

FOLIEN VON D. GRAU ZUR  
VORLESUNG "ELEKTRODYNAMIK  
UND RELATIVITÄTSTHEORIE"  
*nach dem Skriptum von H. Nowotny*

Kapitel 5

V. ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN

IM VAKUUM

V.1 Ebene Wellen

V.1. A. Allgemeine (i.a. aperiodische) ebene Wellen

Homogene Maxwellgleichungen

(2a,b)

$$\text{div } \vec{E}(\vec{r},t) = 0, \quad \text{rot } \vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B}(\vec{r},t) = 0, \quad \text{rot } \vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

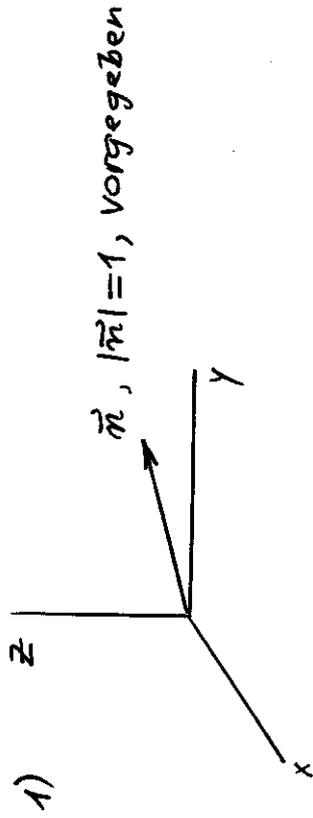
Wir betrachten zeitabhängige Felder, welche diese Gln. im ganzen Raum erfüllen. Diese beschreiben elm. Wellenfelder, das sind die Felder in großen Entfernungen von zeitabhängigen Quellen (s. Abstrahlung in Kapitel VI).

(2a,b)  $\Rightarrow$  (Rotorbildung in den Rotorgln.)

$$\boxed{\square \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{0}, \quad \square \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{0}} \quad (3)$$

(notwendige Bedgn. für Erfüllung der Maxwell-Gln.)

Spezielle Partikulärlösungen:



2)  $f(\vec{r})$  beliebige (2-mal stetig diffb.) reellwertige Funktion einer reellen Variablen  $\xi$  \*)

Dann gilt: "von"

$$u(\vec{r},t) = f(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct)$$

ist Partikulärintegral von

$$\square u(\vec{r},t) = 0.$$

Beweis:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = n_x f' \Rightarrow \Delta u = \underbrace{n^2}_{=1} f'' = f''$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = -f' \Rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f'' = f''$$

\*) Die Aussage gilt natürlich auch für eine konstante Funktion  $f(\xi) = \text{konst.}$ , im Zusammenhang mit der Wellenausbreitung interessieren uns aber nur nicht konstante Fktn.

Somit:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 f(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{B}_0 f(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct) \end{aligned}$$

sind für beliebige reelle konstante Vektoren  $\vec{E}_0, \vec{B}_0$  Partikulärlösungen von  $\square \vec{E} = 0, \square \vec{B} = 0$

Damit diese Ausdrücke aber auch Partikulärlösungen der Maxwell-Gln. sind, muß

$$\text{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad (5)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{B}_0 = 0$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{n} \times \vec{E}_0 = \vec{B}_0 \quad (6)$$

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{n} \times \vec{B}_0 = -\vec{E}_0$$

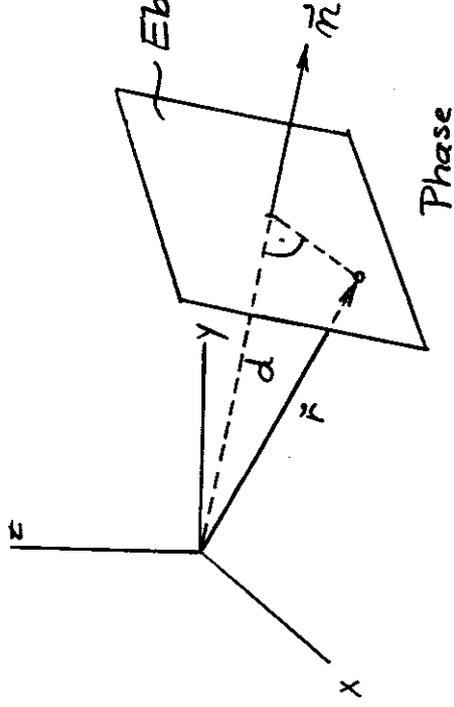
$\vec{n}, \vec{E}_0, \vec{B}_0$  orthogonales Dreibein  
(Rechtssystem)

$$|\vec{E}_0| = |\vec{B}_0|$$

In Richtung  $\vec{n}$  mit der Geschwindigkeit  $c$  fortschreitende (i.a. aperiodische) ebene Welle.

