FOLIEN VON D. GRAU ZUR VORLESUNG "ELEKTRODYNAMIK UND RELATIVITÄTSTHEORIE"

nach dem Skriptum von H. Nowotny

Kapitel 7

VI. 4. Multipolstrahlung

(Sphärische Multipolentwicklung)

NICHT VORGETRAGEN

NICHT PRÜFUNGSSTOFF

SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

VII. RELATIVISTISCHE KINEMATIK

VII. 1. Grundlagen

VII. 1. A. Grundlegende Experimente

Situation Ende des 19. Jhdts:

Äther: "Medium" für die Ausbreitung elm. Felder

- erfüllt den ganzen Raum, d.h. ist "überall"
- verhält sich als "Trägermedium" elm. Wellen wie ein elastischer Festkörper (Transversal=wellen!)
- setzt langsam bewegten Materieobjekten keinen merklichen Widerstand entgegen (Himmelsmechanik!)

Nähere Details: M. Born
Die Relativitätstheorie
Einsteins

Gesetze der Mechanik (NEWTON):

- in allen Inertialsystemen gleich (Relativitätsprinzip)
- forminvariant bei Galilei-Transformationen (GT)

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}t$$
$$t' = t$$

Alternativen bzgl. Gesetzen der Elektrodynamik:

1) MEHRHEITSMEINUNG

- ∃ ausgezeichnetes Bezugssystem, das Äthersystem, in welchem die Grundgln. in der bekannten Form gelten (Grundgleichungen der Elektrodynamik korrekt)
- GT korrekt

$\Rightarrow$ Relativitätsprinzip gilt für Phänomene der Elektrodynamik nicht (da Grundgln. bei GT Form ändern), damit Bewegung gegen Äther durch elm. Versuche nachweisbar

2) MINDERHEITS=VOTUM

- Relativitätsprinzip gilt auch für Phänomene der Elektrodynamik
- GT korrekt, Mechanik korrekt.

$\Rightarrow$ Grundgln. der Elektrodynamik sind nicht korrekt

KAUM VORSTELLBAR ... (Experimente!)

3) MINDERHEITS=VOTUM SIEGER

- Relativitätsprinzip gilt auch für Phänomene der Elektrodynamik
- Grundgleichungen der Elektrodynamik sind korrekt

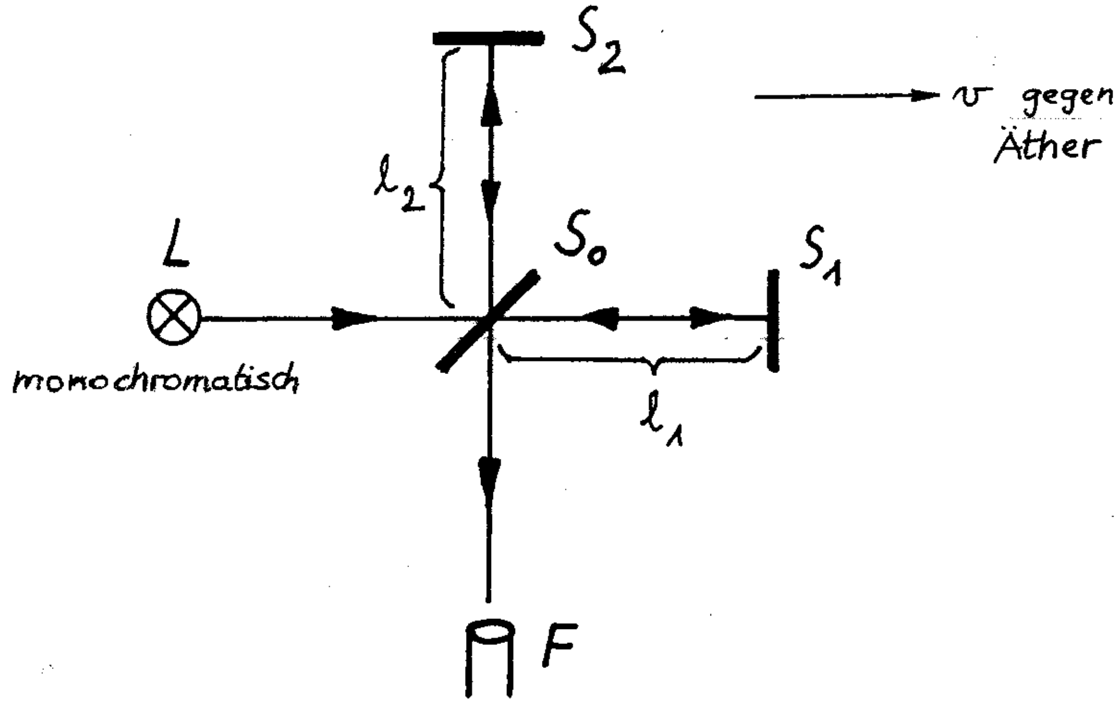
$\Rightarrow$ GT nicht korrekt, Grundgln. der Mechanik nicht korrekt

Entscheidung durch EXPERIMENTE

1887 Michelson-Morley
1725 Aberration (Bradley)
1851 Fizeausche Mitführung
1903 Trouton-Noble
1932 Kennedy-Thorndike
⋮

"experimenta crucis"

S. Panofsky, Phillips
Classical Electricity and Magnetism



Gesichtsfeld hell oder dunkel,
im realen Experiment <u>System heller</u>
<u>und dunkler Ringe</u> ("Interferenzstreifen"),
da ankommende Strahlen nicht genau parallel
und Wellenfronten nicht ganz eben

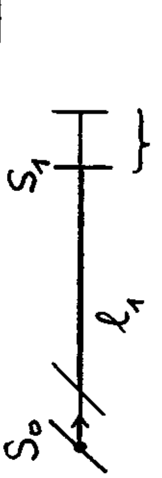
<u>Äthertheorie:</u>

Laufzeit des zu S_1 laufenden Teilstrahles

für die Wege $S_0 \longrightarrow S_1$ ("hin") und

$S_1 \longrightarrow S_0$ ("rück")

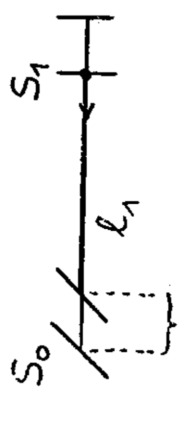
$\longrightarrow v$ gegen Äther



$$\Delta l_1^{hin} = v\, t_1^{hin}$$

$$t_1^{hin} = \frac{l_1 + \Delta l_1^{hin}}{c}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{t_1^{hin} = \frac{l_1}{c-v}} \qquad \text{(absolute Zeit!)}$$



$$\Delta l_1^{rück} = v\, t_1^{rück}$$

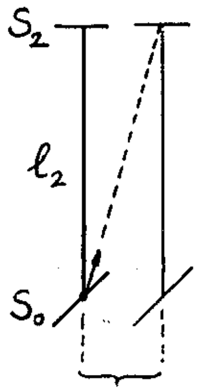
$$t_1^{rück} = \frac{l_1 - \Delta l_1^{rück}}{c}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{t_1^{rück} = \frac{l_1}{c+v}}$$

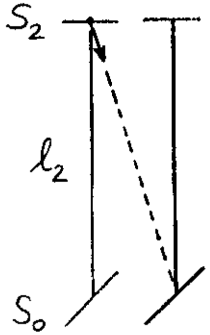
$$t_1 = t_1^{hin} + t_1^{rück} = \frac{2l_1}{c}\,\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (2)$$

Laufzeit des zu S_2 laufenden Teilstrahles für die Wege $S_0 \longrightarrow S_2$ ("hin") und $S_2 \longrightarrow S_0$ ("rück")

$\longrightarrow v$ gegen Äther



$$\left.\begin{aligned} \Delta \ell_2^{hin} &= v\, t_2^{hin} \\ t_2^{hin} &= \frac{\sqrt{\ell_2^2 + (\Delta \ell_2^{hin})^2}}{c} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{t_2^{hin} = \frac{\ell_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}}$$



$$\underline{t_2^{rück} = t_2^{hin}}$$

$$t_2 = t_2^{hin} + t_2^{rück} = \frac{2\ell_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (3)$$

Laufzeitdifferenz

$$t_1 - t_2 = \frac{2\ell_1}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{2\ell_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Bei um $90°$ gedrehter Apparatur ($\ell_1 \leftrightarrow \ell_2$):

andere Laufzeitdifferenz

$$\bar{t}_1 - \bar{t}_2 = \frac{2\ell_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{2\ell_2}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

1887: <u>Michelson–Morley–Experiment</u> : $\ell_1 = \ell_2 = \ell$
<u>und langsame Drehung der Apparatur</u>

(dauert einige Minuten)

Anfangsstellung (Arm 1 in Richtung von $\vec{v}$)

$$\Delta t_A = t_1 - t_2 = \frac{2\ell}{c} \left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

Endstellung (Arm 2 in Richtung von $\vec{v}$)

$$\Delta t_E = \bar{t}_1 - \bar{t}_2 = -\Delta t_A$$

$\Rightarrow$ <u>während der Drehung langsame Verschiebung</u> um

$$n = \frac{c\,(\Delta t_A - \Delta t_E)}{\lambda} \qquad \text{"Interferenz-streifen"}$$

$$n = \frac{4\ell}{\lambda}\left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \approx \frac{2\ell}{\lambda}\frac{v^2}{c^2}$$

müßte eintreten, aber:

"Interferenzstreifen" verschieben sich nicht!

> "negativer Ausgang" des Michelson–Morley–Experimentes

Erklärungsversuche

1) $v = 0$ zum "Versuchszeitpunkt"

Wiederholung des Versuches nach einem halben Jahr fällt abermals negativ aus.

2) Erde "nimmt" Äther in ihrer Umgebung vollständig "mit"

WIDERSPRUCH zu Aberrationsversuchen

3) 1892 Fitzgerald, Lorentz

Längenkontraktionshypothese (ad-hoc Annahme)

s. Skriptum VII.1.B

$\Rightarrow$ Äther bei Michelson–Morley–Experiment nicht beobachtbar:

$$t_1 - t_2 = \frac{2\ell_{10}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{c}\,\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{2\ell_{20}}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{2(\ell_{10}-\ell_{20})}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \bar{t}_1 - \bar{t}_2$$

$\Rightarrow$ keine Verschiebung der "Interferenzstreifen" bei Drehung um 90° (gleichgültig, ob $\ell_{10} = \ell_{20}$ oder nicht)

ABER: 1932 Kennedy–Thorndike–Experiment

$\ell_{10} \neq \ell_{20}$ (ungefähr 16 cm Unterschied),

Apparat im Labor fixiert, aber

Beobachtung durch mehrere Monate:

"Streifenverschiebung" müßte sich durch Änderung von v ergeben

"negativer Ausgang", keinerlei Verschiebung der "Interferenzstreifen"

4) 1905 Einstein:

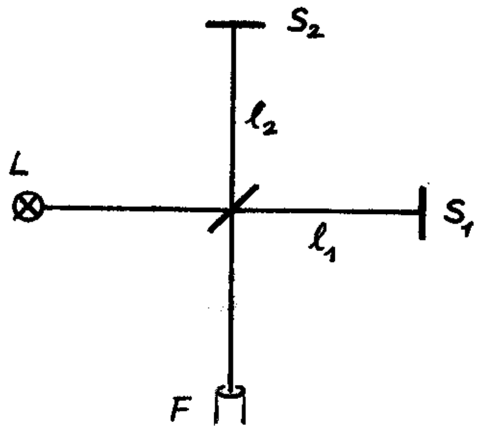
- Es gibt keinen Äther.
- Das Relativitätsprinzip gilt auch für elm. Phänomene.
- Die Maxwelltheorie ist korrekt, Newtonsche Mechanik und GT sind nicht korrekt.

Daraus folgt u.a.:

Elm. Wellen breiten sich im Vakuum unabhängig vom Bewegungszustand ihrer Quelle in jedem Inertialsystem mit der Geschwindigkeit c aus.

DAS IST DER "TOD" DER KONZEPTE DES ABSOLUTEN RAUMES UND DER ABSOLUTEN ZEIT!

Michelson–Morley oder Kennedy–Thorndike Experiment im Ruhsystem der Apparatur (in guter Näherung ein Inertialsystem) betrachtet:



$$t_1 - t_2 = \frac{2(\ell_1 - \ell_2)}{c}$$

t_1, t_2, ℓ_1, ℓ_2 gemessen im Ruhsystem der Apparatur

Formel gilt für jede Orientierung der Apparatur

Zur Lorentzschen ad-hoc Zeitdilatationsannahme s. Skriptum VII.1.B.

Beachte: Die Lorentzschen ad-hoc Annahmen sind von den experimentell überprüfbaren (!) kinematischen Effekten der SRT, welche man als Längenkontraktion (Lorentzkontraktion) und Zeitdilatation bezeichnet, zu unterscheiden.

VII.1.C. Postulate der SRT

P1: Relativitätsprinzip

Beliebige physikalische Vorgänge laufen bei gleichen Bedingungen in beliebigen Inertialsystemen gleich ab.
Naturgesetze müssen sich daher so formulieren lassen, daß sie bei einem Wechsel des inertialen Bezugssystems ihre Form nicht ändern (Forminvarianz, Kovarianz).

