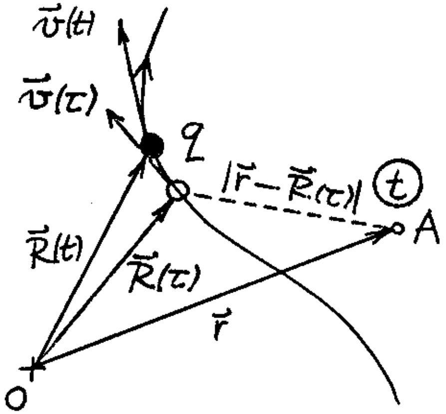
FOLIEN VON D. GRAU ZUR VORLESUNG "ELEKTRODYNAMIK UND RELATIVITÄTSTHEORIE"

nach dem Skriptum von H. Nowotny

Kapitel 6

VI. ELM. FELDER IM VAKUUM

VI.1 Feld einer beliebig bewegten Punktladung



$\vec{R}(t)$ vorgegeben

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{R}(t)}{dt}$$

$$t - \tau = \frac{|\vec{r}-\vec{R}(\tau)|}{c}$$

$$\boxed{\tau = t - \frac{|\vec{r}-\vec{R}(\tau)|}{c}} \qquad (7)$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\tau = \tau(\vec{r},t) \\ \text{retardierte Zeit}\end{array}}$$

(Lösung eindeutig)

$$|\vec{v}(t')| < c, \ \forall t'$$

Quelldichten

$$\boxed{\begin{aligned} \rho(\vec{r},t) &= q\,\delta(\vec{r}-\vec{R}(t)) && (1a) \\ \vec{j}(\vec{r},t) &= \vec{v}(t)\,\rho(\vec{r},t) && (1b)\end{aligned}}$$

Zeige selbst:

<u>KG</u>: $\operatorname{div}\vec{j}(\vec{r},t) + \frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} = 0$ ✓

<u>(II.41), (II.42):</u>

retardierte Potentiale

$$\phi(\vec{r},t) = \int d^3r' \, \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int d^3r' \, \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

bzw.

$$\phi(\vec{r},t) = \underbrace{\int d^3r'}\underbrace{\int dt'}\, \overbrace{\frac{\delta\left(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}^{D_{ret}(|\vec{r}-\vec{r}'|,\,t-t')}\, \underbrace{\rho(\vec{r}',t')}_{q\,\delta(\vec{r}'-\vec{R}(t'))} \qquad (2a)$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\underbrace{\int d^3r'}\underbrace{\int dt'}\, \frac{\delta\left(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, \underbrace{\vec{j}(\vec{r}',t')}_{q\vec{v}(t')\,\delta(\vec{r}'-\vec{R}(t'))} \qquad (2b)$$

$$\phi(\vec{r},t) = q\int dt' \, \frac{\delta\left(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{R}(t')|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{R}(t')|} \qquad (3a)$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = q\int dt' \, \frac{\delta\left(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{R}(t')|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{R}(t')|}\, \frac{\vec{v}(t')}{c} \qquad (3b)$$

"Methoden":

Besitzt die Funktion $g(t')$ <u>eine einzige Nullstelle</u> τ und ist diese <u>einfach</u>, d.h.

gilt
$$g(\tau) = 0\,, \quad g'(\tau) \neq 0\,, \tag{4a}$$

so folgt
$$\delta(g(t')) = \frac{\delta(t'-\tau)}{|g'(\tau)|} \tag{4b}$$

(Im Skriptum ist anstelle von $g(t')$ die Funktion $f(t')$ mit
$$g(t') =: t' - f(t')$$
verwendet.)

HIER:
$$\delta\Big(\underbrace{t - t' - \frac{|\vec{r}-\vec{R}(t')|}{c}}_{g(t')}\Big) \qquad (\vec{r}, t \text{ für Integration fest})$$

$$g(t') = 0 \iff t - t' = \frac{|\vec{r}-\vec{R}(t')|}{c}$$

besitzt nur eine Lösung, nämlich
$$t' = \tau = \tau(\vec{r}, t)$$

$$g'(\tau) = -1 + \frac{\vec{r}-\vec{R}(\tau)}{|\vec{r}-\vec{R}(\tau)|}\cdot\frac{\vec{v}(\tau)}{c} < 0 \quad \text{(also einfache Nullstelle)}$$

Somit:
$$\delta\Big(t - t' - \frac{|\vec{r}-\vec{R}(t')|}{c}\Big) = \frac{\delta(t'-\tau)}{1 - \frac{\vec{r}-\vec{R}(\tau)}{|\vec{r}-\vec{R}(\tau)|}\cdot\frac{\vec{v}(\tau)}{c}} \tag{5}$$

mit

$\tau = \tau(\vec{r}, t)$ <u>implizit definiert</u> durch
$$\tau = t - \frac{|\vec{r}-\vec{R}(\tau)|}{c}$$

$$\phi(\vec{r}, t) = q\int dt' \, \frac{\delta\Big(t - t' - \frac{|\vec{r}-\vec{R}(t')|}{c}\Big)}{|\vec{r}-\vec{R}(t')|}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = q\int dt' \, \frac{\delta\Big(t - t' - \frac{|\vec{r}-\vec{R}(t')|}{c}\Big)}{|\vec{r}-\vec{R}(t')|}\,\frac{\vec{v}(t')}{c}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &= \frac{q}{|\vec{r}-\vec{R}(\tau)|}\,\frac{1}{1 - \frac{\vec{r}-\vec{R}(\tau)}{|\vec{r}-\vec{R}(\tau)|}\cdot\frac{\vec{v}(\tau)}{c}} && (6a)\\ \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\vec{v}(\tau)}{c}\,\phi(\vec{r}, t) \quad \text{mit } \tau = \tau(\vec{r}, t) && (6b)\end{aligned}}$$

Liénard–Wiechert–Potentiale

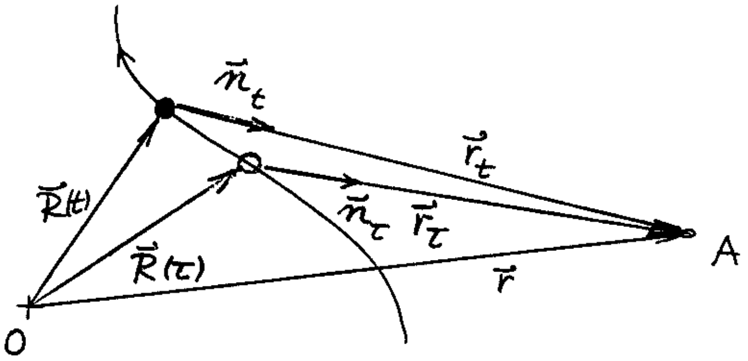
Abkürzungen:

$$\vec{r}_t = \vec{r} - \vec{R}(t) \quad , \qquad r_t = |\vec{r} - \vec{R}(t)|$$

$$\vec{n}_t = \frac{\vec{r}_t}{r_t} = \frac{\vec{r} - \vec{R}(t)}{|\vec{r} - \vec{R}(t)|} \tag{8}$$

$$\vec{\beta}_t = \frac{\vec{v}(t)}{c}$$

$$\kappa_t \cdots\cdots \kappa(\vec{r},t) = 1 - \vec{n}_t \cdot \vec{\beta}_t = 1 - \frac{\vec{r} - \vec{R}(t)}{|\vec{r} - \vec{R}(t)|} \cdot \frac{\vec{v}(t)}{c}$$



$$\phi(\vec{r},t) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{R}(\tau)|} \frac{1}{1 - \frac{\vec{r} - \vec{R}(\tau)}{|\vec{r} - \vec{R}(\tau)|} \cdot \frac{\vec{v}(\tau)}{c}}$$

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{q}{r_\tau \, \kappa(\vec{r},\tau)} \tag{9a}$$

mit $\tau = \tau(\vec{r},t)$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{\beta}_\tau \, \phi(\vec{r},t) \tag{9b}$$

$$\Updownarrow$$

$$\tau = t - \frac{r_\tau}{c} \tag{10}$$

VI.1.B. Berechnung der Feldstärken

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\operatorname{grad}\phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r},t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big|\ \phi(\vec{r},t) = q \int dt' \, \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{R}(t')|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{R}(t')|}$$

$$= q \int dt' \, \frac{\delta\left(t - t' - \frac{r_{t'}}{c}\right)}{r_{t'}}$$

$$= \frac{q}{|\vec{r} - \vec{R}(\tau)|} \frac{1}{1 - \frac{\vec{r} - \vec{R}(\tau)}{|\vec{r} - \vec{R}(\tau)|} \cdot \frac{\vec{v}(\tau)}{c}}$$

$$= \frac{q}{r_\tau \, \kappa(\vec{r},\tau)} \qquad \text{mit} \quad \tau = \tau(\vec{r},t)$$

Deshalb Differentiationen unter den Integralen $\int dt' \ldots$ ausgeführt:

$$\phi(\vec{r},t) = q \int dt' \, \frac{\delta\left(t - t' - \frac{r_{t'}}{c}\right)}{r_{t'}}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = q \int dt' \, \frac{\delta\left(t - t' - \frac{r_{t'}}{c}\right)}{r_{t'}} \, \vec{\beta}_{t'}$$

Ergebnis*):

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= \frac{q}{r_\tau^2\,\kappa^3(\vec{r},\tau)}\,(1-\beta_\tau^2)(\vec{n}_\tau-\vec{\beta}_\tau) \\ &\quad + \frac{q}{r_\tau\,\kappa^3(\vec{r},\tau)}\left\{\vec{n}_\tau\times\left[(\vec{n}_\tau-\vec{\beta}_\tau)\times\frac{1}{c}\frac{d\vec{\beta}_\tau}{d\tau}\right]\right\} \qquad (22) \\ \vec{B}(\vec{r},t) &= \vec{n}_\tau\times\vec{E}(\vec{r},t) \qquad (17)\end{aligned}}$$

mit $\tau = t - \frac{r_\tau}{c} \iff \tau = \tau(\vec{r},t)$

Abstrahlung elm. Wellen!