V-3

(4)



$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 f(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = (\vec{n} \times \vec{E}_0) f(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct) = \vec{n} \times \vec{E}(\vec{r}, t)$$

1) Ebene  $\vec{n} \cdot \vec{r} = d, t$  fest:

$$\vec{n} \cdot \vec{r} - ct = d - ct \text{ fest}$$

$\Rightarrow \vec{E}, \vec{B}$  in allen Punkten der Ebene gleiche Werte

ebene Welle

2) Werte von  $\vec{E}, \vec{B}$ , welche zum Zeitpunkt  $t$  in Ebene  $\vec{n} \cdot \vec{r} = d$  vorliegen, liegen zum

Zeitpunkt  $t + \Delta t$  in Ebene  $\vec{n} \cdot \vec{r} = d + c\Delta t$

Vor:  $d + c\Delta t - c(t + \Delta t) = d - ct$

Ausbreitung der Welle in Richtung  $\vec{n}$  mit

der Geschwindigkeit (PHASENGESCHWINDIGKEIT)  $c$

V-4

Bemerkung: "außer Konkurrenz"

allgemeinste in Richtung  $\vec{n}$  fortschreitende ebene Welle:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_{01} f_1(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct) + \vec{E}_{02} f_2(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{n} \times \vec{E}(\vec{r}, t)$$

$$\text{mit } \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{E}_{01} = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{E}_{02} = 0$$

V.1.B. Monochromatische (zeitlich harmonische)

ebene Wellen mit Kreisfrequenz  $\omega$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.} \quad (7a)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.} \quad (7b)$$

HIER:  $\vec{E}_0, \vec{B}_0$  konstante komplexe Amplituden=  
Vektoren

Entspricht einer Fourierkomponente.

(II.27a-d) (fouriertransformierte homogene Maxwell-Gln.)

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0, \quad \vec{k} \times \vec{E}_0 = \frac{\omega}{c} \vec{B}_0 \quad (8a)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0, \quad \vec{k} \times \vec{B}_0 = -\frac{\omega}{c} \vec{E}_0 \quad (8b)$$

Gln.

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0, \quad \vec{k} \times \vec{E}_0 = \frac{\omega}{c} \vec{B}_0$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0, \quad \vec{k} \times \vec{B}_0 = -\frac{\omega}{c} \vec{E}_0$$

dann und nur dann widerspruchsfrei, wenn

$$\boxed{\omega = \omega(k) = ck}$$

DISPERSIONS=  
BEZIEHUNG (9)

gilt ( $k = |\vec{k}|$ )

Bemerkung: Dann ist auch die Wellengleichung für  $\vec{E}, \vec{B}$  erfüllt. ●

Mit

$$\vec{k} = k \vec{n} = \frac{\omega}{c} \vec{n}$$

folgt dann wieder

$$\vec{n} \cdot \vec{E}_0 = 0, \quad \vec{n} \times \vec{E}_0 = \vec{B}_0$$

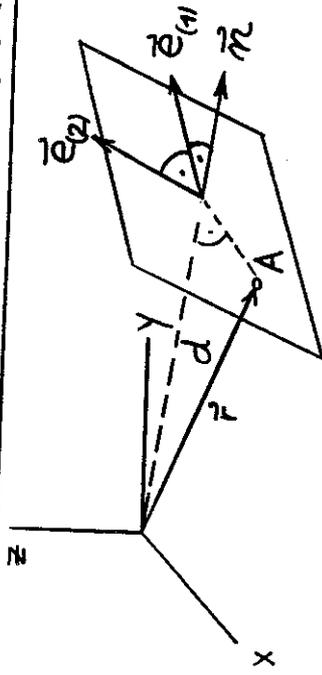
$$[\vec{n} \cdot \vec{B}_0 = 0, \quad \vec{n} \times \vec{B}_0 = -\vec{E}_0 \quad \text{redundant}]$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.}$$

$$= \vec{E}_0 e^{ik(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct)} + \text{c.c.}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{n} \times \vec{E}(\vec{r}, t)$$

V.2. Polarisationszustand einer monochromatischen ebenen Welle



$\vec{n}, \vec{e}_{(1)}, \vec{e}_{(2)}$  Orthonormalsystem (Rechtssystem)  
 Polarisationsvektoren  
 Ausbreitungsvektor

V.2.A. Lineare, zirkulare, elliptische Polarisation

$\vec{E}(F,t)$  für festes  $\vec{r}$  periodische Funktion der Zeit mit Periode  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Frage: Welchen geometrischen Ort beschreibt die Spitze des  $\vec{E}$ -vektors im Aufpunkt  $\vec{r}$  im Laufe der Zeit in der Ebene  $\vec{n} \cdot \vec{r} = d$  ?