P2: "Konstanz der Lichtgeschwindigkeit"
Elektromagnetische Wellen breiten sich unabhängig vom Bewegungszustand ihrer Quelle in allen Inertialsystemen mit der Geschwindigkeit c aus.

Bemerkung: Auf Grund von P1 kommt c die universelle Bedeutung einer Signalgeschwindigkeit beliebiger physikalischer Wirkungen zu.

Homogenität und Isotropie des Raumes und Homogenität der Zeit in bezug auf ein Inertialsystem stellen kein von P1, P2 unabhängiges Postulat dar, sie sind schon in der Definition des Begriffes Inertialsystem enthalten.

VII.1.D. Lorentztransformationen der Zeit-Orts-Koordinaten von Ereignissen

Ereignis E: Inertialsystem S: t, x, y, z
Inertialsystem S': t', x', y', z'

Gesucht: Transformationsgln.

$$t' = t'(t, x, y, z)$$
$$x' = x'(t, x, y, z)$$
$$y' = y'(t, x, y, z)$$
$$z' = z'(t, x, y, z)$$

1) Raum bzgl. S und S' homogen und isotrop, Zeit bzgl. S und S' homogen $\Longrightarrow$
Transformation muß linear sein
(gerade gleichförmig durchlaufene Teilchenbahnen müssen in gerade gleichförmig durchlaufene Teilchenbahnen transformieren)

2) Transformation linear $\Longrightarrow$ Ebenen von S transformieren in Ebenen von S'

Satz: raumfeste Ebenen bzgl. S mit Normalenvektoren $\vec{n} \perp \vec{v}$, $\vec{v}$ Geschwindigkeit von S' gegen S, transformieren in raumfeste Ebenen bzgl. S'

Beweis:

$$\left.\begin{aligned} S:&\quad n_1 x + n_2 y + n_3 z + p = 0 \\ S' \to S:&\quad x = a_1 x' + b_1 y' + c_1 z' + d_1 t' + e_1 \\ &\quad y = a_2 x' + b_2 y' + c_2 z' + d_2 t' + e_2 \\ &\quad z = a_3 x' + b_3 y' + c_3 z' + d_3 t' + e_3 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} S':\quad &(n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3)\, x' \\ &+ (n_1 b_1 + n_2 b_2 + n_3 b_3)\, y' \\ &+ (n_1 c_1 + n_2 c_2 + n_3 c_3)\, z' \\ &+ \underbrace{(n_1 d_1 + n_2 d_2 + n_3 d_3)}_{=0}\, t' \\ &+ (n_1 e_1 + n_2 e_2 + n_3 e_3) + p = 0 \end{aligned}$$

$= 0 \Longleftrightarrow$ falls $\vec{n} := (n_1, n_2, n_3)$, $\vec{d} := (d_1, d_2, d_3)$ $\vec{n} \cdot \vec{d} = 0$ erfüllen; offensichtlich: $\vec{d} \parallel \vec{v}$

3) Wählt man Koordinatenursprünge und Zeitnullpunkte in S und S' so, daß $x = y = z = 0,\ t = 0$ auf $x' = y' = z' = 0,\ t' = 0$ abgebildet wird, so muß wegen P2 gelten:

$$\boxed{\begin{aligned} S:&\quad x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2, \quad t > 0 \\ &\qquad\qquad \Updownarrow \\ S':&\quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2, \quad t' > 0 \end{aligned}}$$

Bemerkung: Das ist der "Tod" der absoluten (universellen) Zeit.

Definitionen:

$$\boxed{\begin{aligned} s^2 &:= c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \\ s'^2 &:= c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \end{aligned}}$$

Satz: Folgt für eine lineare homogene Transformation, daß $s^2 = 0$ $s'^2 = 0$ impliziert (und umgekehrt), so folgt[+)]

$$\boxed{s'^2 = s^2}$$

+) bei Verwendung gleicher Einheiten in S und S'

Beweis: Lineare homogene Transformation gibt

$$s'^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

$$= Ac^2t^2 + Bx^2 + Cy^2 + Dz^2$$

$$+ Ictx + Jcty + Kctz$$

$$+ Lyz + Mzx + Nxy \equiv P$$

a) Notwendige Bedingungen dafür, daß P für jene reellen $ct>0, x, y, z$ null ist, für die

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

null ist:

$$(ct, x, y, z) = (1, \pm 1, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \quad A + B \pm I = 0\,, \quad \underline{A+B=0}, \quad \underline{I=0}$$

Analog:

$$(ct, x, y, z) = (1, 0, \pm 1, 0)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{A+C=0}, \quad \underline{J=0}$$

$$(ct, x, y, z) = (1, 0, 0, \pm 1)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{A+D=0}, \quad \underline{K=0}$$

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

$$s'^2 = P = Ac^2t^2 + \underset{\substack{\| \\ -A}}{B}x^2 + \underset{\substack{\| \\ -A}}{C}y^2 + \underset{\substack{\| \\ -A}}{D}z^2$$

$$+ \underset{\substack{\| \\ 0}}{I}ctx + \underset{\substack{\| \\ 0}}{J}cty + \underset{\substack{\| \\ 0}}{K}ctz \qquad \text{bereits gezeigt}$$

$$+ \underset{\substack{\| \\ 0}}{L}yz + \underset{\substack{\| \\ 0}}{M}zx + \underset{\substack{\| \\ 0}}{N}xy \qquad \text{s. unten}$$

$$(ct, x, y, z) = (\sqrt{2}, 0, 1, 1)$$

$$\Rightarrow \quad 2A - A - A + L = 0\,, \quad \underline{L=0}$$

analog: $\underline{M=0}$, $\underline{N=0}$

$$\Rightarrow \quad s'^2 = P = As^2$$

b) $s'^2 = A(|\vec{v}|)\, s^2$

Isotropie

"Reziprozität":

$$s^2 = A(|\vec{v}|)\, s'^2$$

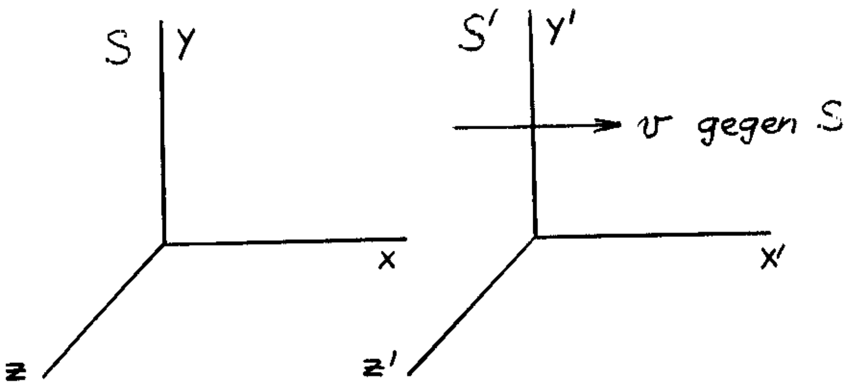
$$\left.\begin{array}{l} s'^2 = A(|\vec{v}|)\, s^2 \\ s^2 = A(|\vec{v}|)\, s'^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A^2(|\vec{v}|) = 1, \quad A(|\vec{v}|) = \underset{(-)}{+}1$$

Grenzfall $|\vec{v}| \downarrow 0$

$$\Rightarrow \quad s'^2 = s^2 \qquad \text{für homogene Transformationen}$$

Standard-LT der Zeit-Orts-Koordinaten

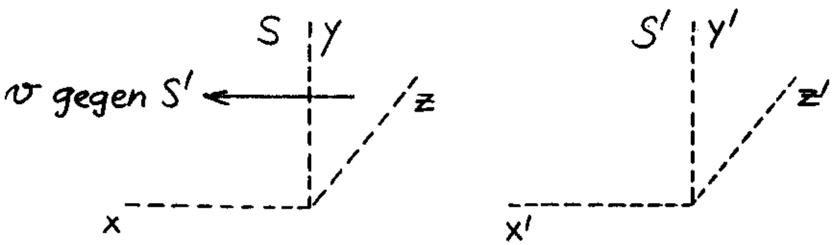
(homogene LT für achsenparallele Systeme, Relativbewegung in x-Richtung)



$$(ct, x, y, z) = (0,0,0,0) \Longleftrightarrow (ct', x', y', z') = (0,0,0,0)$$

I.) Punkt 2) : Ebene $y=0$ von S wird auf Ebene $y'=0$ von S' abgebildet

$$\Rightarrow \quad \underline{y' = C(v)\,y}$$



$$\underline{y = C(v)\,y'} = C^2(v)\,y \quad , \forall y$$

$$\Rightarrow C(v) = \underset{(-)}{+}1 \;, \quad \underline{\underline{y' = y}} \qquad (4)$$

Analog: $\quad \underline{\underline{z' = z}}$

II.) Ebene $x'=0$ von S' muß Ebene $x = vt$ von S sein

$$\Rightarrow \quad \underline{x' = A(v)\,(x - vt)} \quad , \quad A(v) > 0$$

Ferner: $\quad \underline{t' = B(v)\,t - D(v)\,x} \quad , \quad B(v) > 0$

Punkt 3) : $s'^2 = s^2$ für homogene LT

$$c^2 t'^2 - x'^2 = \underline{c^2 (Bt - Dx)^2 - A^2 (x - vt)^2}$$

$$= \underline{c^2 t^2 - x^2} \quad , \forall t, x$$

$$\Rightarrow \quad t^2 \ldots \quad B^2 - \frac{v^2}{c^2} A^2 = 1$$

$$tx \ldots \quad A^2 - \frac{c^2}{v} BD = 0 \qquad \text{mit } A > 0 , B > 0$$

$$x^2 \ldots \quad A^2 - c^2 D^2 = 1$$

$$\Rightarrow \qquad A(v) = B(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$D(v) = \frac{v}{c^2} A(v) \qquad (5)$$

Standard-LT

$$\boxed{\begin{aligned} ct' &= \gamma(v)\left(ct - \frac{v}{c}x\right) \\ x' &= \gamma(v)\,(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}}$$

"Raum-Zeit"

mit
$$\gamma(v) := \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (6)$$

Bemerkung: Für $\frac{v}{c} \ll 1 \Rightarrow \gamma(v) \approx 1$

erhält man daraus näherungsweise die Standard-GT

$$\boxed{\begin{aligned} t' &= t \qquad \text{(universelle Zeit)} \\ x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}}$$

Matrixschreibweise der Standard-LT

Mit
$$\gamma = \gamma(v) \quad , \quad \beta = \beta(v) := \frac{v}{c} \qquad (6)$$

gilt

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{array}{cc:cc} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{{}^{st}\Lambda = {}^{st}\Lambda(v)} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Transformationsmatrix der Standard-LT (8)

Es gilt:
$${}^{st}\Lambda^{-1}(v) = {}^{st}\Lambda(-v) \qquad (9)$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \qquad (10)$$

"Reziprozität"

Allgemeine homogene LT ("eigentliche"+))

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ Eulerwinkel

$$\mathcal{D}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \left(D_{ij}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\ i,j=1,2,3\right)$$

dreidimensionale Drehmatrix
(orthogonale Transformation)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \mathcal{D}(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3') & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \mathcal{D}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (11)$$

"Drehung" ${}^{D'}\Lambda$ Standard-LT ${}^{st}\Lambda$ "Drehung" ${}^{D}\Lambda$

Allgemeine LT ("eigentliche"+))

zusätzlich raum-zeitliche Translationen

+) d.h. ohne Spiegelungen

Beachte:

1) $c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$

gilt bei beliebiger homogener LT,

nicht aber bei inhomogener LT

2) $\boxed{c^2dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$

gilt bei beliebiger LT (ebenso für endliche Differenzen $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z$)

VII. 2. Vierertensoren

VII. 2. A. Raum-Zeit (Minkowskiwelt)

Minkowski 1908

Vierdimensionaler Raum, dessen "Punkte" durch die denkbaren Ereignisse E gegeben sind ("Weltpunkte").

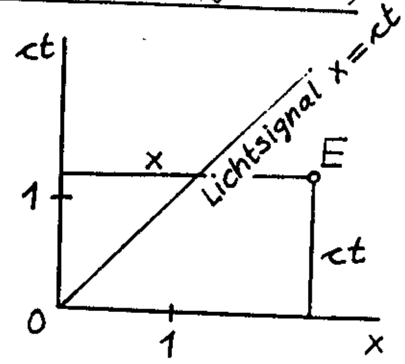
Definiert man auf diesem Raum Tensoren und Tensorfelder, so stellen Beziehungen zwischen solchen "Vierertensoren" per constructionem gegenüber Bezugssystem=Wechsel forminvariante (kovariante) Aussagen dar.

Dem Relativitätsprinzip kann man daher dadurch Rechnung tragen, daß man Naturgesetze als Vierertensorgleichungen formuliert.

Geometrische Veranschaulichung der Standard-LT (Minkowskidiagramm)

1. Schritt: ct- und x-Achse willkürlich senkrecht gezeichnet (Konvention)

E: S: (ct, x)



Frage: Lage der ct′- und x′-Achse in diesem Diagramm?

