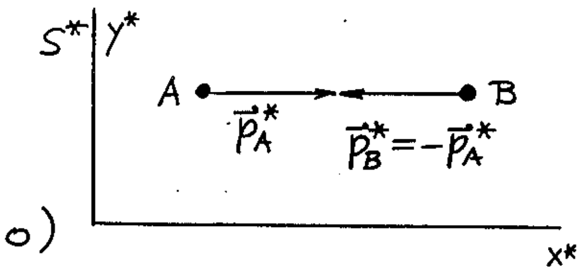
Beispiel: Elastischer Stoß zweier Teilchen



Inelastisch: Beim Stoß "verschwinden" Teilchen oder (und) es werden neue Teilchen "erzeugt" oder (und) es ändert sich bei mindest einem zusammengesetzten Teilchen der innere Anregungszustand.

Elastischer Stoß zweier Teilchen: beschrieben im Schwerpunktsystem S^*

Vor dem Stoß:



$$(p_A^{*\mu}) = \left(\frac{E_A^*}{c}, \vec{p}_A^*\right) = \left(\frac{E_A^*}{c}, p_A^*, 0, 0\right)$$

$$(p_B^{*\mu}) = \left(\frac{E_B^*}{c}, \vec{p}_B^*\right) = \left(\frac{E_B^*}{c}, -p_A^*, 0, 0\right), \quad p_A^* > 0 \tag{42a}$$

mit

$$m_A^2 c^2 = \frac{E_A^{*2}}{c^2} - \vec{p}_A^{*2}, \quad m_B^2 c^2 = \frac{E_B^{*2}}{c^2} - \vec{p}_A^{*2} \tag{42b}$$

$$\Rightarrow \quad m_A^2 c^2 - m_B^2 c^2 = \frac{E_A^{*2} - E_B^{*2}}{c^2}$$

Nach dem Stoß:

$$(p_{A'}^{*\mu}) = \left(\frac{E_{A'}^*}{c}, \vec{p}_{A'}^*\right), \quad (p_{B'}^{*\mu}) = \left(\frac{E_{B'}^*}{c}, \vec{p}_{B'}^*\right) \tag{43a}$$

Impulserhaltung: $\vec{p}_{B'}^* = -\vec{p}_{A'}^*$

mit

$$m_A^2 c^2 = \frac{E_{A'}^{*2}}{c^2} - \vec{p}_{A'}^{*2}, \quad m_B^2 c^2 = \frac{E_{B'}^{*2}}{c^2} - \vec{p}_{B'}^{*2} = \frac{E_{B'}^{*2}}{c^2} - \vec{p}_{A'}^{*2}$$

$$\Rightarrow \quad m_A^2 c^2 - m_B^2 c^2 = \frac{E_{A'}^{*2} - E_{B'}^{*2}}{c^2} \tag{43b}$$

Energieerhaltung: $$E_A^* + E_B^* = E_{A'}^* + E_{B'}^* \tag{44}$$

ferner: $$E_A^{*2} - E_B^{*2} = E_{A'}^{*2} - E_{B'}^{*2}$$

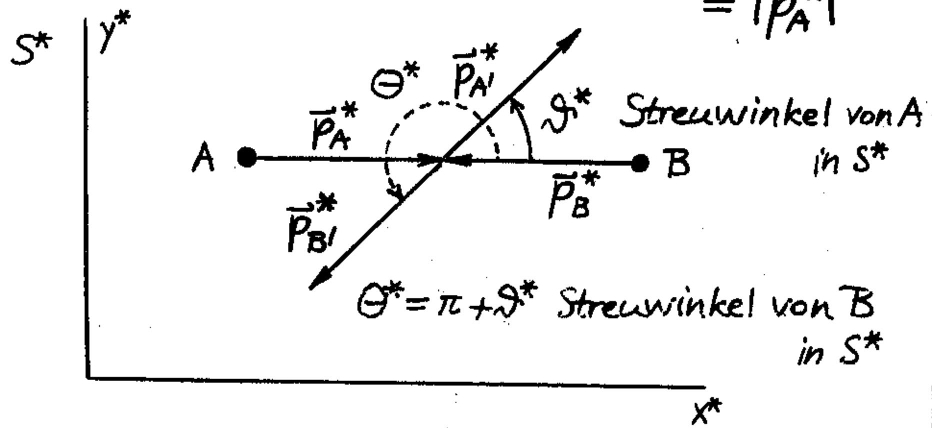
$$E_A^* + E_B^* = E_{A'}^* + E_{B'}^*$$

$$\left.\begin{array}{l} \\ (\cancel{E_A^* + E_B^*})(E_A^* - E_B^*) = (\cancel{E_{A'}^* + E_{B'}^*})(E_{A'}^* - E_{B'}^*) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$E_{A'}^* = E_A^* \quad , \quad E_{B'}^* = E_B^* \qquad (45)$$