VI.1.C. Sonderfall: gleichförmig geradlinig bewegte Punktladung

$$\vec{R}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t \qquad (\text{Skriptum: } \vec{v} \text{ statt } \vec{v}_0)$$

Vorübergehend $\vec{r}_0 = \vec{0}$ gesetzt (Wahl des Ursprungs des KS):

*) Skriptum Gl. (11) – Gl. (16) und Gl. (18) – Gl. (21) NICHT PRÜFUNGSSTOFF

$$\vec{R}(t) = \vec{v}_0 t \qquad (23)$$

$$\vec{r}_t = \vec{r} - \vec{R}(t) = \vec{r} - \vec{v}_0 t \qquad (24)$$

Die Bestimmungsgleichung für $\tau(\vec{r},t)$

$$\tau = t - \frac{r_\tau}{c}$$

läßt sich in diesem Fall explizit nach τ auflösen:

Quadrieren von

$$t - \tau = \frac{|\vec{r} - \vec{v}_0\tau|}{c}$$

und Lösen der quadratischen Gl. für τ $(\tau < t)$ liefert

$$\underline{\tau = \tau(\vec{r},t)} \qquad (\text{Selbst rechnen.})$$

Wir eliminieren aber τ aus ϕ, $\vec{A}$, $\vec{E}$ und $\vec{B}$ auf einem eleganteren Weg.

Mit

$$\vec{\beta}_0 = \frac{\vec{v}_0}{c}$$

gilt

(9), (22):

$$\phi(\vec r,t) = \frac{q}{r_\tau\, \varkappa(\vec r,\tau)} \quad , \quad \vec A(\vec r,t) = \vec\beta_0\, \phi(\vec r,t)$$

$$\vec E(\vec r,t) = \frac{q}{r_\tau^3\, \varkappa^3(\vec r,\tau)} (1-\beta_0^2)\left(\vec r_\tau - \vec\beta_0 r_\tau\right) \qquad (31)$$

$$\vec B(\vec r,t) = \operatorname{rot}\left(\vec\beta_0\, \phi(\vec r,t)\right)$$

Wobei

$$r_\tau\, \varkappa(\vec r,\tau) = r_\tau - \vec\beta_0 \cdot \vec r_\tau$$

Nur diese Ausdrücke benötigt!

1) $\vec r_\tau - \vec\beta_0 r_\tau$

$$\vec r_t = \vec r - \vec R(t) = \vec r - \vec v_0 t = \underbrace{\vec r - \vec v_0 \tau}_{\vec r_\tau} - \vec v_0 \underbrace{(t-\tau)}_{\frac{r_\tau}{c}}$$

$$\vec r_\tau - \vec\beta_0 r_\tau = \vec r_t \qquad (!) \qquad (25)$$

2) $r_\tau - \vec\beta_0 \cdot \vec r_\tau$

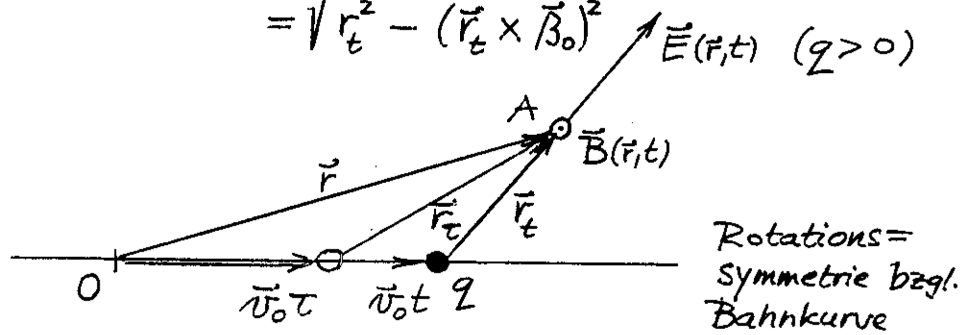
$$r_t^2 - (\vec r_t \times \vec\beta_0)^2 = (\overbrace{\vec r_\tau - \vec\beta_0 r_\tau})^2 - (\vec r_\tau \times \vec\beta_0)^2$$

$$= r_\tau^2 - 2(\vec\beta_0 \cdot \vec r_\tau) r_\tau + \cancel{\beta_0^2 r_\tau^2} \qquad (26)$$

$$- \left(\cancel{r_\tau^2 \beta_0^2} - (\vec\beta_0 \cdot \vec r_\tau)^2\right) = (r_\tau - \vec\beta_0 \cdot \vec r_\tau)^2$$

$$r_\tau\, \varkappa(\vec r,\tau) = r_\tau - \vec\beta_0 \cdot \vec r_\tau$$

$$= \sqrt{r_t^2 - (\vec r_t \times \vec\beta_0)^2}$$



$$\boxed{\begin{aligned} \phi(\vec r,t) &= \frac{q}{r_\tau\, \varkappa(\vec r,\tau)} = \frac{q}{\sqrt{r_t^2 - (\vec r_t \times \vec\beta_0)^2}} \\ \vec A(\vec r,t) &= \vec\beta_0\, \phi(\vec r,t) \end{aligned}} \qquad (28)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec E(\vec r,t) &= \frac{q}{r_\tau^3\, \varkappa^3(\vec r,\tau)} (1-\beta_0^2)(\vec r_\tau - \vec\beta_0 r_\tau) \\ &= \frac{q\,(1-\beta_0^2)}{\left[r_t^2 - (\vec r_t \times \vec\beta_0)^2\right]^{3/2}}\, \vec r_t \\ \vec B(\vec r,t) &= \vec\beta_0 \times \vec E(\vec r,t) \end{aligned}} \qquad (32)$$

s. unten

zu $\vec{B}(\vec{r},t)$:

$$\underline{\vec{B}(\vec{r},t)} = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r},t) = \vec{\nabla} \times (\vec{\beta}_0 \phi(\vec{r},t))$$

$$\underline{= \vec{\beta}_0 \times (-\operatorname{grad}\phi(\vec{r},t))}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\operatorname{grad}\phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

$$= -\operatorname{grad}\phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\vec{\beta}_0 \frac{\partial \phi(\vec{r},t)}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\vec{\beta}_0 \times \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{\beta}_0 \times (-\operatorname{grad}\phi(\vec{r},t))}$$

$$\underline{\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\beta}_0 \times \vec{E}(\vec{r},t)} \quad \checkmark$$

<u>Bemerkung 1:</u> Die Formeln für ϕ, $\vec{A}$, $\vec{E}$, $\vec{B}$ gelten auch im Falle $\vec{r}_0 \neq \vec{0}$, man hat lediglich

$$\vec{r}_t = \vec{r} - \vec{v}_0 t \longrightarrow \vec{r}_t = \vec{r} - \vec{r}_0 - \vec{v}_0 t$$

zu setzen.