2. Schritt:

x′-Achse: $ct' = 0$

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) = 0 \implies \underline{ct = \beta x}$$

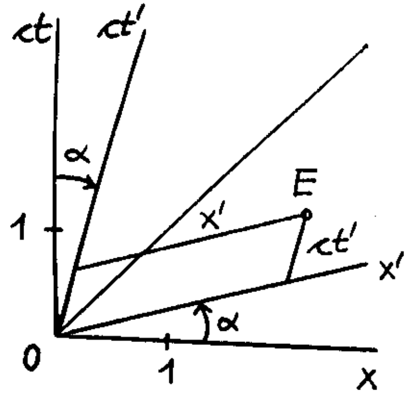
ct′-Achse: $x' = 0$

$$x' = \gamma(x - vt) = 0 \implies \underline{ct = \frac{1}{\beta} x}$$

bzw. $x = \beta ct$

$$\underline{\alpha = \arctan \beta < \frac{\pi}{4}}$$

da $\beta < 1$



E: S′: (ct', x')

Frage: Einheiten auf der ct′- und x′-Achse?

3. Schritt: Eichkurven für Ort und Zeit

$$c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2 \quad \text{für Standard-LT}$$

Einheit auf der positiven x′-Achse: $x' = 1$, $ct' = 0$

$\implies$ Schnitt des Hyperbelastes

$\underline{x^2 - c^2t^2 = 1}$, $x > 0$ Eichkurve für Ort

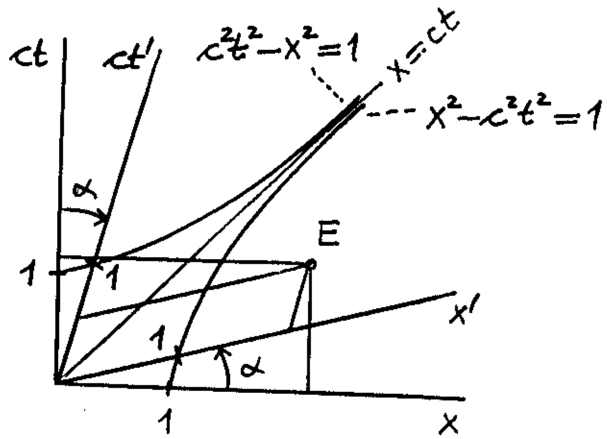
mit der x′-Achse

Einheit auf der positiven ct′-Achse: $ct' = 1$, $x' = 0$

$\implies$ Schnitt des Hyperbelastes

$\underline{c^2t^2 - x^2 = 1}$, $ct > 0$ Eichkurve für Zeit

mit der ct′-Achse



Invariante Bereiche der Raum-Zeit in bezug auf ein festes Ereignis, hier: O

Nur homogene LT betrachtet, somit

O: $S: (0,0,0,0)$
$S': (0,0,0,0)$
$\vdots$

und

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$
$$= c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$
$$= \ldots = \text{L-Invariante}$$

Man sagt: Das Ereignis E: $S: (ct, x, y, z)$
$S': (ct', x', y', z')$
$\vdots$

liegt bzgl. O

raumartig, falls $s^2 < 0$
lichtartig, falls $s^2 = 0$
zeitartig, falls $s^2 > 0$
und zwar
in der Zukunft, falls $ct > 0$ $(\Rightarrow ct' > 0, \ldots)$
in der Vergangenheit, falls $ct < 0$ $(\Rightarrow ct' < 0, \ldots)$

Durch diese Klassifizierung zerfällt die Raum-Zeit bzgl. des festen Ereignisses (hier: O) in vier invariante Bereiche:

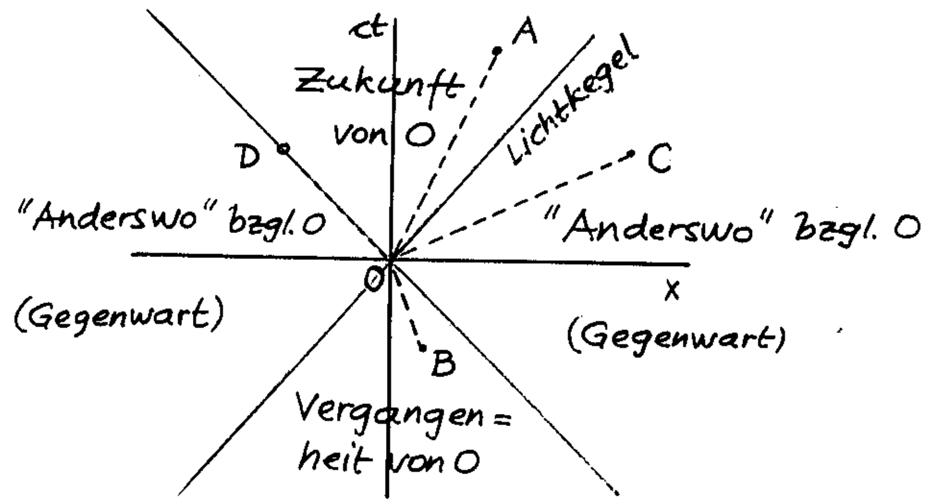
1) den Lichtkegel (3-dim. Hyperkegelfläche) $s^2 = 0$

2) die Zukunft $s^2 > 0$, $ct > 0$

3) die Vergangenheit $s^2 > 0$, $ct < 0$

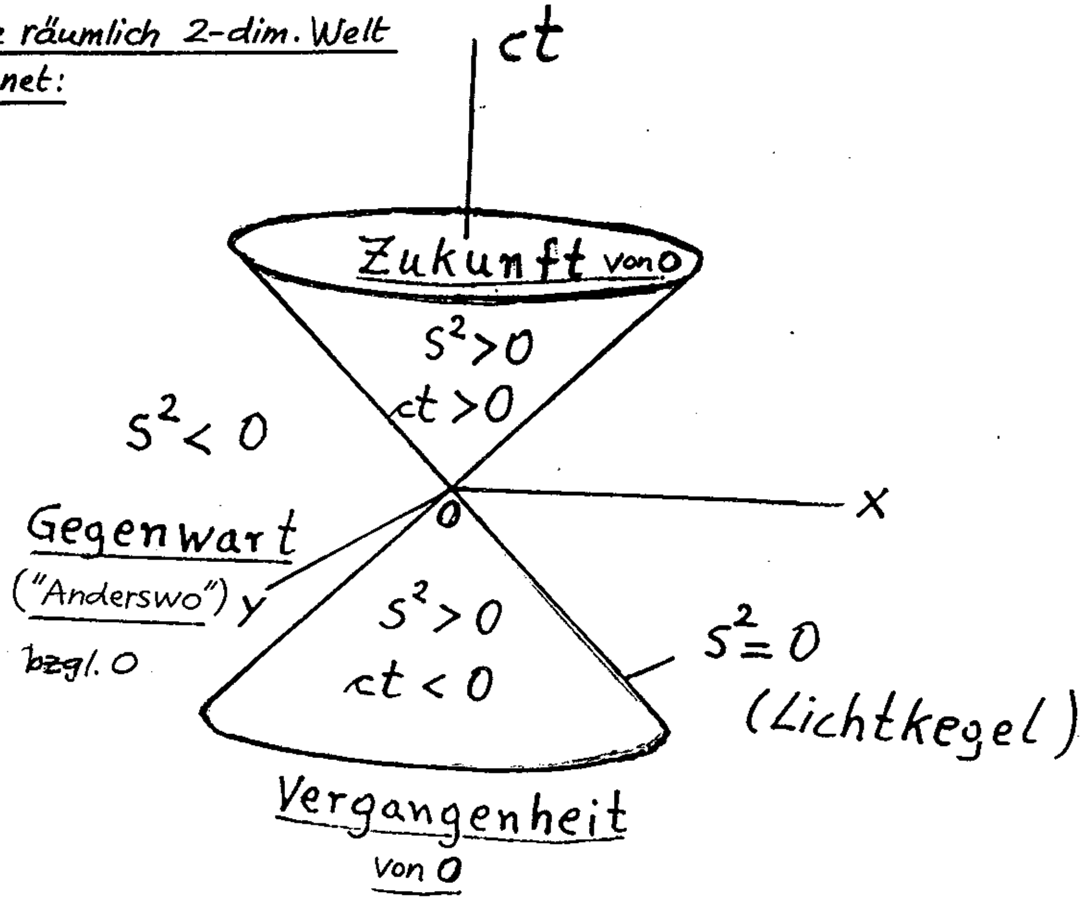
4) die Gegenwart (besser: das "Anderswo"+)) $s^2 < 0$

Für eine räumlich 1-dim. Welt gezeichnet:

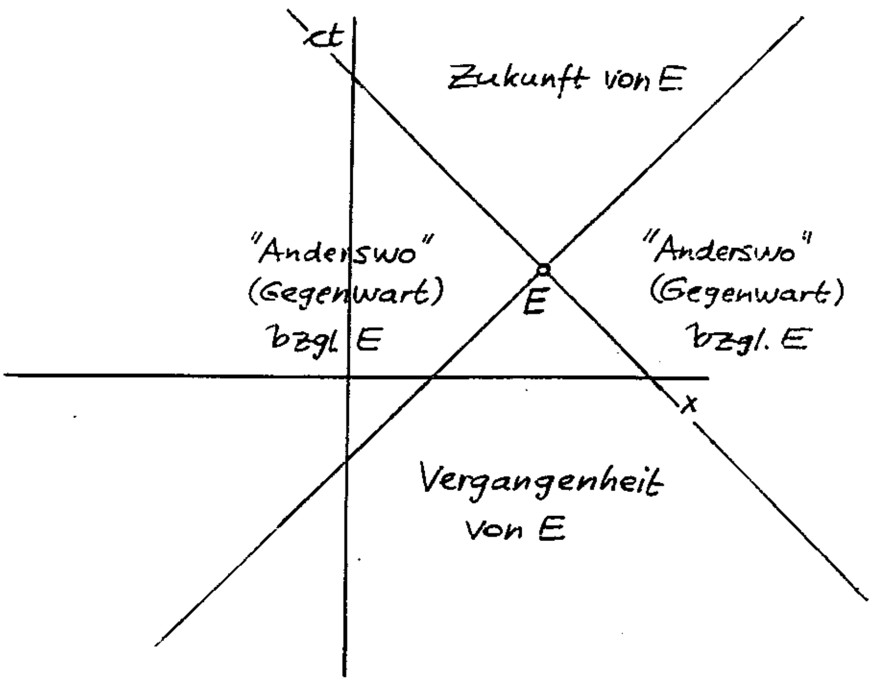


+) engl.: "elsewhere"

Für eine räumlich 2-dim. Welt gezeichnet:



Invariante Bereiche der Raum-Zeit bzgl. E

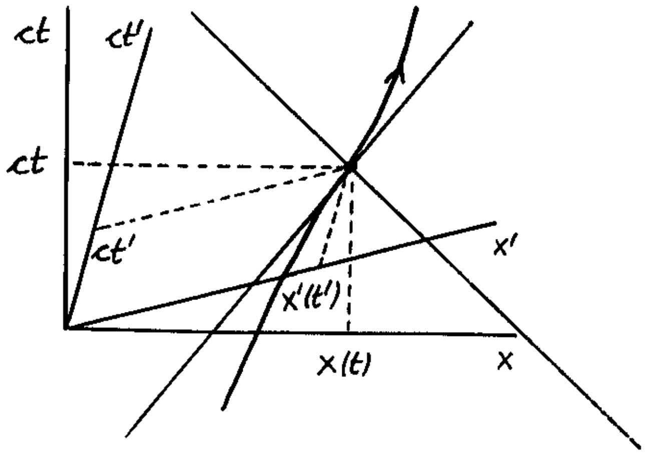


Weltlinie eines Teilchens

"Lebensgeschichte" eines Teilchens = einparametrige Schar von Ereignissen

$E: \quad S: \ (ct, x(t), y(t), z(t))$

$\qquad S': \ (ct', x'(t'), y'(t'), z'(t'))$



VII.2.B. Längenkontraktion, Zeitdilatation

Definition: Länge eines Stabes in einem Inertialsystem = räumlicher Abstand von Stabanfang und Stabende – und zwar einer bzgl. dieses Inertialsystems gleichzeitigen Lage von Stabanfang und Stabende – gemessen in diesem Inertialsystem.