$$m_A^2 c^2 = \frac{E_A^{*2}}{c^2} - \vec{p}_A^{*2} = \underbrace{\frac{E_{A'}^{*2}}{c^2}}_{\frac{E_A^{*2}}{c^2}} - \vec{p}_{A'}^{*2} \Rightarrow$$

$$|\vec{p}_{A'}^*| = |\vec{p}_A^*| \quad , \quad \text{analog} \quad |\vec{p}_{B'}^*| = |\vec{p}_B^*| = |\vec{p}_A^*| \qquad (46)$$



Beide Streuwinkel gemessen gegen Richtung von $\vec{p}_A^*$!

Nur <u>Impulsrichtungen</u> ändern sich in S^*,
dabei gilt aber $\vec{p}_{B'}^* = -\vec{p}_{A'}^*$.

Kovariante Formulierung des physikalischen Gehaltes der Aussagen $\underline{E_{A'}^* = E_A^*}$, $\underline{E_{B'}^* = E_B^*}$

$$(p_A^{*\mu}) = \left(\frac{E_A^*}{c}, \vec{p}_A^*\right) \quad , \quad (p_{A'}^{*\mu}) = \left(\frac{E_{A'}^*}{c}, \vec{p}_{A'}^*\right)$$

$$(v_S^{*\mu}) = (c, \vec{0}) \qquad (47)$$

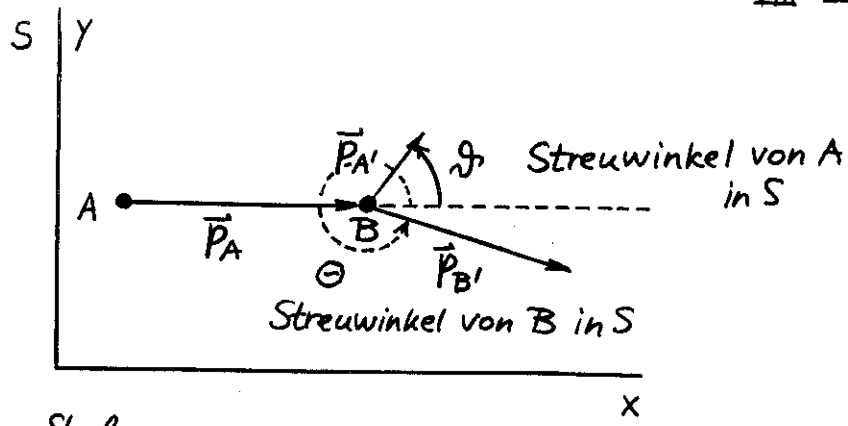
$$\left.\begin{array}{l} \vec{\vec{p}}_A \cdot \vec{\vec{v}}_S = p_A^{*\mu} v_{S\mu}^* = E_A^* \\ \vec{\vec{p}}_{A'} \cdot \vec{\vec{v}}_S = p_{A'}^{*\mu} v_{S\mu}^* = E_{A'}^* \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{analog mit} \\ A \to B \; , \; A' \to B' \end{array}$$

$$\vec{\vec{p}}_A \cdot \vec{\vec{v}}_S = \vec{\vec{p}}_{A'} \cdot \vec{\vec{v}}_S \quad , \quad \vec{\vec{p}}_B \cdot \vec{\vec{v}}_S = \vec{\vec{p}}_{B'} \cdot \vec{\vec{v}}_S \qquad (48)$$

VIII. 4. Beispiele für relativistische Teilchenstoßprozesse

VIII. 4. A. Elastischer Stoß zweier Teilchen beschrieben im Laborsystem S ("Target"-Teilchen B vor dem Stoß in Ruhe)

Gesucht: Energien $E_{A'}$, $E_{B'}$ der Teilchen A, B nach dem Stoß in Abhängigkeit von deren Streuwinkeln ϑ, Θ in S