Antwort: I.a. eine Ellipse, in speziellen Fällen eine gerade Strecke oder einen Kreis.

$$\vec{E}(F,t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.}$$

$$\vec{B}(F,t) = \vec{n} \times \vec{E}(F,t)$$

mit  $\vec{k} = k \vec{n} = \frac{\omega}{c} \vec{n}$   
 $\vec{n} \cdot \vec{E}_0 = 0$

$$\Rightarrow \vec{E}_0 = E_{(1)} \vec{e}_{(1)} + E_{(2)} \vec{e}_{(2)} \quad (11)$$

$$E_{(\alpha)} = |E_{(\alpha)}| e^{i\varphi_{(\alpha)}}, \quad \alpha=1,2$$

$$\vec{E}(F,t) = |E_{(1)}| \left( \vec{e}_{(1)} + \frac{|E_{(2)}|}{|E_{(1)}|} e^{i(\varphi_{(2)} - \varphi_{(1)})} \vec{e}_{(2)} \right) \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_{(1)})} + \text{c.c.} \quad (13)$$

maßgebend für Polarisationszustand

$$\frac{|E_{(2)}|}{|E_{(1)}|}, \quad \Delta\varphi = \varphi_{(2)} - \varphi_{(1)}$$

(Annahme:  $|E_{(1)}| \neq 0$ )

Graphische Darstellung: s. Abb.

Durch die Zerlegung (11) wurde die allgemeine monochromatische ebene Welle, als Überlagerung zweier (i.a. phasenverschobener) linear polarisierter Wellen dargestellt

Darstellung als Überlagerung zweier gegenläufig zirkular polarisierter Wellen

Komplexe Einheitsvektoren definiert:

$$\vec{e}_{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_{(1)} \pm i \vec{e}_{(2)}) \quad (14)$$

$$\Rightarrow \vec{e}_{(\pm)}^* \cdot \vec{e}_{(\pm)} = 1, \quad \vec{e}_{(\pm)}^* \cdot \vec{e}_{(\mp)} = 0 \quad (15)$$

$$\vec{e}_{(\pm)} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\vec{E}_0 = E_{(+)} \vec{e}_{(+)} + E_{(-)} \vec{e}_{(-)}$$

linkszirkulare\* rechtszirkulare Teilwelle

Zusammenhang  $E_{(+)}, E_{(-)}, E_{(1)}, E_{(2)}$  s. Skriptum

\* Grund für Bezeichnung:

$$\vec{E}_{(+)}(r,t) = E_{(+)} \vec{e}_{(+)} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c.$$

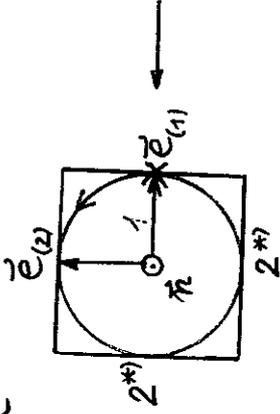
hier  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  gesetzt

$$= \frac{1}{2} (\vec{e}_{(1)} + i \vec{e}_{(2)}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \frac{1}{2} (\vec{e}_{(1)} - i \vec{e}_{(2)}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{E}_{(+)}(r,t) = \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \vec{e}_{(1)} - \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \vec{e}_{(2)} \quad (19)$$

V.2.B. Graphische Darstellung der Polarisation

Welle Gl. (19):



\* rührt von Wahl für  $|E_{(+)}|$  her; allgemein  $2 \cdot \sqrt{2} |E_{(+)}|$

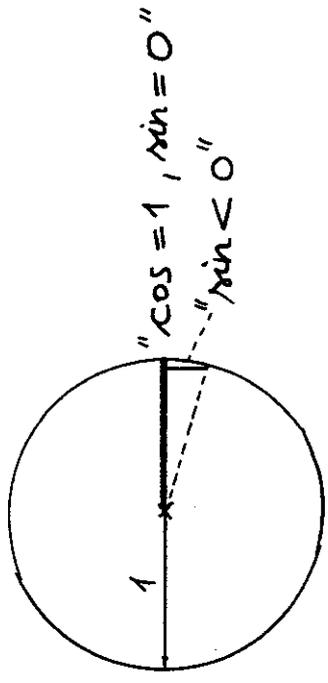
linkszirkular: "links"-Umlauf (Gegenuhrzeigersinn)