"Maßstab" = Stab, welcher seine Länge im Lauf der Zeit nicht merklich ändert

Längenkontraktion (Lorentzkontraktion) von Maßstäben

Standard-LT für Ereignispaare E_1, E_2 ($\Delta x := x_2 - x_1$ usf.)

$$c\Delta t' = \gamma(v)\left(c\Delta t - \frac{v}{c}\Delta x\right)$$
$$\Delta x' = \gamma(v)\left(\Delta x - v\Delta t\right) \qquad (\bullet)$$

bzw.

$$c\Delta t = \gamma(v)\left(c\Delta t' + \frac{v}{c}\Delta x'\right)$$
$$\Delta x = \gamma(v)\left(\Delta x' + v\Delta t'\right) \qquad (*)$$

1) Maßstab ruht in S

$\Delta x = L_0$ Ruhlänge, Δt beliebig

$$(*) \quad L' = \Delta x'\Big|_{\Delta t'=0} = \frac{\Delta x}{\gamma(v)} = \frac{L_0}{\gamma(v)} < L_0 \qquad (17)$$

2) Maßstab ruht in S'

$\Delta x' = L_0$ Ruhlänge, $\Delta t'$ beliebig

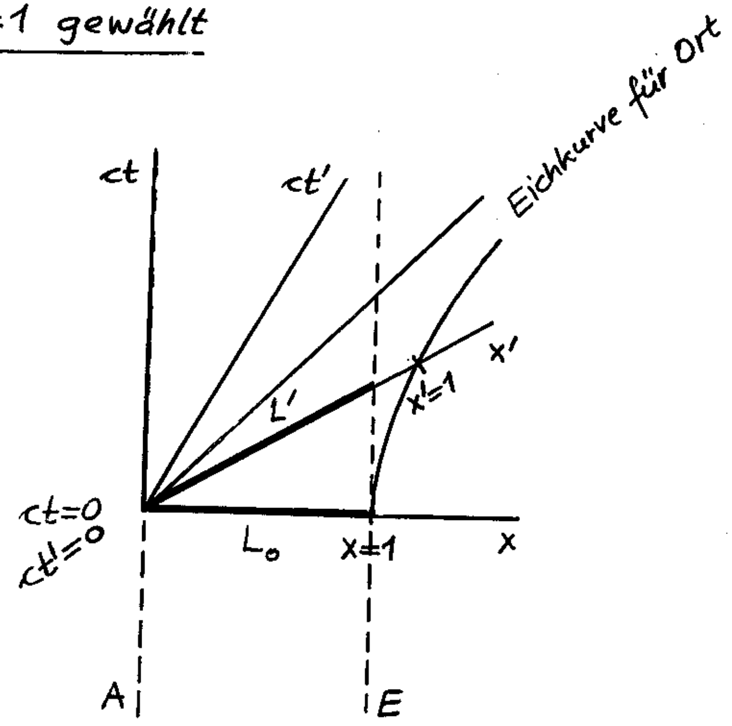
$$(\bullet) \quad L = \Delta x\Big|_{\Delta t=0} = \frac{\Delta x'}{\gamma(v)} = \frac{L_0}{\gamma(v)} < L_0$$

Bemerkung: Bei schlampiger Schreibweise in ↑—↑ scheinbarer Widerspruch!

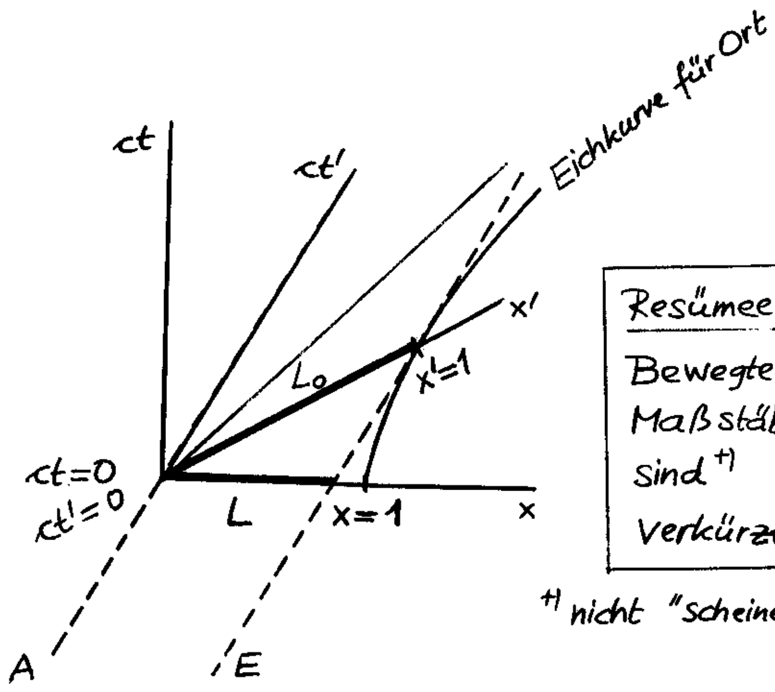
Minkowskidiagramme

$L_0 = 1$ gewählt

zu 1)



zu 2)



Resümee:
Bewegte Maßstäbe sind [+] verkürzt.

[+] nicht "scheinen"!

Zeitdilatation für unbeschleunigt bewegte Uhren

Standard-LT für Ereignispaare

$$c\Delta t' = \gamma(v)\left(c\Delta t - \frac{v}{c}\Delta x\right) \qquad (\bullet)$$
$$\Delta x' = \gamma(v)\left(\Delta x - v\Delta t\right)$$

bzw.

$$c\Delta t = \gamma(v)\left(c\Delta t' + \frac{v}{c}\Delta x'\right) \qquad (*)$$
$$\Delta x = \gamma(v)\left(\Delta x' + v\Delta t'\right)$$

1) Uhr ruht in S

$\Delta t = \Delta\tau$ Eigenzeitintervall der Uhr

$\Delta x = 0$

Zeitintervall $\Delta T'$, um das die Uhren von S' Vorrücken, während die in S ruhende (relativ zu S' mit der Geschwindigkeit v in negativer x'-Richtung bewegte) Uhr um $\Delta\tau$ vorrückt:

$$(\bullet) \quad \Delta T' = \Delta t'\Big|_{\Delta x = 0} = \gamma(v)\Delta t = \gamma(v)\Delta\tau$$

$$\Delta\tau = \frac{\Delta T'}{\gamma(v)}$$

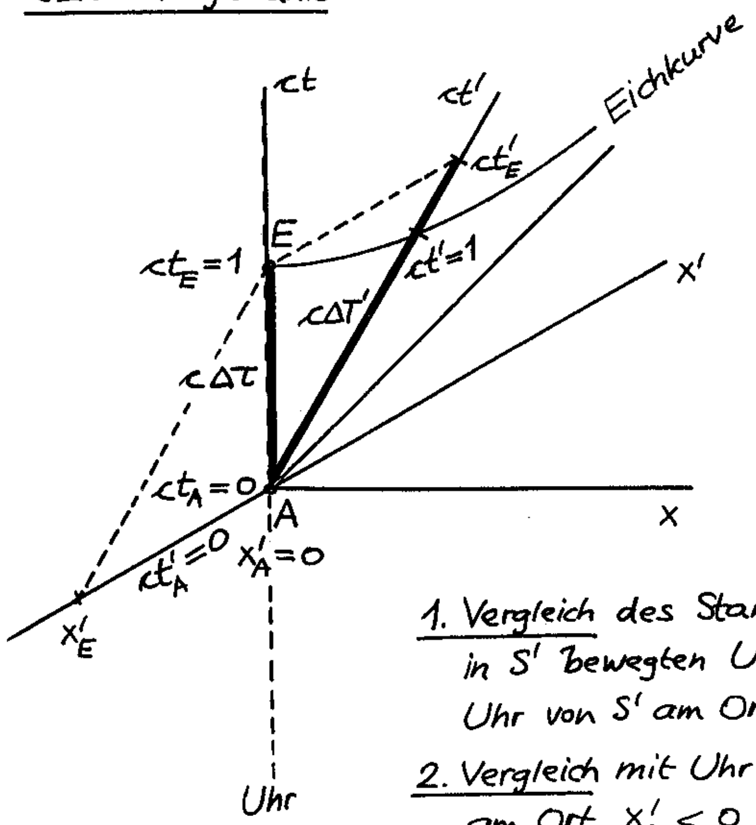
Beachte: $\Delta\tau$ wird aus zwei Ablesungen an derselben Uhr (der in S ruhenden Uhr) bestimmt, $\Delta T'$ wird aber aus

Ablesungen an zwei verschiedenen Uhren von S' bestimmt, welche allerdings untereinander synchronisiert sind.

Messung der Zeitdilatation durch Vergleich von nur zwei Uhren ist nur möglich, wenn mindest eine von ihnen beschleunigt bewegt ist (Trennung und Wiederzusammenkommen von Uhren; Zwillingsproblem s. Abschnitt VII.2.D).

Minkowskidiagramm

$c\Delta\tau = 1$ gewählt



1. Vergleich des Standes der in S' bewegten Uhr mit Uhr von S' am Ort $x'_A = 0$,
2. Vergleich mit Uhr von S' am Ort $x'_E < 0$

2) Uhr ruht in S'

$\Delta t' = \Delta\tau$ Eigenzeitintervall der Uhr

$\Delta x' = 0$

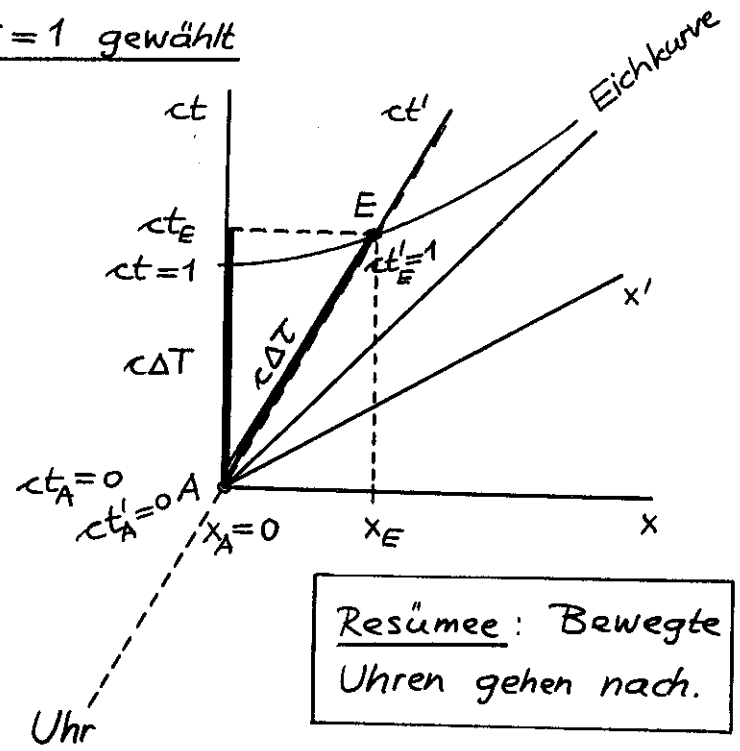
$$c\Delta t = \gamma(v)\left(c\Delta t' + \frac{v}{c}\Delta x'\right) \qquad (*)$$

$$(*) \quad \Delta T = \Delta t\Big|_{\Delta x'=0} = \gamma(v)\Delta t' = \gamma(v)\Delta\tau$$

$$\Delta\tau = \frac{\Delta T}{\gamma(v)} \tag{19}$$

Minkowskidiagramm

$c\Delta\tau = 1$ gewählt



Resümee: Bewegte Uhren gehen nach.

VII. 2. C. Vierertensoren. Metrik

Koordinaten im Minkowskiraum

= Zeit-Orts-Koordinaten der Ereignisse bzgl. S:

$$(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \tag{21b}$$

oder bzgl. S':

$$(x'^\mu) = (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) = (ct', x', y', z')$$

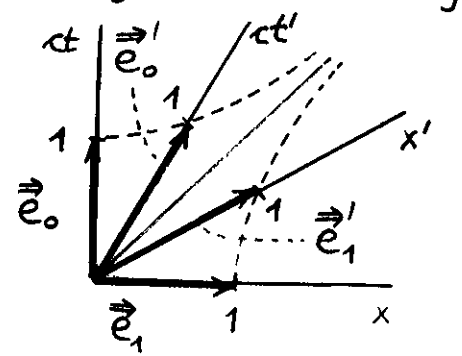
etc.

Kovariantes Basissystem bzgl. S bzw. S'

$\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, $\vec{e}_\mu$ Verschiebung

in Richtung der Koordinatenachse μ mit wachsendem x^μ um die Einheit

analog bei Verwendung der Koordinaten x'^μ



Beachte: Inneres Produkt von Vektoren noch nicht definiert!

Ortsvektor im Minkowskiraum

E: S: (x^μ), S': (x'^μ) $\Big\}$ allgemeine homogene LT:

$$\boxed{x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha x^\alpha} \tag{32}$$

Bemerkung: Wir betrachten nur homogene LT.

In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \Lambda^3{}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda \equiv (\Lambda^\mu{}_\alpha)$$ Transformationsmatrix (kein Tensor!)

1. Index = Zeilenindex

z.B. Standard-LT

$$^{st}\Lambda \equiv (^{st}\Lambda^\mu{}_\alpha) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{33}$$

$$\vec{x} = x^\mu \vec{e}_\mu = x'^\mu \vec{e}\,'_\mu \tag{21a}$$

Bemerkung: Daraus folgt: $\vec{e}_\mu = \Lambda^\alpha{}_\mu \vec{e}\,'_\alpha$

Empfehlung: Schreibe zu den bisherigen und folgenden Beziehungen die jeweils analogen Beziehungen der kartesischen Tensorrechnung im 3dim. Euklidischen Raum an.

Koo bzgl. K: $(x_i) = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$

bzgl. K': $(x_i') = (x_1', x_2', x_3') = (x', y', z')$

Koo-Transformation: Drehung

$$x_i' = \mathcal{D}_{ij}\, x_j$$

Basissysteme für K und K':

K: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} = \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$

K': analog

Ortsvektor: $\vec{r} = x_i \vec{e}_i = x_i' \vec{e}_i'$

Vektor (Tensor 1. Stufe): $\vec{r}$ Prototyp

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{a} = a_i \vec{e}_i \quad \text{Vektor, falls} \\ a_i' = \mathcal{D}_{ij}\, a_j \end{array}}$$

Fundamentale Invariante und metrische Fundamentalform:

$$\boxed{\begin{array}{l} \ell^2 := x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \text{drehinvariant} \\ d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \end{array}}$$

ℓ^2 als $\vec{r} \cdot \vec{r}$ interpretiert, inneres Produkt, Metriktensor usf.