Vor dem Stoß:

$$(p_A^\mu) = \left(\frac{E_A}{c}, \vec{p}_A\right) = \left(\frac{E_A}{c}, p_A, 0, 0\right), \quad p_A > 0$$

$$(p_B^\mu) = \left(\frac{E_B}{c}, \vec{p}_B\right) = (m_B c, 0, 0, 0) \tag{49}$$

mit $$m_A^2 c^2 = \frac{E_A^2}{c^2} - p_A^2 \tag{50}$$

$$(p^\mu) = \left(\frac{E_A + m_B c^2}{c}, p_A, 0, 0\right)$$

s. Folie VIII-16: $$(v_S^\mu) = \left(\frac{p^\mu}{M}\right) = \left(\frac{E_A + m_B c^2}{Mc}, \frac{p_A}{M}, 0, 0\right) \tag{51}$$

Nach dem Stoß: Ansatz (s. Abb.)

$$(p_{A'}^\mu) = \left(\frac{E_{A'}}{c}, p_{A'}\cos\vartheta, p_{A'}\sin\vartheta, 0\right)$$

$$(p_{B'}^\mu) = \left(\frac{E_{B'}}{c}, p_{B'}\cos\Theta, p_{B'}\sin\Theta, 0\right) \tag{52}$$

mit $$m_A^2 c^2 = \frac{E_{A'}^2}{c^2} - p_{A'}^2, \quad m_B^2 c^2 = \frac{E_{B'}^2}{c^2} - p_{B'}^2 \tag{53}$$

$$(p_A^\mu) = \left(\frac{E_A}{c}, p_A, 0, 0\right)$$

$$(p_{A'}^\mu) = \left(\frac{E_{A'}}{c}, p_{A'}\cos\vartheta, p_{A'}\sin\vartheta, 0\right)$$

$$(v_S^\mu) = \left(\frac{E_A + m_B c^2}{Mc}, \frac{p_A}{M}, 0, 0\right)$$

(48): $$\underline{\vec{p}_A \cdot \vec{v}_S = \vec{p}_{A'} \cdot \vec{v}_S}$$

$$\Rightarrow \frac{E_A(E_A + m_B c^2)}{Mc^2} - \frac{p_A^2}{M}$$

$$= \frac{E_{A'}(E_A + m_B c^2)}{Mc^2} - \frac{p_{A'} p_A}{M}\cos\vartheta \quad \Big| \cdot Mc^2$$

$$E_A(E_A + m_B c^2) - c^2 p_A^2 = E_{A'}(E_A + m_B c^2) - c^2 p_A p_{A'}\cos\vartheta \tag{54a}$$

mit $$p_{A'} = \sqrt{\frac{E_{A'}^2}{c^2} - m_A^2 c^2}$$

Bestimmungsgleichung für $E_{A'}$ in Abhängigkeit von ϑ

Analog folgt aus $\vec{p}_B \cdot \vec{v}_S = \vec{p}_{B'} \cdot \vec{v}_S$

$$m_B c^2 (E_A + m_B c^2) = E_{B'}(E_A + m_B c^2) - c^2 p_A p_{B'}\cos\Theta \tag{54b}$$

mit $$p_{B'} = \sqrt{\frac{E_{B'}^2}{c^2} - m_B^2 c^2}$$

Bestimmungsgleichung für $E_{B'}$ in Abhängigkeit von Θ

Beachte: Θ, ϑ nicht voneinander unabhängig!
Das ist aber für die gestellten Fragen gleichgültig...

Bemerkung: Den <u>Zusammenhang zwischen ϑ und Θ</u> erhält man am einfachsten aus dem <u>Erhaltungssatz für die y-Komponente des Gesamtimpulses</u>:

$$\underbrace{p_{A'}(\vartheta)}_{\text{aus Gl. (54a)}} \sin\vartheta + \underbrace{p_{B'}(\Theta)}_{\text{aus Gl. (54b)}} \sin\Theta = 0 \implies \Theta(\vartheta)$$

●

VIII.4.B. Spezialfall: Comptonstreuung im Laborsystem S (Ruhsystem des e^- vor dem Stoß)

Teilchen A: Photon: $m_\gamma = 0$ und

Einstein-de Broglie-Beziehungen

$$E = \hbar\omega = hf\,, \quad p = \hbar k = \frac{h}{\lambda}$$

(20): kräftefreies Teilchen mit $m = 0$

$$E = \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^{\,2}} = cp \qquad (p = |\vec{p}|)$$