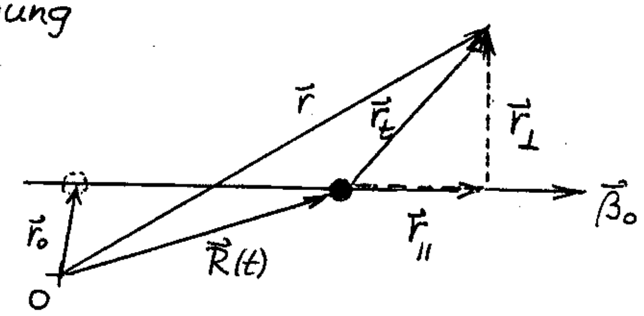
<u>Bemerkung 2:</u> Potentiale und Feldstärken hängen nur von der Variablenkombination $\vec{r} - \vec{r}_0 - \vec{v}_0 t$ ab: "<u>konvektives Coulombfeld</u>" — rein elektrostatisches Coulombfeld im Ruhsystem der Ladung

<u>Äquipotentialflächen von ϕ für festes t</u>

$$\phi(\vec{r},t) = \text{konst.} \quad (t \text{ fest}) \Rightarrow$$

$$r_t^2 - (\vec{r}_t \times \vec{\beta}_0)^2 = \text{konst.}^2 > 0$$

Zerlegung

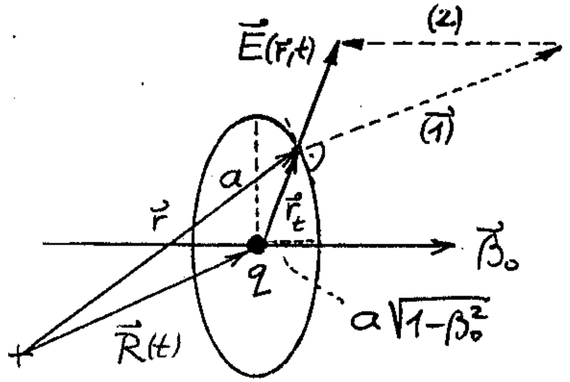


$$(\vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp)^2 - [(\vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp) \times \vec{\beta}_0]^2 = \text{konst.}^2$$

$$r_\parallel^2 + r_\perp^2 - \underbrace{(\vec{r}_\perp \times \vec{\beta}_0)^2}_{\beta_0^2 r_\perp^2 - \underbrace{(\vec{\beta}_0 \cdot \vec{r}_\perp)^2}_{0}} = \text{konst.}^2$$

$$r_\parallel^2 + (1-\beta_0^2)\, r_\perp^2 = \text{konst.}^2 \qquad (30)$$

Rotationsellipsoid bzgl. Bahnkurve mit um Faktor $\sqrt{1-\beta_0^2}$ kürzerer Achse in Bewegungsrichtung



$q > 0$

Achtung!

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\operatorname{grad}\phi(\vec{r},t) \qquad \vec{(1)}$$

$$\underline{\underline{-\vec{\beta}_0 \frac{1}{c}\frac{\partial\phi(\vec{r},t)}{\partial t}}} \qquad \vec{(2)}$$

Kraft auf eine gleichförmig "mitbewegte" Punktladung Q

$$\phi(\vec{r},t) = \phi(\overbrace{\vec{r}-\vec{r}_0-\vec{v}_0 t}^{\vec{r}_t})$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\frac{1}{c}\frac{\partial\phi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r},t)\cdot\vec{\beta}_0}$$

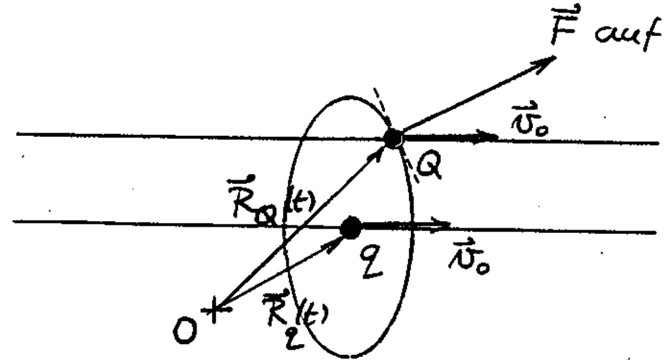
$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r},t) + \vec{\beta}_0\left(\vec{\beta}_0\cdot\vec{\nabla}\phi(\vec{r},t)\right)$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla}\phi(\vec{r},t)\times\vec{\beta}_0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\vec{E}+\vec{\beta}_0\times\vec{B}} = -\vec{\nabla}\phi + \vec{\beta}_0(\vec{\beta}_0\cdot\vec{\nabla}\phi) + \left[\vec{\beta}_0\times(\vec{\nabla}\phi\times\vec{\beta}_0)\right]$$

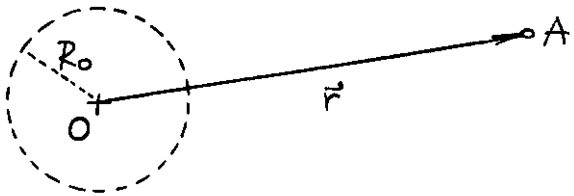
$$= -\vec{\nabla}\phi + \cancel{(\vec{\beta}_0\cdot\vec{\nabla}\phi)\vec{\beta}_0} + \beta_0^2\vec{\nabla}\phi - \cancel{(\vec{\beta}_0\cdot\vec{\nabla}\phi)\vec{\beta}_0}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{\vec{v}_0}{c}\times\vec{B}(\vec{r},t) = -\left(1-\frac{v_0^2}{c^2}\right)\vec{\nabla}\phi(\vec{r},t) \qquad (33)$$



Zeichnung für $q > 0$, $Q > 0$

VI.2. Abstrahlung elm. Wellen durch eine lokalisierte zeitabhängige Ladungs- und Stromverteilung



Lokalisierte Quellverteilung :

$$\left.\begin{aligned} \rho(\vec{r}',t') &= 0 \\ \vec{j}(\vec{r}',t') &= \vec{0} \end{aligned}\right\} \text{ für } r' > R_0 ,\ \forall t'$$

Keine RB im Endlichen,
keine Quellen im Unendlichen (natürliche RB).

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int d^3r' \, \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

IV.2.A. Berechnung der "Strahlungsanteile" $\vec{E}_s(\vec{r},t)$, $\vec{B}_s(\vec{r},t)$ der Felder $\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{B}(\vec{r},t)$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r},t)$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int d^3r' \left(\vec{\nabla} \times \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right)$$

$$= -\frac{1}{c}\int d^3r' \, \frac{(\vec{r}-\vec{r}') \times \dot{\vec{j}}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{c\,|\vec{r}-\vec{r}'|^2}$$

$$-\frac{1}{c}\int d^3r' \, \frac{(\vec{r}-\vec{r}') \times \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$\dot{\vec{a}}(\vec{r},t) := \frac{\partial \vec{a}(\vec{r},t)}{\partial t} \tag{35}$$

$r > R_0$: Führender Term in der Entwicklung nach $\frac{1}{r}$ = Term 1. Ordnung in $\frac{1}{r}$ =: "Strahlungsanteil" des Feldes

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = r - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r} + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \underbrace{-\frac{\vec{r}}{c^2 r^2} \times \int d^3r' \, \dot{\vec{j}}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{cr}\right)}_{=:\,\vec{B}_s(\vec{r},t)} + \vec{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{34}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{\vec{q}}(\vec{r},t) := \int d^3r' \, \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{cr}\right) \\ \vec{q}(\vec{r},t) \quad \text{allgemeines Strahlungsmoment} \end{array}} \tag{37}$$

Beachte:

$$\boxed{\dot{\vec{q}}(\vec{r},t) = \dot{\vec{q}}\left(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}\right)}$$

$$t_r := t - \frac{r}{c} \qquad \text{retardierte Zeit}$$

$$\frac{\vec{r}}{r} = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$$

Raumrichtung $\hat{=}\ \vartheta, \varphi$

Damit:

$$\vec{B}_s(\vec{r},t) = -\frac{\vec{r}}{c^2r^2} \times \ddot{\vec{q}}\left(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$\vec{B}_s(\vec{r},t) = \frac{\ddot{\vec{q}}\left(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}\right) \times \vec{r}}{c^2r^2} \tag{36}$$

$\vec{E}_s(\vec{r},t)$ aus

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \operatorname{rot}\vec{B} \qquad (r > R_0\,!)$$

$\frac{1}{r}$–Anteil von $\operatorname{rot}\vec{B}_s(\vec{r},t)$:

$$\left(\vec{\nabla} \times \frac{\ddot{\vec{q}}\left(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}\right) \times \vec{r}}{c^2r^2}\right)_i$$

$$= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varepsilon_{klm} \frac{\ddot{q}_l\left(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}\right) x_m}{c^2r^2}\right)$$

$$= \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{klm} \frac{x_m}{c^2r^2} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \ddot{q}_l\left(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}\right)}_{\dddot{q}_l\left(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}\right)\left(-\frac{x_j}{cr}\right) + O\left(\frac{1}{r}\right)} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$= \varepsilon_{ikj} \underbrace{\varepsilon_{klm}\, \dddot{q}_l\, x_m}_{(\dddot{\vec{q}} \times \vec{r})_k} \frac{x_j}{c^3r^3} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

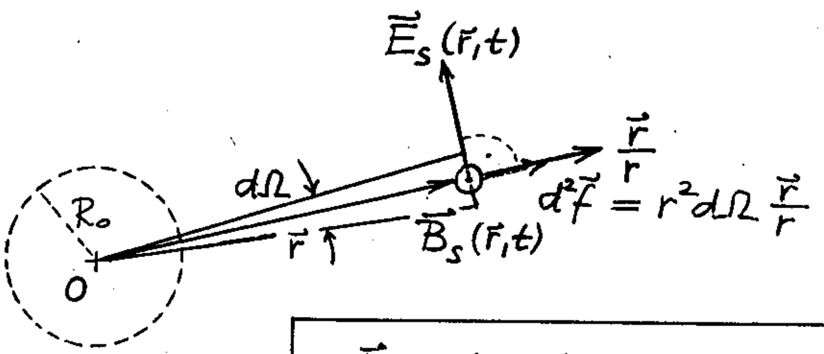
$$= \underline{\left(\frac{\left[\dddot{\vec{q}}\left(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}\right) \times \vec{r}\right] \times \vec{r}}{c^3r^3}\right)_i} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$= \underline{\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}_s(\vec{r},t)}{\partial t}\right)_i} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}_s(\vec{r},t) = \frac{\left[\ddot{\vec{q}}\left(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}\right) \times \vec{r}\right] \times \vec{r}}{c^2r^3} \tag{38}$$

$$= \vec{B}_s(\vec{r},t) \times \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{B}_s(\vec{r},t) &= \frac{\ddot{\vec{q}}\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right)\times\vec{r}}{c^2r^2} & (36)\\ \vec{E}_s(\vec{r},t) &= \vec{B}_s(\vec{r},t)\times\frac{\vec{r}}{r} & (39)\end{aligned}}$$