Warum braucht man hierbei keine "oberen" und "unteren" Indices?

Vierervektoren (Vierertensoren 1. Stufe)

$\vec{x}$ Prototyp für Vierervektor

$\boxed{\vec{a} = a^\mu \vec{e}_\mu}$ stellt einen Vierervektor dar,
falls bei LT (Bezugssystemwechsel)
$\boxed{a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha a^\alpha}$ gilt.

Es gilt dann

$$\vec{a} = a^\mu \vec{e}_\mu = a'^\mu \vec{e}\,'_\mu \qquad (20)$$

(a^μ), (a'^μ) kontravariante Komponenten von $\vec{a}$ bzgl. S bzw. S'

Bemerkung 1: Analog Vierervektorfeld, falls
$a^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$, $a'^\mu(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$.

Bemerkung 2: Zeit-Orts-Koordinaten (x^μ)
daher kontravariante Komponenten von $\vec{x}$ bzgl. S.

Inneres Produkt von Vierervektoren.

Metrik im Minkowskiraum

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$
$$= (x'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2 = L\text{-Inv.},$$
deshalb als $\vec{x}\cdot\vec{x}$ interpretiert

$$\vec{x}\cdot\vec{x} = x^\mu x^\nu \boxed{\underbrace{\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu}_{=:\, g_{\mu\nu}}} = x'^\mu x'^\nu \underbrace{\vec{e}\,'_\mu \cdot \vec{e}\,'_\nu}_{g'_{\mu\nu}}$$

$$= s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$
$$= (x'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2$$

$$\Longrightarrow \quad (g_{\mu\nu}) = (g'_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}\,(1,-1,-1,-1) \qquad (24)$$

$g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu}$ Metrikelemente
(kovariante Komponenten des Metriktensors; s. später)

$d\vec{x}$ infinitesimaler Verschiebungsvektor

$$\boxed{d\vec{x}\cdot d\vec{x} = ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

metrische Fundamentalform des Minkowskiraumes

Minkowskiraum = "pseudoeuklidischer" Raum

kein echter metrischer Raum, da

1) ds^2 nicht ≥ 0
2) $ds^2 = 0$ auch für $d\vec{x} \neq \vec{0}$ möglich

Inneres Produkt von Vierervektoren

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a^\mu b^\nu\, \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu \qquad (22)$$

L–Invariante (bzw. Viererskalarfeld falls $\vec{a}, \vec{b}$ Vierervektorfelder)

Duale (reziproke) Basissysteme

Definition: kontravariantes Basissystem $\{\vec{e}^{\,0}, \vec{e}^{\,1}, \vec{e}^{\,2}, \vec{e}^{\,3}\}$ bzgl. S:

$$\boxed{\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}^{\,\alpha} = \delta^\alpha_\mu} \quad \text{(definiert die } \vec{e}^{\,\alpha}) \qquad (26)$$

Kroneckerdeltas

Mit $\vec{e}^{\,\alpha} = g^{\alpha\nu}\vec{e}_\nu$ (definiert die $g^{\alpha\nu}$) (28)

folgt $\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}^{\,\alpha} = g^{\alpha\nu} g_{\mu\nu} = \delta^\alpha_\mu$

Matrix

$$\Rightarrow \quad (g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}\,(1,-1,-1,-1) \equiv g$$

$g^{\mu\nu}$ (kontravariante Komponenten des Metriktensors s. später)

$\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ und $\{\vec{e}^{\,0}, \vec{e}^{\,1}, \vec{e}^{\,2}, \vec{e}^{\,3}\}$ nennt man zueinander dual (reziprok)

$$\boxed{\vec{e}^{\,\alpha}\cdot\vec{e}^{\,\beta} = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}\, \underbrace{\underbrace{\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu}_{g_{\mu\nu}}}_{\delta^\beta_\mu} = g^{\alpha\beta}}$$

$$\vec{a} = a^\mu \vec{e}_\mu = a_\alpha \vec{e}^{\,\alpha} \qquad (27)$$

(a_α) kovariante Komponenten von $\vec{a}$ bzgl. S

mit

$$a_\alpha = g_{\alpha\mu} a^\mu \;, \quad a^\mu = g^{\mu\alpha} a_\alpha \qquad (30)$$

Index "hinunterziehen" "hinaufziehen"

$$\Rightarrow \quad a_0 = a^0,\; a_1 = -a^1,\; a_2 = -a^2,\; a_3 = -a^3$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a_\nu b^\nu = a^\mu b_\mu$$
$$= g^{\alpha\beta} a_\alpha b_\beta \qquad (31)$$

LT der kovarianten Vierervektorkomponenten

kontravariante Komponenten:

$$a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha a^\alpha$$

$$(\Lambda^\mu{}_\alpha) \equiv \Lambda \quad \text{(Matrix)}$$

kovariante Komponenten:

$$a'_\alpha = \underbrace{g'_{\alpha\mu}}_{g_{\alpha\mu}} \underline{a'^\mu} = g_{\alpha\mu} \Lambda^\mu{}_\sigma \underbrace{a^\sigma}_{=\, g^{\sigma\nu} a_\nu} = \underbrace{g_{\alpha\mu} \Lambda^\mu{}_\sigma g^{\sigma\nu}}_{=:\, \Lambda_\alpha{}^\nu} a_\nu$$

Zeilenindex bei Matrix-Schreibweise; $(\Lambda_\alpha{}^\nu) \equiv \Sigma$ bezeichnet (Matrix)

$$\boxed{\begin{aligned} a'^\mu &= \Lambda^\mu{}_\alpha a^\alpha \\ a'_\mu &= \Lambda_\mu{}^\alpha a_\alpha \end{aligned}} \quad (34)$$

mit

$$\Lambda_\alpha{}^\nu = g_{\alpha\mu} \Lambda^\mu{}_\sigma g^{\sigma\nu} \longleftrightarrow \Sigma = g \Lambda g$$

(Matrizenmultiplikation)

Speziell: Standard-LT

$$\left({}^{st}\Lambda^\mu{}_\alpha\right) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv {}^{st}\Lambda$$

$$\left({}^{st}\Lambda_\mu{}^\alpha\right) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv {}^{st}\Sigma$$

Allgemein: $\Sigma^T = \Lambda^{-1}$. Zeige dies mit Hilfe von

$a_\alpha b^\alpha = a'_\mu a'^\mu$ und den Transformationsgesetzen für a'_μ und a'^μ selbst!

Vierertensoren 2. Stufe

$\vec{a} \circ \vec{b}$ Prototyp für Vierertensor 2. Stufe

$$\underline{\vec{a}} \circ \underline{\vec{b}} = \underline{a^\mu}\, \underline{b^\nu}\, \underline{\vec{e}_\mu} \circ \underline{\vec{e}_\nu} = \underline{a^\mu}\, \underline{b_\beta}\, \underline{\vec{e}_\mu} \circ \underline{\vec{e}^\beta}$$

$$= \underline{a_\alpha}\, \underline{b^\nu}\, \underline{\vec{e}^\alpha} \circ \underline{\vec{e}_\nu} = \underline{a_\alpha}\, \underline{b_\beta}\, \underline{\vec{e}^\alpha} \circ \underline{\vec{e}^\beta}$$

$$\overleftrightarrow{t} = t^{\mu\nu}\, \vec{e}_\mu \circ \vec{e}_\nu = t^\mu{}_\beta\, \vec{e}_\mu \circ \vec{e}^\beta$$

$$= t_\alpha{}^\nu\, \vec{e}^\alpha \circ \vec{e}_\nu = t_{\alpha\beta}\, \vec{e}^\alpha \circ \vec{e}^\beta$$

$(t^{\mu\nu})$ kontravariante
$(t^\mu{}_\beta)$, $(t_\alpha{}^\nu)$ gemischte
$(t_{\alpha\beta})$ kovariante

} Komponenten von $\overleftrightarrow{t}$ bzgl. S

$$\underline{t^\mu{}_\beta = g_{\beta\nu}\, t^{\mu\nu}}, \quad \underline{t^{\mu\nu} = g^{\nu\beta}\, t^\mu{}_\beta}$$

$$\underline{t_{\alpha\beta} = g_{\alpha\mu}\, g_{\beta\nu}\, t^{\mu\nu}} \quad \text{usf.}$$

LT

$$\boxed{\begin{aligned} t'^{\mu\nu} &= \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta\, t^{\alpha\beta} \\ t'^\mu{}_\nu &= \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda_\nu{}^\beta\, t^\alpha{}_\beta, \quad t'_\mu{}^\nu \text{ analog} \\ t'_{\mu\nu} &= \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta\, t_{\alpha\beta} \end{aligned}}$$

(34)

Bei Feldern: Argumente!

Metriktensor

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} &= a_\alpha \vec{e}^{\,\alpha} = a'_\mu \vec{e}^{\,\prime\mu} \\ a'_\mu &= \Lambda_\mu{}^\alpha a_\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Transformation der kontravar. Basis}$$

$\Rightarrow$ Transformation von $g^{\alpha\beta} = \vec{e}^{\,\alpha} \cdot \vec{e}^{\,\beta}$ und Berücksichtigung von $\Sigma^T = \Lambda^{-1}$ gibt

$$\underline{g'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \, g^{\alpha\beta}} \qquad \underline{\text{Tensor}}$$

$$\left.\begin{aligned} \underbrace{g^\mu{}_\beta}_{t^\mu{}_\beta} &= g_{\beta\nu} \underbrace{g^{\mu\nu}}_{t^{\mu\nu}} = \delta^\mu_\beta \\ \underbrace{g_\alpha{}^\nu}_{t_\alpha{}^\nu} &= g_{\alpha\mu} \underbrace{g^{\mu\nu}}_{t^{\mu\nu}} = \delta^\nu_\alpha \end{aligned}\right\} \; g^\mu{}_\nu = g_\nu{}^\mu \Rightarrow g^\mu_\nu \text{ geschrieben}$$

$$\boxed{\begin{aligned} (g^{\mu\nu}) &= (g'^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu}) = (g'_{\mu\nu}) \\ &= \mathrm{diag}\,(1,-1,-1,-1) \\ (g^\mu_\nu) &= (g'^\mu_\nu) = \mathrm{diag}\,(1,1,1,1) \end{aligned}} \qquad (29)$$

VII. 2. D. Eigenzeit, Vierergeschwindigkeit und Viererbeschleunigung eines Teilchens

$$\underline{ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = \text{L-Invariante}}$$

für beliebige raum-zeitlich infinitesimal benachbarte Ereignisse:

$ds^2 \gtreqless 0$ (zeitartiger, lichtartiger, raumartiger Abstand)

Speziell: Ereignisse (beschrieben in S): bewegtes Teilchen ist zum Zeitpunkt t am Ort $x(t), y(t), z(t)$ und ist zum Zeitpunkt $t + dt$ am Ort $x(t) + u_x(t)\,dt$, $y(t) + u_y(t)\,dt$, $z(t) + u_z(t)\,dt$ betrachtet, mit

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{u}(t) &= (u_x(t), u_y(t), u_z(t)) \\ &= \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}\right) \end{aligned}} \qquad (37)$$

$\vec{u}(t)$ Teilchengeschwindigkeit = "Dreiergeschwindigkeit"

Dann gilt:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$$= c^2 dt^2 \left(1 - \frac{u^2(t)}{c^2}\right) > 0 \quad , \ \forall t$$

Definition 1: Eigenzeit "des Teilchens"

Eigenzeitdifferential:

$$\boxed{\begin{aligned} d\tau &= \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{u^2(t)}{c^2}}\, dt \\ &= \sqrt{1 - \frac{u'^2(t')}{c^2}}\, dt' = L\text{-Invariante} \end{aligned}} \qquad (37)$$

Eigenzeit "des Teilchens" = Eigenzeit einer mit dem Teilchen mitgeführten Standarduhr (beschleunigungsunempfindlichen Uhr)

Bemerkung: $\tilde{S}_t$ momentanes inertiales Ruhesystem des Teilchens (der mitgeführten Standarduhr): $\tilde{u}(\tilde{t}) = 0$ ($\tilde{a}(\tilde{t})$ i.a. $\neq 0$)

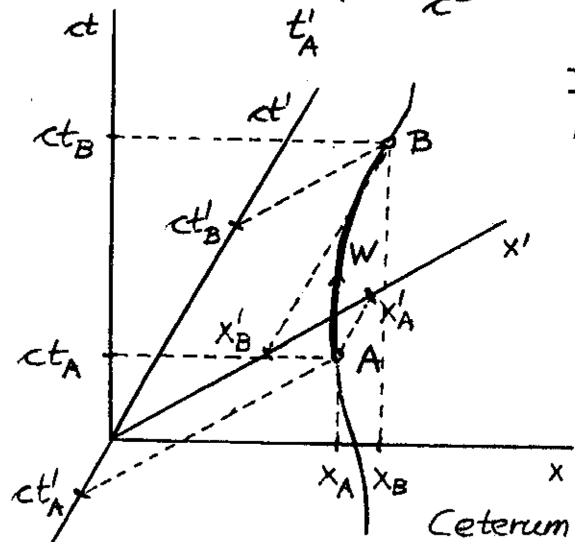
$$d\tau = d\tilde{t} \ .$$

Eigenzeitintervall zwischen zwei Ereignissen A, B längs eines gegebenen Weltlinien-Stückes W

$$\Delta\tau^W_{AB} = \oint\!\!\!\!\!\!\; \int_A^B d\tau = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{1 - \frac{u^2(t)}{c^2}}\, dt \underset{(=)}{<} t_B - t_A$$

Zeitdilatation für ... beliebig bewegte Uhren (36)

$$= \int_{t'_A}^{t'_B} \sqrt{1 - \frac{u'^2(t')}{c^2}}\, dt' \underset{(=)}{<} t'_B - t'_A$$



Im Diagramm illustriert für geradlinige Bewegung in x- (x'-) Richtung und Systeme in Standardkonf.