(+) positive Helizität (Projektion des DI auf Richtung  $\vec{n}$ )  
Allgemeine monochromatische ebene Welle:

$$\vec{E}(r,t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c.$$

$$\vec{E}_0 = \sum_{\alpha=1,2} E_{(\alpha)} \vec{e}_{(\alpha)}$$

+ Einheitskreis



V. 3. Energie und Impuls ebener Wellen

V. 3. A. Energiedichte und Energiestromdichte (Poyntingvektor)

[Anderer Weg als Skriptum] Für beliebige ebene Welle gilt:

$$\omega_{em}(\vec{r}, t) = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2(\vec{r}, t) + \vec{B}^2(\vec{r}, t)) = \frac{\vec{E}^2(\vec{r}, t)}{4\pi}$$

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{c}{4\pi} (\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)) = \frac{\vec{E}^2(\vec{r}, t)}{4\pi} c \vec{n}$$

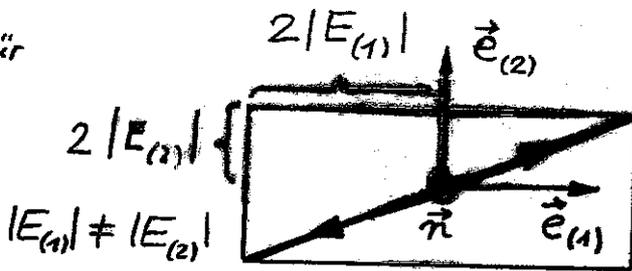
Spezialfall: monochromatische Wellen

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{E}_0^* e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{E}^2(\vec{r}, t) = \vec{E}_0^2 e^{2i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0 + c.c. = |\vec{E}_0|^2$$

$$\omega_{em}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} (|\vec{E}_0|^2 + \vec{E}_0^2 e^{2i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c.) \quad (24)$$

V-11 Zeichnung für  $|E_{(1)}| \neq 0$   
 $|E_{(2)}| \neq 0$



$$\Delta\varphi = \varphi_{(2)} - \varphi_{(1)} = 0$$

$$\vec{E} = \frac{|E_{(1)}| \vec{e}_{(1)} + |E_{(2)}| \vec{e}_{(2)}}{\sqrt{|E_{(1)}|^2 + |E_{(2)}|^2}}$$

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$$

links-

Sonderfälle:

1)  $|E_{(1)}|$  oder  $|E_{(2)}|$  null

2)  $|E_{(1)}| = |E_{(2)}|$

Was ist, wenn

$\Delta\varphi$

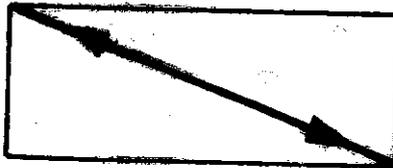
zwischen 0 und  $\frac{\pi}{2}$

zwischen  $\frac{\pi}{2}$  und  $\pi$

zwischen  $\pi$  und  $\frac{3\pi}{2}$

zwischen  $\frac{3\pi}{2}$  und  $2\pi$

liegt?



$$\Delta\varphi = \pi \hat{=} -\pi$$

$$\vec{E} = \frac{|E_{(1)}| \vec{e}_{(1)} - |E_{(2)}| \vec{e}_{(2)}}{\sqrt{|E_{(1)}|^2 + |E_{(2)}|^2}}$$

$$\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2} \hat{=} -\frac{\pi}{2}$$

rechts-

Fig. 5.2 Zusammenhang zwischen Polarisation und Phasenverschiebung

V.3.B. Impulsdichte und Impulsstrom = dichte (= - Mx-scher Spannungstensor) für eine ebene Welle

(II.53): 
$$\vec{g}_{em}(r,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} (\vec{E}(r,t) \times \vec{B}(r,t)) = \frac{\vec{S}(r,t)}{c^2} = \frac{1}{c} \omega_{em}(r,t) \vec{n} \quad (30)$$

Bemerkung: Photon  $|\vec{p}| = \frac{E}{c}$

Kraftwirkung einer ebenen Welle auf ein dünnes Absorberplättchen bei senkrechtem Einfall

Beachte: In der Ebene  $\vec{n} \cdot \vec{r} = d$  hängen  $\vec{E}, \vec{B}$  nur von  $t$  ab!