$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{\vec{r}}{r},\ \vec{E}_s,\ \vec{B}_s \quad \text{orthogonales Dreibein (Rechtssystem)} \\ |\vec{E}_s| = |\vec{B}_s| \end{array}} \tag{39}$$

Eigenschaften eines Wellenfeldes

VI. 2. B. Abstrahlungsleistung

$r > R_0$:

$$\vec{S}(\vec{r},t) = \underbrace{\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}_s(\vec{r},t) \times \vec{B}_s(\vec{r},t)\right]}_{\frac{c}{4\pi}\vec{B}_s^2(\vec{r},t)\frac{\vec{r}}{r} \quad \text{mit } \vec{B}_s = \frac{\ddot{\vec{q}} \times \vec{r}}{c^2 r^2}} + \vec{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) \tag{40}$$

$$\vec{S}(\vec{r},t) = \underbrace{\frac{1}{4\pi c^3}\frac{1}{r^2}\left[\ddot{\vec{q}}\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right) \times \frac{\vec{r}}{r}\right]^2}_{\geq 0}\frac{\vec{r}}{r} + \vec{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) \tag{41}$$

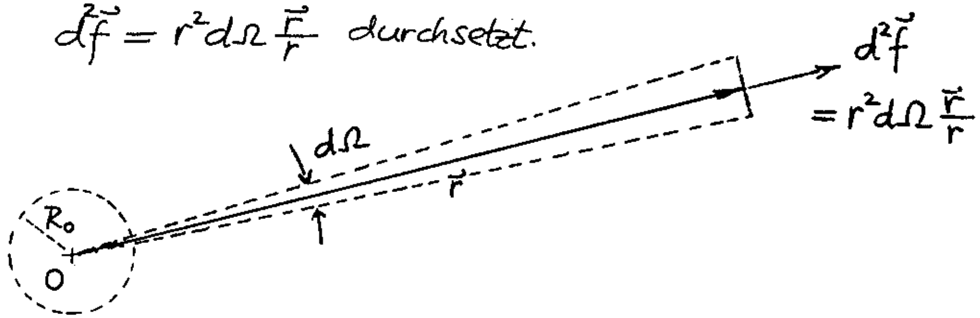
$$\vec{S}(\vec{r},t)\cdot d^2\vec{f} = \underbrace{\frac{1}{4\pi c^3}\left[\ddot{\vec{q}}\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right) \times \frac{\vec{r}}{r}\right]^2 d\Omega}_{\textbf{Abstrahlungsleistung } dP\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right)} + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} dP &= \frac{1}{4\pi c^3}\left[\ddot{\vec{q}} \times \frac{\vec{r}}{r}\right]^2 d\Omega \\ &= \frac{1}{4\pi c^3}\left[\ddot{\vec{q}}^2 - \left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\ddot{\vec{q}}\right)^2\right] d\Omega \end{aligned}} \tag{42}$$

mit

$$\dot{\vec{q}} = \dot{\vec{q}}\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right) = \int d^3r'\, \vec{j}\left(\vec{r}\,',t-\frac{r}{c}+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{cr}\right)$$

$$dP = dP\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right)$$ Strahlungsenergie, welche zum Zeitpunkt t in der Zeiteinheit ein im Aufpunkt $\vec{r}$ befindliches Flächenelement $d^2\vec{f} = r^2 d\Omega \frac{\vec{r}}{r}$ durchsetzt.



Gesamte abgestrahlte Leistung:

$$\boxed{\begin{aligned} P\left(t-\frac{r}{c}\right) &= \int_{[4\pi]} dP\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi c^3}\int_{[4\pi]} d\Omega \left[\ddot{\vec{q}} \times \frac{\vec{r}}{r}\right]^2 \end{aligned}} \tag{43}$$

Strahlungsenergie, welche zum Zeitpunkt t in der Zeiteinheit eine Kugel vom Radius r durchsetzt.

VI. 2.C. Kartesische Multipolentwicklung des allgemeinen Strahlungsmomentes $\vec{q}$

VS $r \gg R_0$ genügt nicht!

$$\dot{\vec{q}}\left(t-\frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}\right) = \int d^3r' \, \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \underbrace{\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{cr}}\right) \qquad (45)$$

Annahme: Die vorgegebene lokalisierte Stromverteilung ändere sich in Zeiten $\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{cr}$ ($\vec{r}'$ aus Bereich, in dem $\vec{j}(\vec{r}', t')$ von null verschieden ist) nur wenig.

Physikalische Bedeutung: s. unten.

Taylorentwicklung:

$$\vec{j}\left(\vec{r}', \underbrace{t-\frac{r}{c}}_{t_r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{cr}\right) = \vec{j}\left(\vec{r}', \underbrace{t-\frac{r}{c}}_{t_r}\right) + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{cr} \, \dot{\vec{j}}\left(\vec{r}', \underbrace{t-\frac{r}{c}}_{t_r}\right) + \dots$$

$$\dot{\vec{q}}\left(t_r, \frac{\vec{r}}{r}\right) = \underbrace{\int d^3r' \, \vec{j}(\vec{r}', t_r)}_{\text{E1-Beitrag}} + \underbrace{\int d^3r' \, \dot{\vec{j}}(\vec{r}', t_r) \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{cr}}_{\text{M1- und E2-Beitrag}} + \dots \qquad (46)$$

liefert: E1-Beitrag; M1- und E2-Beitrag

$$\dot{\vec{q}}\left(t_r, \frac{\vec{r}}{r}\right) = \int d^3r' \, \underbrace{\vec{j}(\vec{r}', t_r)} + \frac{1}{cr} \int d^3r' \, \underbrace{(\vec{r}\cdot\vec{r}')\, \dot{\vec{j}}(\vec{r}', t_r)} + \dots$$

1) Umformung analog zu Gl. (IV-11a)

2) Umformung analog zu Gl. (IV-11b), (IV-13)

zu 1):

$$\frac{\partial}{\partial x_i'}\left(j_i(\vec{r}', t_r)\, x_k'\right) = \underbrace{\frac{\partial j_i(\vec{r}', t_r)}{\partial x_i'}}_{\mathrm{div}'\,\vec{j}(\vec{r}', t_r) = -\dot{\rho}(\vec{r}', t_r) \ (\mathrm{KG})} x_k' + j_i(\vec{r}', t_r)\, \delta_{ik}$$

symbolisch:

$$\vec{j}(\vec{r}', t_r) = \dot{\rho}(\vec{r}', t_r)\, \vec{r}' + \left(\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t_r)\right) \vec{r}' \qquad (47a)$$

$\Rightarrow$

$$\int d^3r' \, \vec{j}(\vec{r}', t_r) = \int d^3r' \, \vec{r}' \, \dot{\rho}(\vec{r}', t_r)$$

zu 2) $\underset{\sim\sim\sim}{(\vec r\cdot\vec r\,')\dot{\vec j}(\vec r\,',t_r)}$

a) $$\frac{\partial}{\partial x_i'}\left(j_i(\vec r\,',t_r)\,x_\ell x_\ell' x_k'\right) = \underbrace{\frac{\partial j_i(\vec r\,',t_r)}{\partial x_i'}}_{-\dot\rho(\vec r\,',t_r)} x_\ell x_\ell' x_k'$$

$$+\, j_i(\vec r\,',t_r)\,x_\ell\,\delta_{i\ell}\,x_k' + j_i(\vec r\,',t_r)\,x_\ell x_\ell'\,\delta_{ik}$$

$$(\vec r\cdot\vec r\,')\dot{\vec j}(\vec r\,',t_r) = -(\vec r\cdot\dot{\vec j}(\vec r\,',t_r))\vec r\,' + \underline{\ddot\rho(\vec r\,',t_r)\,(\vec r\cdot\vec r\,')\vec r\,'}$$

$$\underline{+\,(\vec\nabla'\cdot\dot{\vec j}(\vec r\,',t_r))(\vec r\cdot\vec r\,')\vec r\,'}$$

b)

$$(\vec r\cdot\vec r\,')\dot{\vec j}(\vec r\,',t_r) = (\vec r\cdot\dot{\vec j}(\vec r\,',t_r))\vec r\,' + \underline{(\vec r\,'\times\dot{\vec j}(\vec r\,',t_r))\times\vec r}$$

a+b)