Zwei Ablesungen der "betrachteten" Uhr verglichen mit (i.a.) zwei Uhren von S, zwei Uhren von S' ...

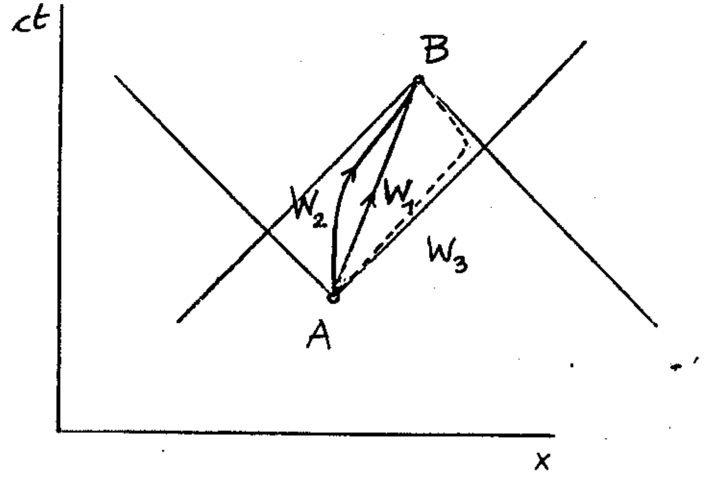
Ceterum censeo:

"Bewegte Uhren gehen nach ..."

Hier auch für beschleunigt bewegte Uhren gezeigt.

Zeitdilatation zwischen zwei Uhren, die sich trennen und wieder zusammenkommen

"Zwillingsproblem"



$$\Delta\tau_{AB}^{W_3} < \boxed{\Delta\tau_{AB}^{W_2} < \Delta\tau_{AB}^{W_1}}$$

$\downarrow$

0

Experimentell vielfach verifiziert! *)

Bemerkung: Für Photonen gibt es keine Eigenzeit: $ds^2 = 0$.

---

*) s.z.B. "Maryland-Experiment" Ergänzungsblätter zum VO-Skriptum Blatt VII-12'

Definition 2: Vierergeschwindigkeit des Teilchens

Verwendung der L-invarianten Eigenzeit des Teilchens als Bahnparameter ($\tau \leftrightarrow t$, $\tau \leftrightarrow t'$, ...)

$$\vec{\vec{u}}(\tau) := \frac{d\vec{\vec{x}}(\tau)}{d\tau} \tag{38}$$

kontravariante Komponenten bzgl. S

$$u^\nu = \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{dx^\nu}{dt}\,\frac{dt}{d\tau}$$

$$(x^\nu(\tau)) = (ct, x(t), y(t), z(t)) \qquad \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2(t)}{c^2}}} = \gamma(u(t))$$

$\nu = 0 : c$

$\nu = 1 : u_x$

$\vdots$

$$\begin{aligned}(u^\nu) &= (u^0, u^1, u^2, u^3) \\ &= \gamma(u(t))\,(c, u_x(t), u_y(t), u_z(t)) \\ &\equiv \gamma(u(t))\,(c, \vec{u}(t))\end{aligned} \tag{39}$$

Bemerkung: u^0 enthält nur redundante Information!

S:

$(u^\nu) = \gamma(u)\,(c, \vec{u})$

$(u_\nu) = \gamma(u)\,(c, -\vec{u})$

$\tilde{S}_t$:

$(\tilde{u}^\nu) = (c, \vec{0}) = (\tilde{u}_\nu)$

$$\underline{\underline{\vec{\vec{u}}(\tau)\cdot\vec{\vec{u}}(\tau)}} = u^\nu u_\nu = \tilde{u}^\nu \tilde{u}_\nu \underline{\underline{= c^2 > 0}}\ , \quad \forall\tau$$

$\vec{\vec{u}}(\tau)$ "zeitartig"

Definition 3: Viererbeschleunigung des Teilchens

$$\vec{\vec{a}}(\tau) := \frac{d\vec{\vec{u}}(\tau)}{d\tau} = \frac{d^2\vec{\vec{x}}(\tau)}{d\tau^2} \qquad (40)$$

kontravariante Komponenten bzgl. S

$$a^\nu = \frac{du^\nu}{d\tau} = \ldots \text{ (selbst berechnen)}$$

$$(a^\nu) = \gamma^2(u)\left(\gamma^2(u)\,\frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{c}\,,\ \vec{a} + \gamma^2(u)\,\frac{(\vec{u}\cdot\vec{a})\vec{u}}{c^2}\right)$$

$(\tilde{a}^\nu) = (0, \vec{\tilde{a}})\ ,\quad (\tilde{a}_\nu) = (0, -\vec{\tilde{a}})$

$$\underline{\underline{\vec{\vec{a}}(\tau)\cdot\vec{\vec{a}}(\tau)}} = a^\nu a_\nu = \tilde{a}^\nu \tilde{a}_\nu \underline{\underline{= -\vec{\tilde{a}}^2 < 0}}$$

$\vec{\vec{a}}(\tau)$ "raumartig"

Es gilt:

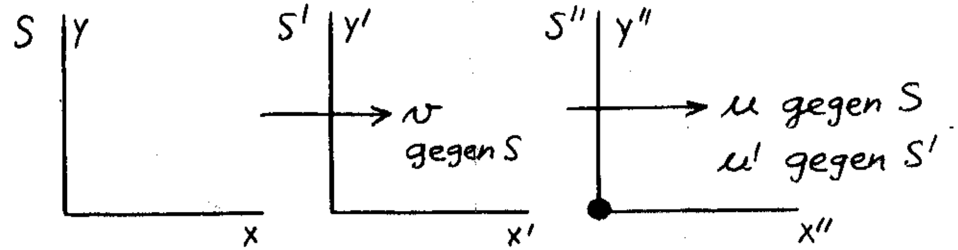
$$\underline{\underline{\vec{\vec{a}}(\tau)\cdot\vec{\vec{u}}(\tau)}} = a^\nu u_\nu = \tilde{a}^\nu \tilde{u}_\nu \underline{\underline{= 0}}\ , \quad \forall\tau \qquad (41)$$

Brauchen wir später ...

VII.3. LT der Teilchengeschwindigkeit

("relativistische Addition" von Geschwindigkeiten)

VII.3.A. Ableitung für gleichgerichtete konstante Geschwindigkeiten aus Gruppeneigenschaft der Standard-LT



Galilei: $u = u' + v$

u muß zeitlich Konstant sein!

Standard-LT der Zeit-Orts-Koordinaten: $\Lambda \equiv {}^{st}\Lambda$

$$X''^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha(u')\,\underbrace{X'^\alpha}_{\Lambda^\alpha{}_\nu(v)X^\nu} = \underline{\underline{\Lambda^\mu{}_\alpha(u')\,\Lambda^\alpha{}_\nu(v)\,X^\nu}}$$

$$\underline{\underline{= \Lambda^\mu{}_\nu(u)\,X^\nu}}\ , \quad \underline{\forall X^0, X^1, X^2, X^3} \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\Lambda^\mu{}_\alpha(u')\,\Lambda^\alpha{}_\nu(v) = \Lambda^\mu{}_\nu(u)} \qquad (42)$$

Z S   Z S   Z S

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \gamma(u') & -\beta(u')\gamma(u') & 0 & 0 \\ -\beta(u')\gamma(u') & \gamma(u') & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\begin{array}{cc|cc} \gamma(v) & -\beta(v)\gamma(v) & 0 & 0 \\ -\beta(v)\gamma(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} \gamma(u) & -\beta(u)\gamma(u) & 0 & 0 \\ -\beta(u)\gamma(u) & \gamma(u) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\vdots$ s. Skriptum

Einstein: $u' \oplus v = \dfrac{u'+v}{1+\frac{vu'}{c^2}}$

$$\boxed{u = \frac{u'+v}{1+\frac{vu'}{c^2}} \quad , \quad u' = \frac{u-v}{1-\frac{vu}{c^2}}} \qquad (44)$$

"Reziprozität"

v fest ($<c$)

$$u' \uparrow c \iff u \uparrow c$$

Bemerkung: Transformation $u \to u'$ ("Dreiergeschwindigkeit") nicht linear, Transformation $(u^\nu) \to (u'^\nu)$ linear!

VII.3.B*. Transformation der Teilchengeschwindigkeit bei beliebiger Teilchenbewegung für Systeme in Standardkonfiguration mit Hilfe der Vierergeschwindigkeit

Standard-LT der Vierergeschwindigkeit

$$u'^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha u^\alpha \quad \text{mit} \quad \Lambda \equiv {}^{st}\Lambda$$

mit
$$\left.\begin{aligned} (u^\mu) &= \gamma(u)\,(c, \vec{u}) \\ (u'^\mu) &= \gamma(u')\,(c, \vec{u}') \end{aligned}\right\} \text{Hier kann } \vec{u}(t), \vec{u}'(t) \text{ sein!}$$

$$u'^0 = \gamma(v)\left(u^0 - \frac{v}{c}u^1\right) \qquad \underline{0}$$

$$u'^1 = \gamma(v)\left(u^1 - \frac{v}{c}u^0\right) \qquad \underline{1}$$

$$u'^2 = u^2 \qquad \underline{2}$$

$$u'^3 = u^3 \qquad \underline{3}$$

lineare Transformation

$\underline{0}$: $\gamma(u')c = \gamma(v)\gamma(u)\left(c - \frac{v}{c}u_x\right)$

"Reziprozität"
$$\boxed{\begin{aligned} \gamma(u') &= \gamma(v)\gamma(u)\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right) \\ \gamma(u) &= \gamma(v)\gamma(u')\left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right) \end{aligned}} \qquad (49)$$

$$(u^\mu) = \gamma(u)\,(c, \vec{u})\,,\quad (u'^\mu) = \gamma(u')\,(c, \vec{u}')$$

$$\gamma(u') = \gamma(v)\,\gamma(u)\left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)$$

$$u'^1 = \gamma(v)\left(u^1 - \frac{v}{c}u^0\right) \qquad \underline{1}$$

$\underline{1}$: $\gamma(u')\,u'_x = \gamma(v)\,\gamma(u)\,(u_x - v)$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}$$

$$u'^2 = u^2 \qquad \underline{2}$$

$\underline{2}$: $\gamma(u')\,u'_y = \gamma(u)\,u_y$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(v)\left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)}\,,\quad u'_z \text{ analog}$$

$\vec{u}(t)\,,\ \vec{u}'(t')$

$$\boxed{\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}} & u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}} \\ u'_y &= \frac{u_y}{\gamma(v)\left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)} & u_y &= \frac{u'_y}{\gamma(v)\left(1 + \frac{v u'_x}{c^2}\right)} \\ u'_z &= \frac{u_z}{\gamma(v)\left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)} & u_z &= \frac{u'_z}{\gamma(v)\left(1 + \frac{v u'_x}{c^2}\right)} \end{aligned}} \qquad (47)$$

VII.4. Sichtbarkeit der Längenkontraktion?

Längenkontraktion in Bewegungsrichtung

Beispiel 1: Ruhsystem: Objekt ist Kugel vom Radius R_0

Bezugssystem, in dem sich das Objekt mit v bewegt: Objekt ist Rotations=ellipsoid mit Halbachsen $\frac{R_0}{\gamma(v)}, R_0, R_0$

Beispiel 2: Ruhsystem: Objekt ist Würfel mit Kantenlänge a_0

Bezugssystem, in dem sich das Objekt parallel zu Kante mit v bewegt: Objekt ist Quader mit Kantenlängen $\frac{a_0}{\gamma(v)}, a_0, a_0$

OBJEKT IST ... bezieht sich dabei auf die entsprechende MESSVORSCHRIFT FÜR LÄNGEN: Lineardimension eines Objekts in S in einer Raumrichtung = räumlicher Abstand von Objektanfang und Objektende (in dieser Richtung) gleichzeitig in S (Koordinatenabstände auf "world map" von S)

Was "sieht" man in den beiden Beispielen mit freiem Auge oder auf einer Fotografie?

Beispiel 1: Penrose 1959 (s. Abschnitt IX.4.C)

"Längenkontraktion" nicht sichtbar

Man "sieht" – unabhängig von der Größe der Geschwindigkeit und der Größe der Entfernung zum Objekt einen kreisförmigen Umriß.