Somit:

$$E_A = cp_A = \frac{hc}{\lambda} \qquad (55)+(56)$$

$$E_{A'} = cp_{A'} = \frac{hc}{\lambda'}$$

Teilchen B: Elektron: m_e

(54a):

für Photon

$$E_A(\cancel{E_A} + m_B c^2) - \cancel{c^2 p_A^2} = E_{A'}(E_A + m_B c^2) - c^2 p_A p_{A'} \cos\vartheta$$

$$\frac{\cancel{hc}}{\lambda} m_e c^2 = \frac{\cancel{hc}}{\lambda'}\left(\frac{hc}{\lambda} + m_e c^2\right) - \frac{\cancel{hc}}{\lambda}\frac{hc}{\lambda'}\cos\vartheta$$

$$\frac{1}{\lambda} m_e c^2 = \frac{1}{\lambda'}\left(\frac{hc}{\lambda} + m_e c^2\right) - \frac{hc}{\lambda\lambda'}\cos\vartheta \quad \Big|\cdot\frac{\lambda\lambda'}{m_e c^2}$$

$$\lambda' = \frac{h}{m_e c} + \lambda - \frac{h}{m_e c}\cos\vartheta$$

$$\lambda_c := \frac{h}{m_e c} \qquad \text{Comptonwellenlänge (des Elektrons)} \quad 2{,}4\cdot 10^{-10}\,\text{cm} \qquad (58)$$

$$\boxed{\lambda' = \lambda + \lambda_c(1 - \cos\vartheta)} \qquad (59)$$

VIII.4.C. Inelastische Proton-Proton-Streuung

Frage: Wie groß muß die Geschwindigkeit u_A eines Protons A <u>mindestens</u> sein, damit beim Zusammenstoß mit einem ruhenden Proton B ein zusätzliches Proton-Antiproton-Paar erzeugt werden kann?

Bemerkung: <u>Ladungserhaltung und "Erhaltung der Baryonenzahl"</u> (= Erhaltung der Differenz aus Zahl der Baryonen und Zahl der Antibaryonen) <u>gestatten einen solchen Prozeß.</u> ●

Berechnung in S in S^*

$$\vec{\vec{p}}_{\text{vorher}} = \vec{\vec{p}}_{\text{nachher}} \Rightarrow \vec{\vec{p}}_{\text{vorher}} \cdot \vec{\vec{p}}_{\text{vorher}} = \vec{\vec{p}}_{\text{nachher}} \cdot \vec{\vec{p}}_{\text{nachher}} \qquad (62)$$

Vor dem Stoß im Laborsystem S:

$$(p_A^\mu) = \left(\frac{E_A}{c}, \vec{p}_A\right) \quad \text{mit} \quad \frac{E_A^2}{c^2} - \vec{p}_A^{\,2} = m_p^2 c^2$$

$$(p_B^\mu) = (m_p c, \vec{0})$$

$$(p^\mu_{\text{vorher}}) = \left(\frac{E_A}{c} + m_p c, \vec{p}_A\right) \Rightarrow \qquad (60)$$

$$\vec{\vec{p}}_{\text{vorher}} \cdot \vec{\vec{p}}_{\text{vorher}} = p^\mu_{\text{vorher}}\, p_{\text{vorher},\mu}$$

$$= \left(\frac{E_A}{c} + m_p c\right)^2 - \vec{p}_A^{\,2}$$

$$= \left(\frac{E_A}{c} + m_p c\right)^2 - \left(\frac{E_A^2}{c^2} - m_p^2 c^2\right)$$

$$= 2E_A m_p + 2m_p^2 c^2$$

Nach dem Stoß im Schwerpunktsystem S^*:

$$(p^{*\mu}_{T'}) = (m_p c, \vec{0}) \quad , \quad T' = A', B', C', D'$$

Protonen   Antiproton

$=$

$$(p^{*\mu}_{\text{nachher}}) = (4m_p c, \vec{0}) \Longrightarrow \qquad (61)$$

$$\vec{\vec{p}}_{\text{nachher}} \cdot \vec{\vec{p}}_{\text{nachher}} = p^{*\mu}_{\text{nachher}}\, p^*_{\text{nachher},\mu} = 16 m_p^2 c^2 \qquad (62)$$

$$\Rightarrow \cancel{2}E_A \cancel{m_p} = \cancel{14} m_p^{\cancel{2}} c^2 \quad , \quad E_A = 7m_p c^2$$

$$E_A = m_p \gamma(u_A) c^2 = 7 m_p c^2 \qquad (63)$$

$$\gamma(u_A) = 7 \Rightarrow \text{Mindestgeschwindigkeit:}$$

$$u_A = \sqrt{\frac{48}{49}}\, c = 0{,}98974\, c$$

VIII.4.D. Ist ein Zerfall $\gamma \to e^- + e^+$ möglich?