$$\underline{(\vec r\cdot\vec r\,')\dot{\vec j}(\vec r\,',t_r) = \tfrac12(\vec r\,'\times\dot{\vec j}(\vec r\,',t_r))\times\vec r + \tfrac12\ddot\rho(\vec r\,',t_r)(\vec r\cdot\vec r\,')\vec r\,'}$$

$$\underline{+\,\tfrac12(\vec\nabla'\cdot\dot{\vec j}(\vec r\,',t_r))(\vec r\cdot\vec r\,')\vec r\,'}$$

$$\Rightarrow \int d^3r'\,(\vec r\cdot\vec r\,')\dot{\vec j}(\vec r\,',t_r) \qquad (47b)$$

$$= \tfrac12\int d^3r'\,[\vec r\,'\times\dot{\vec j}(\vec r\,',t_r)]\times\vec r + \tfrac12\int d^3r'\,\ddot\rho(\vec r\,',t_r)(\vec r\cdot\vec r\,')\vec r\,'$$

$$\underline{\dot{\vec q}(t_r,\tfrac{\vec r}{r})} = \int d^3r'\,\vec j(\vec r\,',t_r) + \underline{\frac{1}{cr}}\int d^3r'\,\underline{(\vec r\cdot\vec r\,')}\dot{\vec j}(\vec r\,',t_r)+\dots$$

$$\underline{= \int d^3r'\,\vec r\,'\dot\rho(\vec r\,',t_r)}$$

$$\underline{+\,\frac{1}{2c}\int d^3r'\,[\vec r\,'\times\dot{\vec j}(\vec r\,',t_r)]\times\frac{\vec r}{r}}$$

$$\underline{+\,\frac{1}{6c}\int d^3r'\;3\left(\frac{\vec r}{r}\cdot\vec r\,'\right)\vec r\,'\ddot\rho(\vec r\,',t_r) + \dots}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec p(t) &:= \int d^3r\;\vec r\,\rho(\vec r,t) && (49a)\\ \vec m(t) &:= \frac{1}{2c}\int d^3r\,[\vec r\times\vec j(\vec r,t)] && (49b)\\ Q_{ij}(t) &:= \int d^3r\;3x_ix_j\,\rho(\vec r,t) && (49d)\end{aligned}}$$

$$\vec Q(t,\tfrac{\vec r}{r}) := \frac{\vec r}{r}\cdot\overleftrightarrow{Q}(t) \qquad (49c)$$

$$\dot{\vec q}(t_r,\tfrac{\vec r}{r}) = \underset{\text{E1-}}{\dot{\vec p}(t_r)} + \underset{\text{M1-}}{\left[\dot{\vec m}(t_r)\times\frac{\vec r}{r}\right]} + \underset{\text{E2- Strahlung}}{\frac{1}{6c}\ddot{\vec Q}(t_r,\tfrac{\vec r}{r})}+\dots$$

$$\boxed{\ddot{\vec q}(t_r,\tfrac{\vec r}{r}) = \ddot{\vec p}(t_r) + \left[\ddot{\vec m}(t_r)\times\frac{\vec r}{r}\right] + \frac{1}{6c}\dddot{\vec Q}(t_r,\tfrac{\vec r}{r})+\dots} \qquad (50)$$

Mit $\ddot{\vec q}$ sind $\vec B_s$, $\vec E_s$ und $\frac{dP}{d\Omega}$ bekannt!

Bemerkung:

Anstelle von

$$Q_{ij}(t) = \int d^3r \; 3x_i x_j \, \rho(\vec{r},t) \qquad (\overline{Q}_{ij} \text{ in Elektrostatik})$$

kann man auch

$$Q_{ij}(t) = \int d^3r \left[3x_i x_j \underline{- r^2\delta_{ij}}\right]\rho(\vec{r},t) \qquad (Q_{ij} \text{ in Elektrostatik})$$

verwenden.

Damit ändert sich zwar das Vektorfeld

$$\vec{Q}(t_r, \tfrac{\vec{r}}{r}) = \frac{\vec{r}}{r} \cdot \overleftrightarrow{Q}(t_r)$$

nicht aber der E2-Beitrag

zu $\ddot{\vec{q}}(t_r, \frac{\vec{r}}{r}) \times \frac{\vec{r}}{r}$, welcher durch

$$\frac{1}{6c}\,\dddot{\vec{Q}}(t_r, \tfrac{\vec{r}}{r}) \times \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{6c}\left[\frac{\vec{r}}{r} \cdot \dddot{\overleftrightarrow{Q}}(t_r) \times \frac{\vec{r}}{r}\right]$$

gegeben ist, da $\frac{\vec{r}}{r} \cdot \overleftrightarrow{1} = \frac{\vec{r}}{r}$ gilt.

Gleiches $\ddot{\vec{q}} \times \frac{\vec{r}}{r}$ bedeutet aber

gleiches $\vec{B}_s$, $\vec{E}_s$ und $\frac{dP}{d\Omega}$!

Voraussetzungen für die Brauchbarkeit obiger Multipolentwicklung

d charakteristische Lineardimension der Quellen

T charakteristisches Zeitintervall für die zeitliche Änderung der Quellen

Bedingung $\quad \left|\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{cr}\right|_{\substack{max \\ \text{bzgl.} \\ \text{Quelle}}} \sim \frac{d}{c} \ll T \qquad (51)$

Speziell:

a) Handelt es sich um eine beschleunigt bewegte Ladung mit der Größenordnung v der Teilchengeschwindigkeit, so gilt

$$v \sim \frac{d}{T} \qquad \Longrightarrow \text{ Bedingung } \; v \ll c \qquad (52)$$

b) Handelt es sich um einen zeitlich harmonischen Vorgang mit der Wellenlänge λ der emittierten Strahlung, so gilt

$$T = T_s = \frac{\lambda}{c}$$

$$\Longrightarrow \text{ Bedingung } \quad d \ll \lambda \qquad (53)$$

VI. 2. D. Hertzscher Vektor

In der Strahlungstheorie wird öfter durch

$$\phi(\vec{r},t) = -\operatorname{div} \vec{Z}(\vec{r},t)$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{Z}(\vec{r},t)}{\partial t} \tag{54}$$

ein "Superpotential", der Hertzsche Vektor $\vec{Z}(\vec{r},t)$, eingeführt.

Lorenzeichung automatisch erfüllt:

$$\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi(\vec{r},t)}{\partial t} \equiv 0 \checkmark \tag{55}$$

Führt man noch durch

$$\rho(\vec{r},t) = -\operatorname{div} \vec{P}(\vec{r},t)$$

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \frac{\partial \vec{P}(\vec{r},t)}{\partial t} \tag{57}$$

den sog. Polarisationsvektor $\vec{P}(\vec{r},t)$ ein, so ist auch die KG automatisch erfüllt:

$$\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r},t) + \frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} = 0 \tag{58}$$

<u>Bemerkung:</u> Beziehungen zwischen $\vec{P}, \rho, \vec{j}$ <u>mathematisch formal</u> gleich wie in Dielektrikum zwischen elektrischer Polarisation, Polarisationsladungs- und Polarisationsstrom=dichte.

Verlangt man vom Hertzschen Vektor, daß er Lösung von

$$\boxed{\Box \vec{Z}(\vec{r},t) = -4\pi \vec{P}(\vec{r},t)} \tag{59}$$

ist, so ist damit

$$\Box \phi(\vec{r},t) = -4\pi \rho(\vec{r},t) \checkmark$$

$$\Box \vec{A}(\vec{r},t) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t) \checkmark \tag{56}$$

gewährleistet.

Es gilt

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$= \underbrace{\cancel{\operatorname{grad}\operatorname{div}} \vec{Z}}_{\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{Z} + \Delta \vec{Z}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{Z} - 4\pi\vec{P}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{Z}(\vec{r},t) - 4\pi\vec{P}(\vec{r},t)$$
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{Z}(\vec{r},t) \qquad (61)$$

Die retardierte Lösung für $\vec{Z}(\vec{r},t)$ lautet

$$\vec{Z}(\vec{r},t) = \int d^3r' \, \frac{\vec{P}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad (60)$$

Entwicklung nach Potenzen von $\frac{1}{r}$ gibt analog zu Gl. (34)

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \overbrace{-\frac{\vec{r}}{c^2 r^2} \times \underbrace{\int d^3r' \, \ddot{\vec{P}}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{cr}\right)}_{\ddot{\vec{q}}\left(t-\frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}\right)}}^{\vec{B}_s(\vec{r},t)} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

womit

$$\vec{q}\left(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}\right) = \int d^3r' \, \vec{P}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{cr}\right)$$

und

$$\boxed{\vec{Z}(\vec{r},t) = \frac{\vec{q}\left(t-\frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}\right)}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)}$$

Aus dem $\frac{1}{r}$-Anteil von $\vec{Z}(\vec{r},t)$ kann man also das Strahlungsmoment $\vec{q}\left(t-\frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}\right)$ ablesen und damit $\vec{B}_s, \vec{E}_s$, $\frac{dP}{d\Omega}$ berechnen.