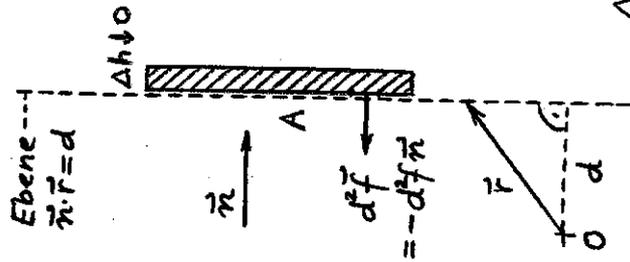
Impulserhaltungssatz (s. Folie II-47) für ein das Absorberplättchen direkt umschließendes Volumen  $V$  angeschrieben:

Kraft auf das Absorberplättchen  $\vec{F}_{mech}(t)$ :

$$\vec{F}_{mech}(t) = \vec{F}_V^{mech}(t) = \frac{d\vec{P}_V^{mech}(t)}{dt} = \underbrace{\oint_{\partial V} d^2\vec{r} \cdot \vec{T}(r,t)}_{\Delta h \downarrow} - \frac{d}{dt} \int_V d^3r \vec{g}_{em}(r,t)$$

↓  
0  
"Vorderfläche"  
("knapp außerhalb")

\*) Absorber = "schwarzer Körper" ("knapp außerhalb")



$$\vec{F}_{mech}(t) = - \int d^2f \vec{n} \cdot \vec{T}(r,t)$$
 "Vorderfläche" --- Integrand auf "Vorderfläche" des Absorbers nicht vom Ort abhängig! (Ebene  $\vec{n} \cdot \vec{r} = d$ )  $\Rightarrow$

$$\vec{F}_{mech}(t) = - A \vec{n} \cdot \vec{T}(r,t) \Big|_{\vec{n} \cdot \vec{r} = d}$$

(A Flächeninhalt der "Vorderfläche")

(II.52): 
$$\vec{T}(r,t) = \frac{1}{4\pi} [\vec{E}(r,t) \circ \vec{E}(r,t) + \vec{B}(r,t) \circ \vec{B}(r,t)] - \vec{I} \omega_{em}(r,t) \Rightarrow$$

$$\vec{n} \cdot \vec{T}(r,t) = \frac{1}{4\pi} [ \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{E}(r,t)) \vec{E}(r,t)}_0 + \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{B}(r,t)) \vec{B}(r,t)}_0 ] = \frac{1}{4\pi} \omega_{em}(r,t) \vec{n} = - \omega_{em}(r,t) \vec{n} \quad (30)$$

ebene Welle!

Kraft auf das Absorberplättchen:

$$\vec{F}_{mech}(t) = A \omega_{em}(r,t) \vec{n} \Big|_{\vec{n} \cdot \vec{r} = d} = A c \vec{g}_{em}(r,t) \Big|_{\vec{n} \cdot \vec{r} = d} \quad (31)$$

Interpretation! nur von  $t$  abhängig!

V-15

Zeitabhängigkeit von  $\omega_{em}$ ,  $\vec{S}$  und  $\vec{g}_{em}$   
für eine monochromatische ebene Welle

$$\vec{g}_{em}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{S}(\vec{r}, t)}{c^2} = \frac{1}{c} \omega_{em}(\vec{r}, t) \vec{n}$$

mit

$$\omega_{em}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \vec{E}^2(\vec{r}, t)$$

$$\vec{E}^2(\vec{r}, t) = (|\vec{E}_0|^2 + \vec{E}_0^2 e^{2i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + c.c.)$$

Beispiele:

1) Linear polarisierte Welle mit  $E_{(2)} = 0$

$$\begin{aligned} \vec{E}_{(1)}(\vec{r}, t) &= E_{(1)} \vec{e}_{(1)} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + c.c. \\ &= \underbrace{|E_{(1)}|}_{\substack{2 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_{(1)}) \\ \text{periodisch mit} \\ \text{Frequenz } 2\omega}} \left( e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_{(1)})} + c.c. \right) \vec{e}_{(1)} \end{aligned}$$

$$\vec{E}_{(1)}^2(\vec{r}, t) = 4 |E_{(1)}|^2 \cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_{(1)}) \quad (32)$$

$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$  periodisch mit Frequenz  $2\omega$

um zeitlichen Mittelwert schwankend

V-16

2) Linkszirkular polarisierte Welle ( $E_{(2)} = 0$ )

$$\vec{E}_{(1)}(\vec{r}, t) = E_{(1)} \vec{e}_{(1)} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + c.c.$$

$$|E_{(1)}| e^{i\varphi_{(1)}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_{(1)} + i\vec{e}_{(2)})$$

$\vec{E}_{(1)}(\vec{r}, t) = \dots$  (schon einmal berechnet)

$$= |E_{(1)}| \sqrt{2} \left[ \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_{(1)}) \vec{e}_{(1)} - \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_{(1)}) \vec{e}_{(2)} \right]$$

$$\vec{E}_{(1)}^2(\vec{r}, t) = 2 |E_{(1)}|^2 \quad \text{zeitunabhängig} \quad (33)$$