Bemerkung: Ladungserhaltung und "Erhaltung der Leptonenzahl" würden einen solchen Prozeß gestatten.

S beliebiges Inertialsystem

"Vorher":

$$(p_A^\mu) = (p_\gamma^\mu) = (p^\mu_{\text{Vorher}}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

γ mit $E = c|\vec{p}|$ bzw.

$$\vec{\vec{p}}_\gamma \cdot \vec{\vec{p}}_\gamma = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = 0 \quad , \quad \vec{\vec{p}}_\gamma \text{ "lichtartig"}$$

"Nachher":

$$(p^\mu_{T'}) = \left(\frac{E_{T'}}{c}, \vec{p}_{T'}\right) \quad \text{mit} \quad \frac{E_{T'}^2}{c^2} - \vec{p}_{T'}^{\,2} = m_e^2 c^2$$

$$T' = B', C'$$

e^- e^+

$$(p^\mu_{\text{nachher}}) = \left(\frac{E_{B'} + E_{C'}}{c}, \vec{p}_{B'} + \vec{p}_{C'}\right)$$

$$\vec{\vec{p}}_{\text{Vorher}} = \vec{\vec{p}}_{\text{nachher}} \Rightarrow \begin{cases} E = E_{B'} + E_{C'} \\ \vec{p} = \vec{p}_{B'} + \vec{p}_{C'} \end{cases}$$

$$E^2 - c^2\vec{p}^2 = 0$$

$$(E_{B'} + E_{C'})^2 - c^2(\vec{p}_{B'} + \vec{p}_{C'})^2 = 0 \qquad (66)$$

$$\underbrace{E_{B'}^2 - c^2\vec{p}_{B'}^2}_{m_e^2c^4} + \underbrace{E_{C'}^2 - c^2\vec{p}_{C'}^2}_{m_e^2c^4} + 2(E_{B'}E_{C'} - c^2\vec{p}_{B'}\cdot\vec{p}_{C'}) = 0$$

$$m_e^2c^2 + \frac{E_{B'}}{c}\frac{E_{C'}}{c} - \vec{p}_{B'}\cdot\vec{p}_{C'} = 0$$

$$\underbrace{m_e^2c^2}_{>0} + \underbrace{\left(\sqrt{\vec{p}_{B'}^2 + m_e^2c^2}\sqrt{\vec{p}_{C'}^2 + m_e^2c^2} - \vec{p}_{B'}\cdot\vec{p}_{C'}\right)}_{>0} = 0 \qquad (67)$$

Widerspruch!

IX. DIE ELEKTRODYNAMIK ALS L-KOVARIANTE THEORIE

IX.1. Feldtensor, Maxwellgleichungen

IX.1.A. Viererstrom und Viererpotential

Viererstromdichte $\vec{\vec{j}}$

Wie man beweisen kann, bilden $c\rho, \vec{j}$ die kontravarianten Komponenten eines Vierervektorfeldes bzgl. S, welches man als Viererstromdichte $\vec{\vec{j}}$ bezeichnet.

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\vec{j}}:\ S:\ (j^\mu) &= (c\rho, \vec{j}) \\ S':\ (j'^\mu) &= (c\rho', \vec{j}') \\ &\vdots \end{aligned}}$$

Beachte: $c\rho(x^0, x^1, x^2, x^3)$, $\vec{j}(x^0, x^1, x^2, x^3)$

$c\rho'(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$, $\vec{j}'(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$

Beweis (anders als im Skriptum):

Wir betrachten den Fall einer beliebig bewegten Punktladung q. Es gilt dann $\rho(\vec{r},t) = q\,\delta(\vec{r} - \vec{r}(t))$, $\vec{j}(\vec{r},t) = \vec{u}(t)\,\rho(\vec{r},t)$.