VI.2.E. Beispiel: gleichmäßige Abbremsung einer nichtrelativistischen Punktladung

z (Wahl des KS)

$t=T$: Stillstand

konstante Verzögerung $a = \frac{v_0}{T}$

$t=0$: Abbremsung beginnt

konstante Geschwindigkeit $v_0 \ll c$

Für Berechnung der Abstrahlung nur

$$\ddot{\vec{R}}(t) = -a\vec{e}_z \quad , \quad 0 < t < T$$

benötigt.

$v_0 \ll c$: E1-Näherung möglich:

$$\ddot{\vec{q}}(t_r, \cancel{\vec{r}}) = \ddot{\vec{p}}(t_r) + \underbrace{\ldots}_{\longrightarrow}$$

Zeige selbst:

1) $\ddot{\vec{m}}(t_r) \equiv \vec{0}$

2) $\frac{1}{6c}\dddot{\vec{Q}}\left(t_r, \frac{\vec{r}}{r}\right)$ betragsmäßig um Ordnung $\frac{v_0}{c}$ kleiner als $\ddot{\vec{p}}(t_r)$

<u>$0 < t < T$:</u>

$$\vec{p}(t) = q\vec{R}(t)\ , \quad \ddot{\vec{p}}(t) = q\ddot{\vec{R}}(t) = -qa\vec{e}_z$$

$\Rightarrow$ (E1-Näherung)

<u>$0 < t_r < T$:</u>

$$\ddot{\vec{q}}(t_r) \approx \ddot{\vec{p}}(t_r) = -qa\vec{e}_z \qquad (64)$$

$$\left[\ddot{\vec{q}}(t_r) \times \frac{\vec{r}}{r}\right]^2 = q^2a^2\sin^2\vartheta \quad {}^{*)}$$

$$\frac{dP}{d\Omega}\left(t_r, \frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{q^2a^2}{4\pi c^3}\sin^2\vartheta \quad {}^{*)}$$

(unabhängig von φ)

$$P(t_r) = \int_{[4\pi]} dP\left(t_r, \frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{q^2a^2}{4\pi c^3}\underbrace{\int_{[4\pi]} d\Omega\,\sin^2\vartheta}_{2\pi\cdot 2\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{8\pi}{3}}$$

$$P(t_r) = \frac{2q^2a^2}{3c^3} \quad {}^{*)} \qquad (65)$$

gesamte während der Abbremsphase abgestrahlte Energie: $a = \frac{v_0}{T}$

$$\boxed{W_s = \frac{2q^2a^2}{3c^3}T = \frac{2q^2v_0^2}{3c^3}\frac{1}{T}} \quad {}^{*)} \qquad (66)$$

*) In E1-Näherung, also eigentlich "$\approx$".

$$W_s = \frac{2q^2v_0^2}{3c^3}\frac{1}{T}$$

kinetische Energie der Ladung vor der Abbremsung:

$$W_{kin} = \frac{mv_0^2}{2} \qquad (67)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{W_s}{W_{kin}} = 2\,\frac{\tau_s}{T} \quad \text{mit} \quad \tau_s := \frac{2q^2}{3mc^3} \qquad (68)$$

<u>Elektron</u>: $\tau_{s,e} = \frac{2e^2}{3m_ec^3} \approx 6\cdot 10^{-24}\,s$

$\Rightarrow \quad W_s \ll W_{kin}$ für "realistische" Werte von T

<u>Bemerkung</u>: <u>Abstrahlung</u> ist ein "<u>relativistischer Effekt</u>": eine beschleunigt bewegte Ladung strahlt umso stärker, je näher $|\vec{v}(t)|$ bei c und je größer $\vec{a}(t)$ ist.

VI.3. Abstrahlung durch zeitlich harmonische Quelldichten,

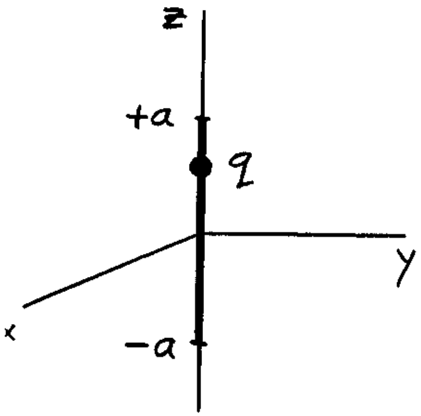
d.h.

$$\boxed{\begin{aligned}\rho(\vec r,t) &= \rho(\vec r)\, e^{-i\omega t} + c.c.\\ \vec j(\vec r,t) &= \vec j(\vec r)\, e^{-i\omega t} + c.c.\end{aligned}} \qquad (69)$$

Bemerkung: Der Titel "Abstrahlung bei periodischer Zeitabhängigkeit" ist mißverständlich.

z.B.: linear schwingende Punktladung

$$\vec R(t) = a \sin\omega_0 t\, \vec e_z$$



$$\rho(\vec r,t) = q\,\delta(\vec r - \vec R(t))$$

$$= q\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z - a\sin\omega_0 t)$$

$$\vec j(\vec r,t) = q\,\vec v(t)\,\delta(\vec r - \vec R(t))$$

$$= q a\omega_0 \cos\omega_0 t \,\cdot$$

$$\cdot\, \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z - a\sin\omega_0 t)\,\vec e_z$$

$\rho, \vec j$ lassen sich nicht in der Form (69) schreiben!

VI.3.A. Näherungsentwicklung für große Wellenlängen

$$\dot{\vec q}\left(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec r}{r}\right) = \int d^3r'\, \vec j\left(\vec r', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec r\cdot\vec r'}{cr}\right)$$

$$\vec j\left(\vec r', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec r\cdot\vec r'}{cr}\right) = \underset{\uparrow}{\vec j(\vec r')}\, e^{-i\omega\left(t - \frac{r}{c} + \underset{\uparrow}{\frac{\vec r\cdot\vec r'}{cr}}\right)}$$

$$+ c.c.$$

$$k := \frac{\omega}{c}, \quad \vec k := k\frac{\vec r}{r} \qquad (70)$$

$$\dot{\vec q}\left(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec r}{r}\right) = e^{-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} \int d^3r'\, \vec j(\vec r')\, e^{-i\vec k\cdot\vec r'}$$

$$+ c.c. \qquad (71)$$

Grenzfall großer Wellenlängen

$$d \ll \lambda$$

d charakteristische Lineardimension der lokalisierten Quellverteilung

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{\nu}$$ Wellenlänge der emittierten Strahlung

$$|\vec k\cdot\vec r'| = \frac{\omega}{c}\left|\frac{\vec r}{r}\cdot\vec r'\right| \le \frac{2\pi}{\lambda} d \ll 1 \qquad (72)$$

$$e^{\pm i\vec k\cdot\vec r'} = 1 \pm i\vec k\cdot\vec r' + \ldots \qquad (73)$$

liefert E1-, M1-, E2-Beitrag

<u>(50):</u>

$$\ddot{\vec{q}}(t_r, \tfrac{\vec{r}}{r}) = \underbrace{\ddot{\vec{p}}(t_r)}_{E1} + [\underbrace{\ddot{\vec{m}}(t_r)}_{M1} \times \tfrac{\vec{r}}{r}]$$

$$+ \frac{1}{6c} \underbrace{\frac{\vec{r}}{r} \cdot \dddot{\overleftrightarrow{Q}}(t_r)}_{E2} + \dots$$

<u>M1, E2</u> : gleiche Ordnung in $\frac{d}{\lambda}$,

eine Ordnung kleiner in $\frac{d}{\lambda}$ als E1

<u>HIER:</u>

$$\vec{p}(t) = \int d^3r\, \vec{r} \rho(\vec{r},t) = e^{-i\omega t} \underbrace{\int d^3r\, \vec{r} \rho(\vec{r})}_{=:\, \vec{p}} + c.c.$$

i.a. komplex

(74a), (76)

$$\vec{m}(t) = \frac{1}{2c} \int d^3r\, [\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r},t)]$$

(74b), (83)

$$= e^{-i\omega t} \underbrace{\frac{1}{2c} \int d^3r\, [\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})]}_{=:\, \vec{m}} + c.c.$$

i.a. komplex

$$Q_{ij}(t) = \int d^3r\, \underbrace{3x_i x_j}\, \rho(\vec{r},t)$$

<u>oder</u> $3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}$

(74c), (90) bzw. (93)

$$= e^{-i\omega t} \underbrace{\int d^3r\, \overbrace{3x_i x_j}\, \rho(\vec{r})}_{=:\, Q_{ij}} + c.c.$$

i.a. komplex

<u>Zur Erinnerung</u>: Die alternativen Definitionen liefern zwar <u>verschiedenes $\ddot{\vec{q}}$</u>, aber gleiches $\ddot{\vec{q}} \times \frac{\vec{r}}{r}$ und damit <u>gleiches</u> $\vec{E}_s, \vec{B}_s, \frac{dP}{d\Omega}$.