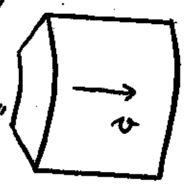
Beispiel 2: Terrell 1959 (s. Folien VII-52', VII-52")

"Längenkontraktion" nicht sichtbar

Befindet sich das Objekt in so großer Entfernung vom Auge bzw. vom Objektiv, daß man die vom Objekt kommenden Lichtstrahlen als parallel ansehen kann, so "sieht" man einen gedrehten Würfel.

"Längenkontraktion" sichtbar, aber nicht in dem naiven Sinn w.o.

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, "sieht" man einen gedrehten, verzerrten und kontrahierten "Würfel"



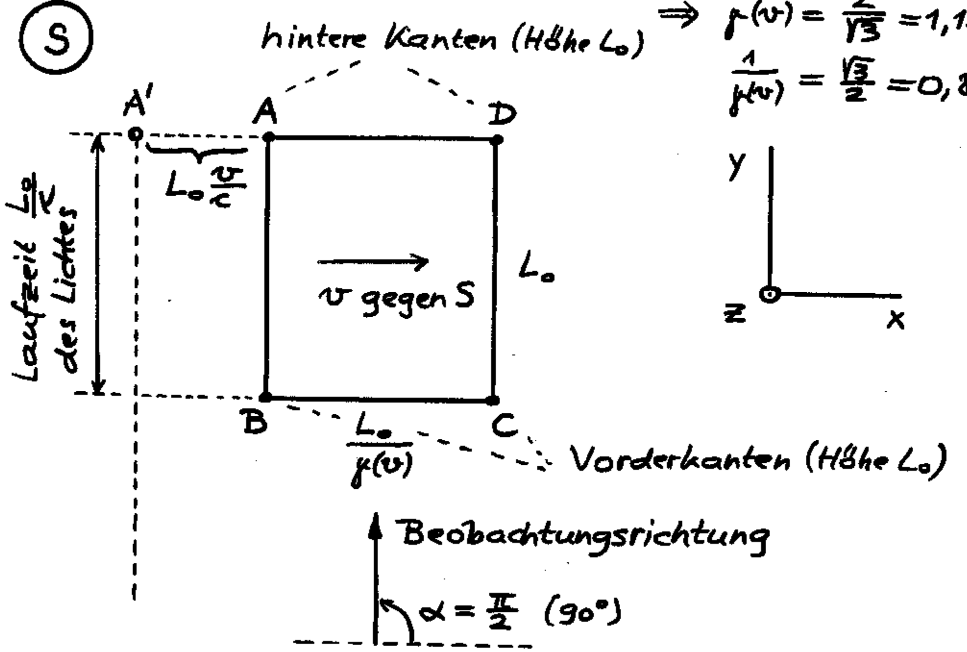
GRUND: Summeneffekt von Längenkontraktion und Retardierung: Photonen, die gleichzeitig im Auge (beim Objektiv) einlangen, stammen von verschiedenen Lagen des Objekts

(Retardierungen auf "world picture" = "Weltbild")

Würfel in großer Entfernung (Parallelstrahlen)

S' Ruhsystem des Würfels; Abb. für $v = 0{,}5c$

$$\Rightarrow \gamma(v) = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1{,}154 \qquad \frac{1}{\gamma(v)} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$$



Kante A wird wegen Retardierung in Lage A' "gesehen" (fotografiert)!

Daher sieht die fotografische Aufnahme so aus:

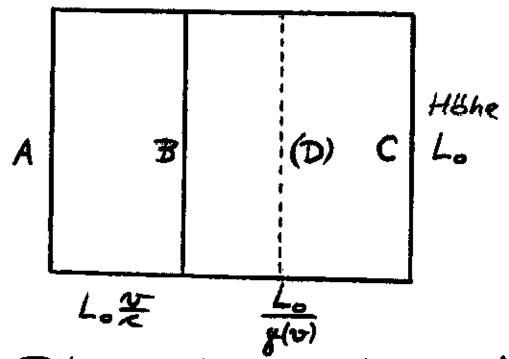
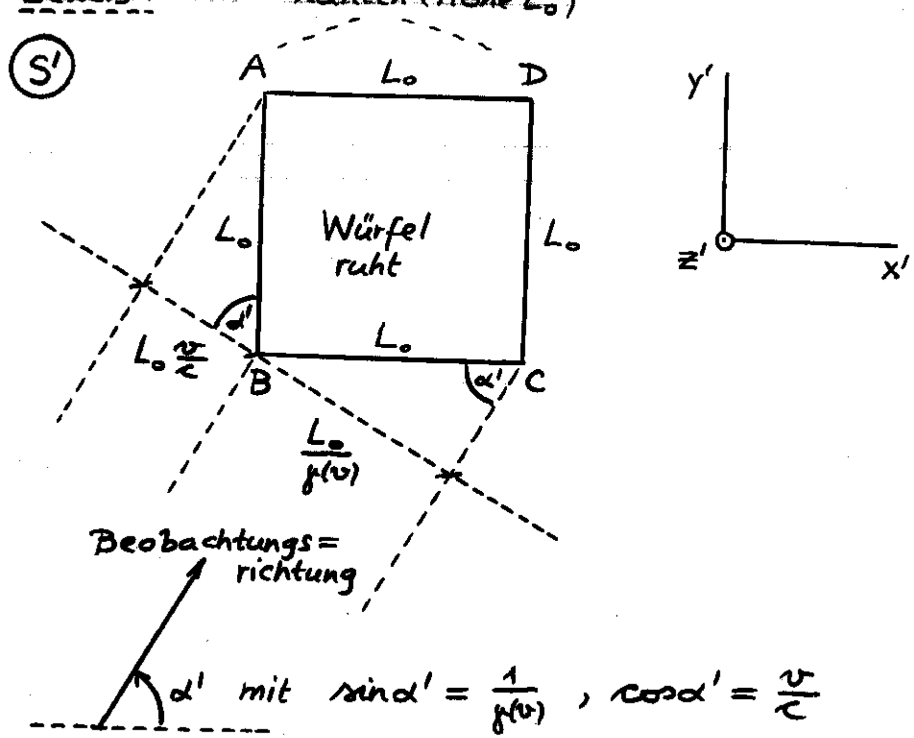


Bild eines "gedrehten" Würfels!

A ... Kante A auf Aufnahme

Das ist aber das gleiche Bild, wie wenn man den Würfel in seinem Ruhsystem aus einer "gedrehten" Richtung fotografiert!

<u>Beweis:</u>



α' mit $\sin\alpha' = \frac{1}{\gamma(v)}$, $\cos\alpha' = \frac{v}{c}$

$(\sin^2\alpha' + \cos^2\alpha' = 1 \checkmark)$

Für $\frac{v}{c} = 0{,}5$ gilt $\alpha' = \frac{\pi}{3}$ (60°) ▲

Bemerkung: Für ein beliebiges Objekt in großer Entfernung (Parallelstrahlen) gilt eine qualitativ gleiche Aussage (z.B. Kugel).

Ferner: Für ein solches Objekt gilt

$$\boxed{\text{Längenkontraktion} + \text{Retardierung} = \text{Aberration}}$$

Die Aberrationsformeln (IX.68) (s. Folie IX-35) liefern mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$ unmittelbar $\sin\alpha' = \frac{1}{\gamma}$, $\cos\alpha' = \beta$. ●

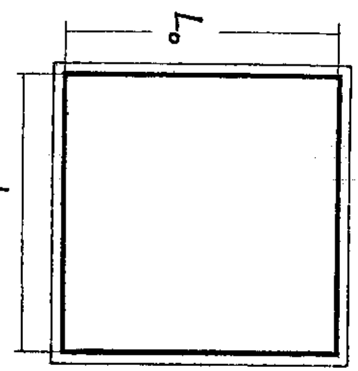


Abb. 5a: Würfel in Ruhe (Zentralprojektion)

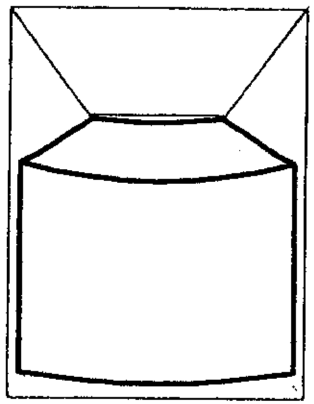


Abb. 5b: Würfel mit v=0.5c aus geringer Entfernung (Zentralprojektion)

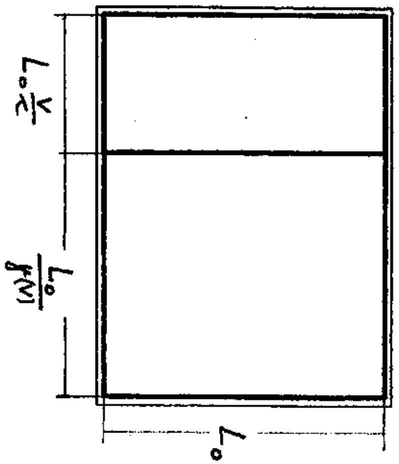


Abb. 5c: Würfel mit v=0.5c aus großer Entfernung (Parallelprojektion)

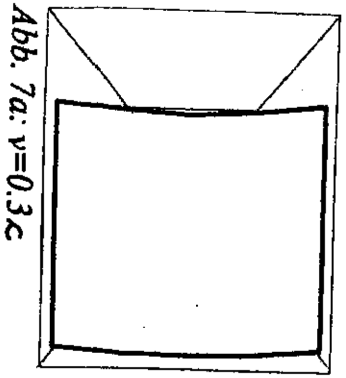


Abb. 7a: v=0.3c

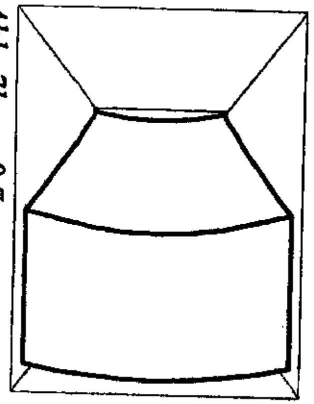


Abb. 7b: v=0.7c

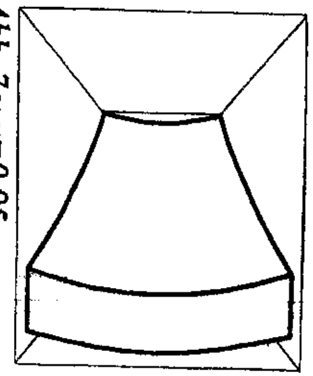


Abb. 7c: v=0.95c

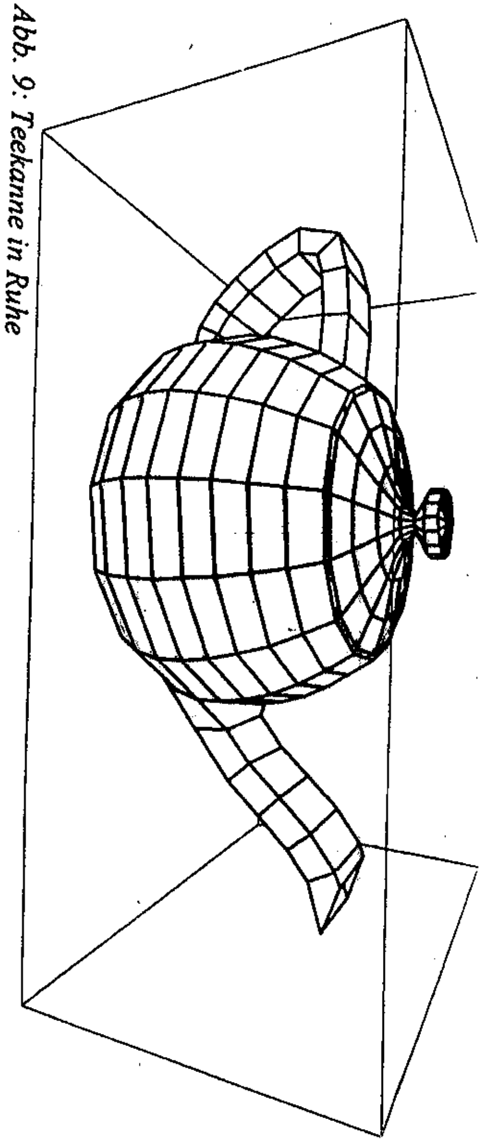


Abb. 9: Teekanne in Ruhe

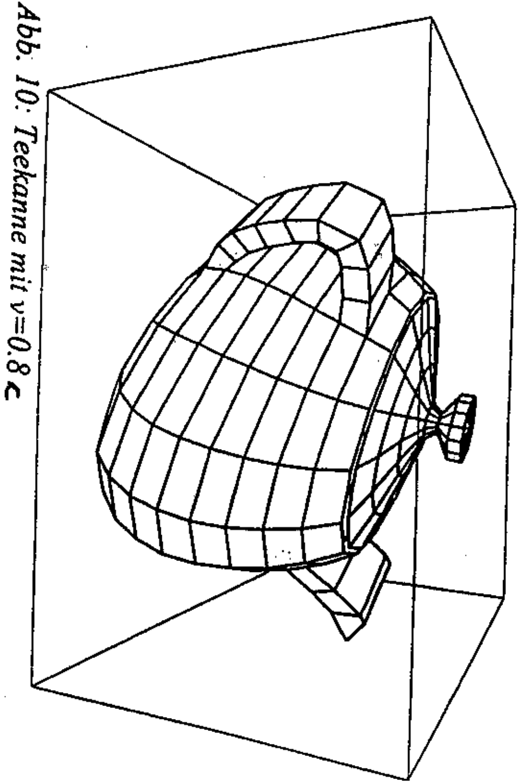


Abb. 10: Teekanne mit $v=0.8\,c$

VII. 4. A. "Superschnappschüsse"

Spezielle "idealisierte" (sehr unrealistische) Art von Fotografien.