V.4. Wellen in Hohlleitern (Wellenleitern)

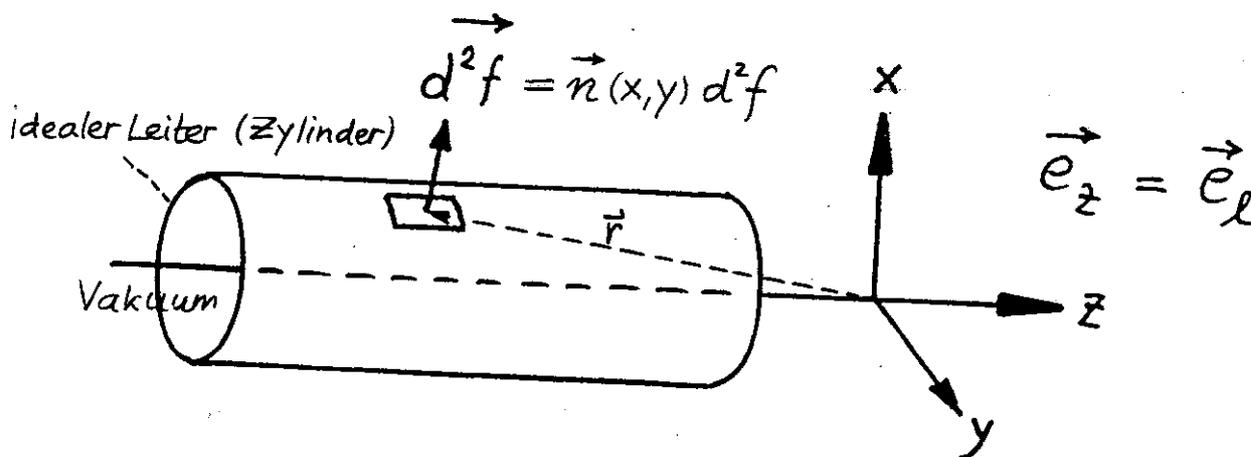
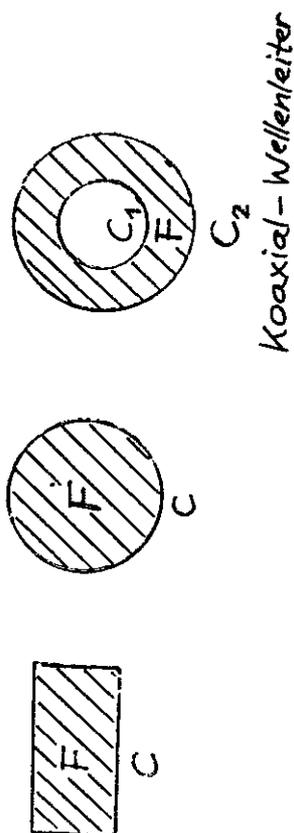


Fig. 5.3 Zylinderförmiger Hohlleiter

$$\begin{aligned} \vec{a}_l &= \vec{a}_z = a_z \vec{e}_z & \text{bzw. } a_l &= a_z \\ \vec{a}_t &= \vec{a} - \vec{a}_l = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y \end{aligned} \quad (34)$$

Beispiele für mögliche Querschnitte:



V.4.A. Randbedingungen auf der Leiteroberfläche

$$\begin{aligned} \vec{E}_{tg}(\vec{r}, t) &= \vec{0} \\ \vec{B}_{normal}(\vec{r}, t) &= \vec{0} \end{aligned} \quad \vec{r} \in \text{Leiteroberfläche, } \forall t \quad (35)$$

V.4.B. Zerlegung der Maxwell-Gln. in Transversal- und Longitudinal-Komponenten

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_t(\vec{r}, t) + \vec{E}_l(\vec{r}, t) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{B}_t(\vec{r}, t) + \vec{B}_l(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} = \underbrace{\hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y}}_{\vec{\nabla}_t} + \underbrace{\hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}}_{\vec{\nabla}_\ell}$$

$$\Delta = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}}_{\Delta_t} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial z^2}}_{\Delta_\ell}$$

homogene  
Max-Gln.: Argumente  $r, t$  vorübergehend  
weggelassen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}_t \cdot \vec{E}_t = -\vec{\nabla}_\ell \cdot \vec{E}_\ell}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}_t \cdot \vec{B}_t = -\vec{\nabla}_\ell \cdot \vec{B}_\ell}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t + \vec{\nabla}_\ell \times \vec{E}_t = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\nabla}_t \times \vec{B}_t + \vec{\nabla}_\ell \times \vec{B}_t = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_t}$$