$$\ddot{\vec{q}}(t_r, \tfrac{\vec{r}}{r}) = \ddot{\vec{p}}(t_r) + [\ddot{\vec{m}}(t_r) \times \tfrac{\vec{r}}{r}] + \frac{1}{6c} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \dddot{\overleftrightarrow{Q}}(t_r) + \dots$$

$$\vec{q}(t_r, \tfrac{\vec{r}}{r}) = \vec{p}(t_r) + [\vec{m}(t_r) \times \tfrac{\vec{r}}{r}] + \frac{1}{6c} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \dot{\overleftrightarrow{Q}}(t_r) + \dots$$

$$\overleftrightarrow{Q}(t) = \overleftrightarrow{Q}\, e^{-i\omega t} + c.c.$$

$$\dot{\overleftrightarrow{Q}}(t) = -ick\, \overleftrightarrow{Q}\, e^{-i\omega t} + c.c.$$

$$\vec{q}(t_r, \tfrac{\vec{r}}{r}) = e^{-i\omega t_r} \left\{ \vec{p} + [\vec{m} \times \tfrac{\vec{r}}{r}] - \frac{ik}{6} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \overleftrightarrow{Q} + \dots \right\} + c.c. \qquad (75)$$

$$\boxed{\vec{q}\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right) = e^{i(kr-\omega t)}\left\{\vec{p} + \left[\vec{m}\times\frac{\vec{r}}{r}\right] - \frac{ik}{6}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\overleftrightarrow{Q} + \dots\right\} + c.c.} \tag{75}$$

$$\underline{\ddot{\vec{q}}\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right) = -c^2k^2\,\vec{q}\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right)}$$

(36): $\vec{B}_s(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2 r}\left[\ddot{\vec{q}}\times\frac{\vec{r}}{r}\right]$

(39): $\vec{E}_s(\vec{r},t) = \vec{B}_s(\vec{r},t)\times\frac{\vec{r}}{r}$

(42b): $$\frac{dP}{d\Omega}\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{1}{4\pi c^3}\left[\ddot{\vec{q}}\times\frac{\vec{r}}{r}\right]^2 = \frac{1}{4\pi c^3}\left[\ddot{\vec{q}}^{\,2} - \left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\ddot{\vec{q}}\right)^2\right]$$

mit $\ddot{\vec{q}} = \ddot{\vec{q}}\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right)$

Achtung! Mit der Entwicklung von $\ddot{\vec{q}}$ als Summe eines E1–, M1–, E2–, ... Beitrages stellen sich auch $\vec{B}_s$, $\vec{E}_s$ als Summe entsprechender Beiträge (E1-Feld, M1-Feld, E2-Feld, ...) dar. In $\frac{dP}{d\Omega}$ treten aber i.a. von null verschiedene Interferenzterme auf.

Da jedoch die Interferenzterme bei der Winkelintegration keine Beiträge liefern (s. Jackson) stellt sich P wieder als Summe eines E1–, eines M1–, eines E2–, ... Beitrages dar.

VI.3.B. Elektrische Dipolstrahlung

$$\vec{q}\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right) = \underbrace{e^{i(kr-\omega t)}\,\vec{p}}_{\text{E1-Beitrag}} + \left[\vec{m}\times\frac{\vec{r}}{r}\right] - \frac{ik}{6}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\overleftrightarrow{Q} + \dots\Big\} + c.c. \tag{77}$$

$$\ddot{\vec{q}}\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right) = -c^2k^2\,\vec{q}\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$\Rightarrow$

E1– Strahlungsfeld

$$\vec{B}_s(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2 r}\left[\ddot{\vec{q}}\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right)\times\frac{\vec{r}}{r}\right] = k^2\,\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\left(\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{p}\right) + c.c. \tag{78}$$

$$\vec{E}_s(\vec{r},t) = k^2\,\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\left[\left(\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{p}\right)\times\frac{\vec{r}}{r}\right] + c.c.$$

$\frac{dP}{d\Omega}$ für reine E1- Strahlung

Hat man es mit einem ortsfesten zeitabhängigen elektrischen Punktdipol (Hertzschen Dipol) zu tun, oder kann man die höheren Terme wegen der Kleinheit von d gegen λ vernachlässigen, so hat man

$$\vec{q}\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right) = e^{i(kr-\omega t)}\,\vec{p} + c.c.$$

$$\ddot{\vec{q}}\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right) = -c^2k^2\,e^{i(kr-\omega t)}\,\vec{p} + c.c.$$

$$\frac{dP}{d\Omega}\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{1}{4\pi c^3}\left[\ddot{\vec{q}}\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right)\times\frac{\vec{r}}{r}\right]^2$$

$$= \frac{c}{4\pi}k^4\left[e^{i(kr-\omega t)}\left(\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{p}\right) + e^{-i(kr-\omega t)}\left(\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{p}^*\right)\right]^2$$

$$= \frac{c}{4\pi}k^4\left[\cancel{2}\left|\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{p}\right|^2 + e^{2i(kr-\omega t)}\left(\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{p}\right)^2 + \cancel{e^{-2i(kr-\omega t)}\left(\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{p}^*\right)^2}\right] + c.c. \qquad |\vec{a}|^2 := \vec{a}\cdot\vec{a}^*$$

$$\frac{dP}{d\Omega}\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{c}{4\pi}k^4\left\{\left|\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{p}\right|^2 + e^{2i(kr-\omega t)}\left(\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{p}\right)^2\right\} + c.c. \qquad (79)$$

Zeitmittel über eine Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\langle f\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, f(t)$$

$$\left\langle\frac{dP}{d\Omega}\right\rangle\Big(\underbrace{\frac{\vec{r}}{r}}_{\vartheta,\varphi}\Big) = \frac{c}{2\pi}k^4\left|\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{p}\right|^2 \qquad (80)$$

Winkelabhängigkeit im Spezialfall eines in einer festen Richtung $\vec{e}$ "schwingenden" Dipols (Dipolmoment besitzt zu allen Zeiten dieselbe Richtung)

$$\vec{p}(t) = p(t)\,\vec{e} = p_0\cos(\omega t-\delta)\,\vec{e}$$

$$= \vec{p}\,e^{-i\omega t} + c.c.$$

Bemerkung 1: Dies bedeutet, daß die Komponenten p_x, p_y, p_z des komplexen Vektors $\vec{p}$ Phasendifferenzen 0 oder π besitzen.

Bemerkung 2: Für einen in der xy-Ebene rotierenden Dipol hätte man beispielsweise

$$\vec{p}(t) = p_0 \left[\cos(\omega t - \delta)\,\vec{e}_x + \sin(\omega t - \delta)\,\vec{e}_y\right].$$

In diesem Fall wäre $p_z = 0$ und p_x, p_y hätten die Phasendifferenz $\frac{\pi}{2}$.

"Schwingender" Dipol: Wahl des KS: $\vec{e} = \vec{e}_z$

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle \left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{c}{2\pi} k^4 \left| \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{p} \right|^2$$

$$\vec{p}(t) = p_0 \cos(\omega t - \delta)\,\vec{e}_z$$

$$= \vec{p}\, e^{-i\omega t} + c.c.$$

$$\Rightarrow \quad \left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle (\vartheta) = \frac{c}{8\pi} k^4 \underbrace{|2\vec{p}|^2}_{p_0^2} \sin^2\vartheta \qquad (81)$$

Winkelintegral: $\frac{8\pi}{3}$ $\Downarrow$

$$\langle P \rangle = \frac{ck^4}{3} \overbrace{|2\vec{p}|^2}^{p_0^2} \propto \frac{1}{\lambda^4} \qquad (82)$$

Ergebnis für $\langle P \rangle$ gilt für beliebigen elektrischen Dipol mit Moment $\vec{p}$ (z.B. auch für rotierenden)

VI. 3.C. Magnetische Dipolstrahlung

$$\vec{q}\left(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}\right) = e^{i(kr - \omega t)} \left\{ \vec{p} + \underbrace{\left[\vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r}\right]}_{\text{M1-Beitrag}} - \frac{ik}{6} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \overleftrightarrow{Q} + \ldots \right\} + c.c. \qquad (84)$$

$\Rightarrow$ M1-Strahlungsfeld

$$\vec{B}_s(r,t) = \frac{1}{c^2 r} \left[\ddot{\vec{q}}\left(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}\right) \times \frac{\vec{r}}{r} \right]$$

$$= k^2 \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \left[\left(\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{m} \right) \times \frac{\vec{r}}{r} \right] + c.c.$$

E1: $\quad k^2 \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \left(\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{p} \right) + c.c.$

$$\vec{E}_s(r,t) = -k^2 \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \left(\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{m} \right) + c.c. \qquad (85)$$

E1: $\quad k^2 \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \left[\left(\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{p} \right) \times \frac{\vec{r}}{r} \right] + c.c.$

Vergleich E1 $\longleftrightarrow$ M1 zeigt:

E1		M1
$\vec{p}$	$\longrightarrow$	$\vec{m}$
$\vec{E}_s$	$\longrightarrow$	$\vec{B}_s$
$\vec{B}_s$	$\longrightarrow$	$-\vec{E}_s$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}_s \times \vec{B}_s \longrightarrow \vec{B}_s \times (-\vec{E}_s) = \vec{E}_s \times \vec{B}_s$$

Folge: Die Formeln für $\frac{dP}{d\Omega}$, $\left\langle\frac{dP}{d\Omega}\right\rangle$, $\langle P\rangle$

können vom E1-Fall formal übernommen werden, es ist lediglich überall $\vec{p}$ durch $\vec{m}$ zu ersetzen: Skriptum Gln. (86) – (89).