Definition: "Superschnappschuß"

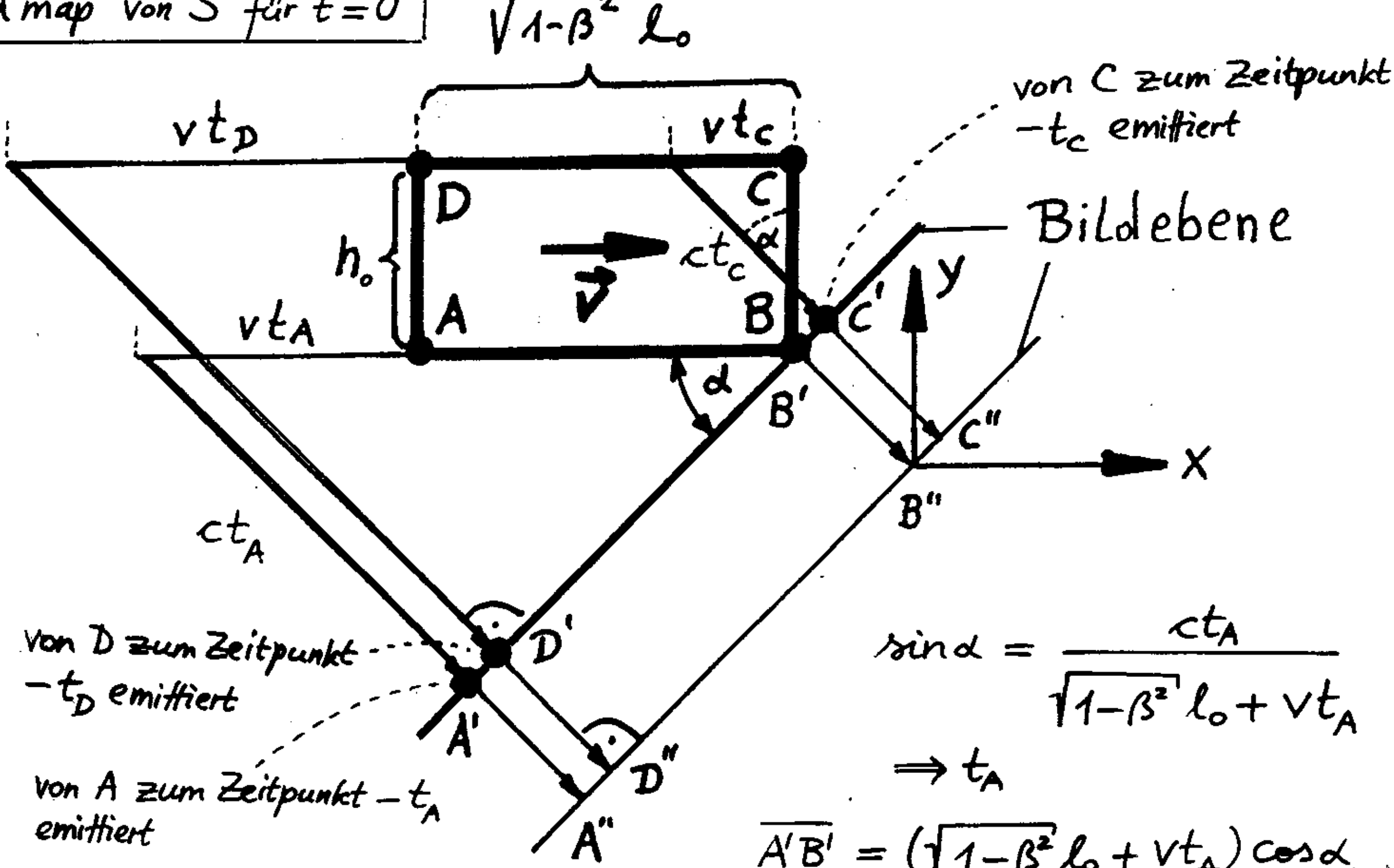
Von Oberflächenpunkten des Objektes emittierte Photonen bewegen sich (voraussetzungsgemäß) auf parallelen Bahnen auf eine zu diesen Bahnen senkrecht angeordnete Fotoplatte zu, treffen dort gleichzeitig (bzgl. des Ruhsystems der Fotoplatte) auf und erzeugen so ein "lebensgroßes" Bild des Objekts.

Beispiel:

"Superschnappschuß" eines Rechteckes

(bzw. eines Rechteckquaders)

"World map" von S für $t=0$



$$\sin\alpha = \frac{ct_A}{\sqrt{1-\beta^2}\, l_0 + vt_A}$$

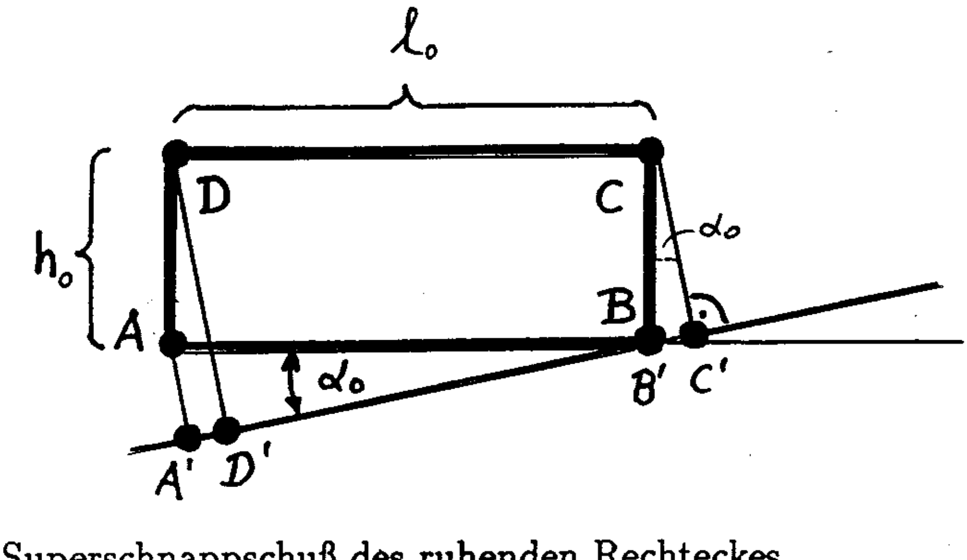
$$\Rightarrow t_A$$

$$\overline{A'B'} = \left(\sqrt{1-\beta^2}\, l_0 + vt_A\right)\cos\alpha \qquad (51)$$

Superschnappschuß eines parallel zu seiner Längsrichtung bewegten Rechteckes

analog t_C , $\overline{B'C'}$ (s. Skriptum)

"world map" von S_0 für irgendein vorgegebenes t_0

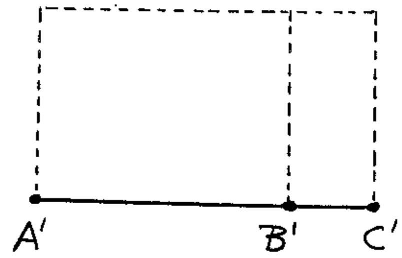


Superschnappschuß des ruhenden Rechteckes

$$\overline{A'B'} = l_0 \cos\alpha_0 \quad , \quad \overline{B'C'} = h_0 \sin\alpha_0 \qquad (54)$$

Ergebnisse:

bewegtes Rechteck (bewegter Quader)



(H_0)

$$\overline{A'B'} = l_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}\cos\alpha}{1-\beta\sin\alpha} \quad (51) \quad \cos\alpha_0$$

$$\overline{B'C'} = h_0 \frac{\sin\alpha-\beta}{1-\beta\sin\alpha} \quad (53) \quad \sin\alpha_0 \quad (55)$$

Wie in Ruhsystem unter Winkel α_0 mit

$(\sin^2\alpha_0 + \cos^2\alpha_0 = 1 \checkmark)$

Aberrationsformel Abschnitt IX.4.B !

VII.4.B. Satz von Terrell

Das (dauernde) Ruhsystem des betrachteten Objektes sei Inertialsystem.

Satz von Terrell:

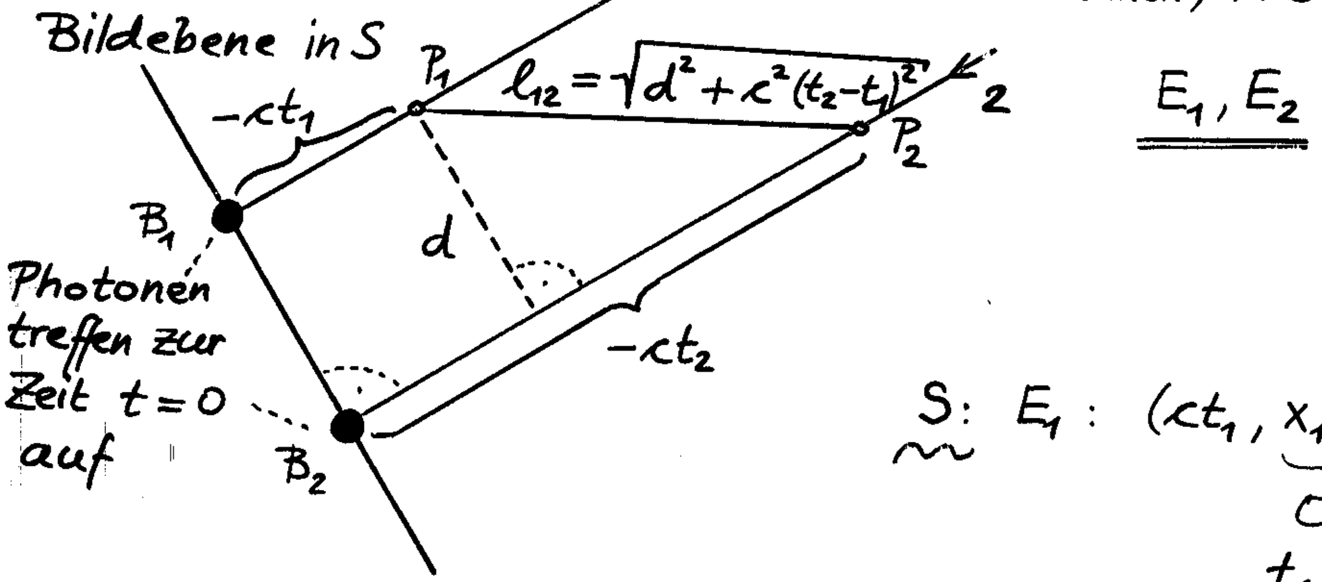
Alle "Superschnappschüsse" eines Objektes, die von einem relativ zum Objekt ruhenden und beliebigen zueinander und zum Objekt gleichförmig gerad=linig bewegten Fotografen am selben Ereignis $\vec{x}$ gemacht werden, sind gleich.

Beachte: "Am selben Ereignis $\vec{x}$" heißt,
daß die Fotografen im Augenblick, in
dem sie ihre Aufnahme machen,
raum-zeitlich koinzidieren.

Folge: Unsichtbarkeit der Längenkontraktion auf einem "Superschnappschuß" eines Fotografen, relativ zu dem sich das Objekt bewegt.

Beweis: Kurz und genial (V. Weisskopf).

Zeichnung für S:



$\underline{\underline{E_1, E_2}}$: zunächst (!) beliebige Ereignisse auf den Weltlinien der Photonen 1, 2 ("Photon 1 war hier", "Photon 2 war hier") (∗)

S: $E_1 : (ct_1, \underbrace{x_1, y_1, z_1}_{\text{Ort } P_1})$, $E_2 : (ct_2, \underbrace{x_2, y_2, z_2}_{\text{Ort } P_2})$

$t_1 < 0$ $\qquad$ $t_2 < 0$

S': $E_1 : (ct_1', x_1', y_1', z_1')$, $E_2 : (ct_2', x_2', y_2', z_2')$

L-invariantes raum-zeitl. Abstandsquadrat von E_1, E_2:

$$\Delta s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - \ell_{12}^2 = -d^2 \quad \text{unabhängig von } t_2 - t_1 \;!$$

$$= c^2(t_2' - t_1')^2 - \ell_{12}'^2$$

Wählen wir in den beiden einparametrigen Scharen von Ereignissen ein Paar gleichzeitiger Ereignisse bzgl. S' ($t_2' = t_1'$), so folgt für diese Ereignisse $\ell_{12}' = d$, wobei d auch der Normalabstand der Photonenbahnen in S' sein muß ($d' = d$), da sonst nicht $\Delta s^2 = -d^2$, $\forall E_1, E_2$ (∗) sein könnte!