(36)  
+ (37)

homogene Wellengleichungen:  
(notwendige Bdggn.)

$$\square \vec{E} = \vec{0}, \quad \square \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\boxed{\left(\Delta_t + \Delta_\ell - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{E}_t = \vec{0}}$$

$$\boxed{\left(\Delta_t + \Delta_\ell - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{B}_t = \vec{0}}$$

(38)

Ansatz: monochromatische Wellen, welche  
sich in longitudinaler Richtung  
ungedämpft fortpflanzen

$$\boxed{\vec{E}(r, t) = \vec{E}(x, y) e^{i(kz - \omega t)} + c.c.}$$

$$\boxed{\vec{B}(r, t) = \vec{B}(x, y) e^{i(kz - \omega t)} + c.c.}$$

Beachte:  $k$  reell  $> 0$  (42)

$$1) \quad \underline{\vec{E}(x, y) = \vec{E}_t(x, y) + \vec{E}_\ell(x, y)}$$

$$\underline{\vec{B}(x, y) = \vec{B}_t(x, y) + \vec{B}_\ell(x, y)}$$

komplexwertig

2)  $\omega = \omega(k)$  noch nicht bestimmt

3) Der Ansatz führt auf partielle Dgln.  
für  $\vec{E}(x, y)$ ,  $\vec{B}(x, y)$  (nur mehr Variable  $x, y$ )

V-21

Gleichungen für die longitudinalen Komponenten von  $\vec{E}(x,y)$ ,  $\vec{B}(x,y)$

$$(38): \quad \underbrace{\left( \Delta_t + \Delta_l - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E_l(\vec{r},t)}_{\substack{E_l(x,y) e^{i(kz - \omega t)} \\ z}} = 0 \quad + c.c.$$

$$(44) \quad \begin{aligned} -\Delta_t E_z(x,y) &= (\frac{\omega^2}{c^2} - k^2) E_z(x,y) \\ -\Delta_t B_z(x,y) &= (\frac{\omega^2}{c^2} - k^2) B_z(x,y) \end{aligned}$$

analog

Gleichungen für die transversalen Komponenten von  $\vec{E}(x,y)$ ,  $\vec{B}(x,y)$

$$(38): \quad \begin{aligned} \left( \Delta_t + \Delta_l - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E}_t(\vec{r},t) &= \vec{0} \\ \left( \Delta_l - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E}_t(\vec{r},t) &= -\Delta_t \vec{E}_t(\vec{r},t) \end{aligned}$$

V-22

$$\left( \Delta_l - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E}_t(\vec{r},t) = -\Delta_t \vec{E}_t(\vec{r},t)$$

$$\Delta_t \vec{E}_t = \underbrace{\vec{\nabla}_t (\vec{\nabla}_t \cdot \vec{E}_t)}_{\substack{\text{"Vektor"-} \\ \text{Laplace}}} - \underbrace{\vec{\nabla}_l \cdot \vec{E}_t}_{\uparrow} - \underbrace{\vec{\nabla}_t \times (\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t)}_{\substack{-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_l \\ \uparrow}} \quad (40)$$

$$(41) \quad \begin{aligned} \left( \Delta_l - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E}_t(\vec{r},t) &= \vec{\nabla}_t (\vec{\nabla}_l \cdot \vec{E}_t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla}_t \times \vec{B}_l) \\ \left( \Delta_l - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{B}_t(\vec{r},t) &= \vec{\nabla}_t (\vec{\nabla}_l \cdot \vec{B}_t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$(43) \quad \begin{aligned} \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \vec{E}_t(x,y) &= ik \vec{\nabla}_t E_z(x,y) + i \frac{\omega}{c} \vec{\nabla}_t B_z(x,y) \times \vec{e}_z \\ \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \vec{B}_t(x,y) &= ik \vec{\nabla}_t B_z(x,y) - i \frac{\omega}{c} \vec{\nabla}_t E_z(x,y) \times \vec{e}_z \end{aligned}$$

# V. 4. C. TEM-Wellen

$$-\Delta_t E_z(x,y) = (\frac{\omega^2}{c^2} - k^2) E_z(x,y) \quad (A)$$

$$-\Delta_t B_z(x,y) = (\frac{\omega^2}{c^2} - k^2) B_z(x,y) \quad (B)$$

$$(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2) \vec{E}_t(x,y) = ik \vec{\nabla}_t E_z(x,y) + i \frac{\omega}{c} \vec{\nabla}_t B_z(x,y) \times \vec{e}_z \quad (C)$$

$$(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2) \vec{B}_t(x,y) = ik \vec{\nabla}_t B_z(x,y) - i \frac{\omega}{c} \vec{\nabla}_t E_z(x,y) \times \vec{e}_z \quad (D)$$