Auch die entsprechenden Überlegungen sind analog.

VI.3.D. Elektrische Quadrupolstrahlung

$$\vec{q}\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right) = e^{i(kr-\omega t)}\left\{\vec{p}+\left[\vec{m}\times\frac{\vec{r}}{r}\right]-\frac{ik}{6}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\overleftrightarrow{Q}+\ldots\right\} + c.c. \qquad \text{E2-Beitrag} \tag{91}$$

$$\ddot{\vec{q}}\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right) = -c^2k^2\,\vec{q}\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$\Rightarrow$ E2-Strahlungsfeld

$$\vec{B}_s(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2 r}\left[\ddot{\vec{q}}\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right)\times\frac{\vec{r}}{r}\right] = \frac{ik^3}{6}\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\overleftrightarrow{Q}\times\frac{\vec{r}}{r}\right)+c.c. \tag{92a}$$

$$\vec{E}_s(\vec{r},t) = \frac{ik^3}{6}\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\left[\left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\overleftrightarrow{Q}\times\frac{\vec{r}}{r}\right)\times\frac{\vec{r}}{r}\right] + c.c. \tag{92b}$$

$\frac{dP}{d\Omega}$ für reine E2-Strahlung

$$\frac{dP}{d\Omega}\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{1}{4\pi c^3}\left[\ddot{\vec{q}}\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right)\times\frac{\vec{r}}{r}\right]^2$$

$$\ddot{\vec{q}}\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{ic^2k^3}{6}\,e^{i(kr-\omega t)}\,\frac{\vec{r}}{r}\cdot\overleftrightarrow{Q}+c.c.$$

$$\frac{dP}{d\Omega}\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{c}{4\pi}\frac{k^6}{36}\left[i\,e^{i(kr-\omega t)}\left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\overleftrightarrow{Q}\times\frac{\vec{r}}{r}\right) - i\,e^{-i(kr-\omega t)}\left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\overleftrightarrow{Q}^*\times\frac{\vec{r}}{r}\right)\right]^2$$

$$\frac{dP}{d\Omega}\left(t-\frac{r}{c},\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{c}{4\pi}\frac{k^6}{36}\left\{\left|\frac{\vec{r}}{r}\cdot\overleftrightarrow{Q}\times\frac{\vec{r}}{r}\right|^2 - e^{2i(kr-\omega t)}\left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\overleftrightarrow{Q}\times\frac{\vec{r}}{r}\right)^2\right\}+c.c. \tag{94}$$

$$\left\langle\frac{dP}{d\Omega}\right\rangle\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{c}{2\pi}\frac{k^6}{36}\left|\frac{\vec{r}}{r}\cdot\overleftrightarrow{Q}\times\frac{\vec{r}}{r}\right|^2 \tag{95}$$

ϑ,φ komplizierte Winkelabhängigkeit

Winkelabhängigkeit im Spezialfall eines "schwingenden" Quadrupols (Hauptachsenrichtungen von $\overleftrightarrow{Q}(t)$ zeitunabhängig)

Wahl des KS: Hauptachsenrichtungen als Koordinatenachsenrichtungen gewählt

Dann gilt:

$$\overleftrightarrow{Q} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\vec{r}}{r} \cdot \overleftrightarrow{Q} = \begin{pmatrix} Q_{xx} \frac{x}{r} \\ Q_{yy} \frac{y}{r} \\ Q_{zz} \frac{z}{r} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\vec{r}}{r} \cdot \overleftrightarrow{Q} \times \frac{\vec{r}}{r} = (Q_{yy} - Q_{zz}) \frac{yz}{r^2} \vec{e}_x + (Q_{zz} - Q_{xx}) \frac{zx}{r^2} \vec{e}_y + (Q_{xx} - Q_{yy}) \frac{xy}{r^2} \vec{e}_z$$

$$\left| \frac{\vec{r}}{r} \cdot \overleftrightarrow{Q} \times \frac{\vec{r}}{r} \right|^2 = |Q_{yy} - Q_{zz}|^2 \frac{y^2 z^2}{r^4} + \text{zyklisch}$$

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle (\vartheta, \varphi) \tag{96}$$
$$= \frac{c}{2\pi} \frac{k^6}{36} \Big\{ |Q_{zz} - Q_{xx}|^2 \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta \cos^2\varphi + |Q_{yy} - Q_{zz}|^2 \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta \sin^2\varphi + |Q_{xx} - Q_{yy}|^2 \sin^4\vartheta \sin^2\varphi \cos^2\varphi \Big\}$$

alle Winkelintegrale haben den Wert $\Downarrow$ $\frac{4\pi}{15}$

$$\langle P \rangle = \frac{ck^6}{360} \frac{4}{3} \Big\{ |Q_{zz} - Q_{xx}|^2 + |Q_{yy} - Q_{zz}|^2 + |Q_{xx} - Q_{yy}|^2 \Big\}$$

Alle bisher angeschriebenen Formeln gelten für beide Arten der Definition von $\overleftrightarrow{Q}$.

Bei Verwendung der Definition mit $\mathrm{Sp}\, \overleftrightarrow{Q} = 0$ kann man das Ergebnis weiter vereinfachen:

$$\langle P \rangle = \frac{ck^6}{360} \Big\{ |2Q_{xx}|^2 + |2Q_{yy}|^2 + |2Q_{zz}|^2 \Big\}$$

Für allgemeinen elektrischen Quadrupol gilt (97)

$$\langle P \rangle = \frac{ck^6}{360} \sum_{ij} |2Q_{ij}|^2 \propto \frac{1}{\lambda^6}$$

Beispiel: Bzgl. der z-Achse rotationssymmetrischer "schwingender" elektrischer Quadrupol im Hauptachsensystem

Konvention mit $\mathrm{Sp}\,\overleftrightarrow{Q}=0$ verwendet:

$$\underline{\underline{Q_{xx} = Q_{yy} = -\tfrac{1}{2}Q}} \;,\; \underline{Q_{zz} =: Q}$$

$$\Rightarrow \quad |Q_{zz} - Q_{xx}|^2 = |Q_{yy} - Q_{zz}|^2 = \frac{9}{4}|Q|^2$$

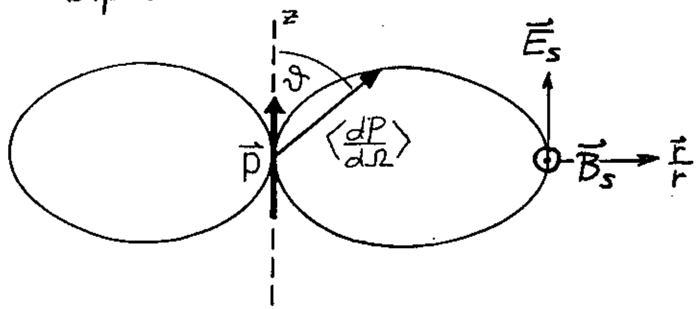
$$|Q_{xx} - Q_{yy}|^2 = 0$$

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle(\vartheta) = \frac{c}{2\pi}\,\frac{k^6}{36}\,\underline{\frac{9}{4}|Q|^2} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta \cos^2\varphi + \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta \sin^2\varphi \right\} \quad \text{— } \sin^2\vartheta\cos^2\vartheta$$

$$\underline{\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle(\vartheta) = \frac{c k^6}{128\pi}\,|2Q|^2 \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta}$$

"Schwingender" elektrischer bzw. magnetischer Dipol



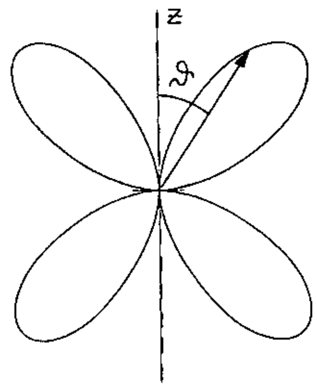
$\vec{p} \longrightarrow \vec{m}$

$\vec{E}_s \longrightarrow \vec{B}_s$

$\vec{B}_s \longrightarrow -\vec{E}_s$

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle \propto \sin^2\vartheta$$

Rotationssymmetrischer "schwingender" elektrischer Quadrupol



$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle \propto \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta$$

VI. 4. Multipolstrahlung

(Sphärische Multipolentwicklung)

NICHT VORGETRAGEN

NICHT PRÜFUNGSSTOFF

SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

VII. RELATIVISTISCHE KINEMATIK

VII.1. Grundlagen

VII.1.A. Grundlegende Experimente

Situation Ende des 19. Jhdts:

Äther: "Medium" für die Ausbreitung elm. Felder

- erfüllt den ganzen Raum, d.h. ist "überall"
- verhält sich als "Trägermedium" elm. Wellen wie ein elastischer Festkörper (Transversal= wellen!)
- setzt langsam bewegten Materieobjekten keinen merklichen Widerstand entgegen (Himmelsmechanik!)

Nähere Details: M. Born
Die Relativitätstheorie
Einsteins