Ansatz: weitere Spezifikation

$$E_z(x,y) = B_z(x,y) = 0 \quad (45)$$

TEM-Wellen

- (A): ✓
- (B): ✓

$$\neq 0 \quad (\text{sonst } \vec{E}(r,t) \equiv 0)$$

$$(C), (D): (\frac{\omega^2}{c^2} - k^2) \vec{E}_t(x,y) = \vec{0}$$

$$(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2) \vec{B}_t(x,y) = \vec{0}$$

$$\neq 0 \quad (\text{sonst } \vec{B}(r,t) \equiv 0)$$

$$\omega = \omega(k) = ck$$

Dispersionsbeziehung  
(Ergebnis der Wellengl.) (46)

$\vec{E}_t(x,y), \vec{B}_t(x,y)$ : Mit  $\vec{E}_t \equiv 0, \vec{B}_t \equiv 0$  folgt

aus den homogenen Maxwell-Gln. (s. Folie V-19):

$$\vec{\nabla}_t \cdot \vec{E}_t(x,y) = 0$$

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t(x,y) = \vec{0}$$

RB:  $\vec{E}_t = 0$  auf C

$$\frac{\partial}{\partial z} \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t(r,t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_t(r,t) \Rightarrow$$

$$ik \vec{e}_z \times \vec{E}_t(x,y) = i \frac{\omega}{c} \vec{B}_t(x,y) \quad (\text{da } k = \frac{\omega}{c})$$

$$\vec{B}_t(x,y) = \vec{e}_z \times \vec{E}_t(x,y)$$

$$\vec{\nabla}_t \cdot \vec{B}_t(x,y) = 0$$

RB:  $B_n = 0$  auf C

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{B}_t(x,y) = \vec{0}$$

$$-\vec{E}_t(x,y) = \vec{e}_z \times \vec{B}_t(x,y)$$

Aus den FG für  $\vec{E}_t(x,y)$  und der zugehörigen RB folgt:

TEM-Wellen können nur bei mehrfach zusammenhängenden Querschnitten existieren.

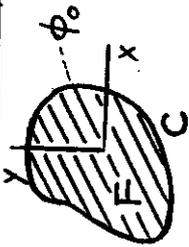
Beweis:  $\vec{E}_t(x,y) = -\vec{\nabla}_t \phi(x,y)$  in F

$$\Delta_t \phi(x,y) = 0$$

$\phi(x,y)$  regulär

$\phi(x,y) = \text{konstant}$  auf C

Querschnitt F einfach zusammenhängend:

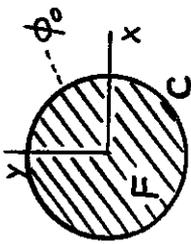


$$\phi(x, y) = \phi_0 \text{ in } F$$

$$\Rightarrow \vec{E}_t(x, y) \equiv \vec{0} \text{ in } F$$

(damit auch  $\vec{B}_t \equiv \vec{0}$ )

z.B.: Kreisquerschnitt



$\rho, \varphi$  Polarkoordinaten

Lsgs-Basis für Entwicklung von

$$\phi(\rho, \varphi):$$

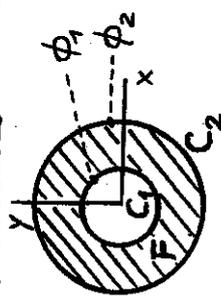
Konstante,  $\ln \rho$

$$\rho^m \cos m\varphi, \rho^m \sin m\varphi, m=1, 2, 3, \dots$$

$$\frac{1}{\rho^m} \cos m\varphi, \frac{1}{\rho^m} \sin m\varphi, m=1, 2, 3, \dots$$

Wegen RB  $\phi(a, \varphi) = \phi_0$ ,  $\forall \varphi$ , und Regularitätsforderung für  $\rho < a$  "bleibt" nur die Konstante und es folgt  $\phi(\rho, \varphi) = \phi_0$ .

Dagegen: Kreisringquerschnitt (Koaxial-Wellenleiter)



Hier  $\ln \rho$  "zulässig"!

$$\phi(\rho, \varphi) = A \ln \rho + B$$

Aus RB  $\phi(R_1) = \phi_1$ ,  $\phi(R_2) = \phi_2$  folgt

$$A = \frac{\phi_2 - \phi_1}{\ln R_2 - \ln R_1}, \quad B = \frac{\phi_1 \ln R_2 - \phi_2 \ln R_1}{\ln R_2 - \ln R_1}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_t(x, y) \equiv \vec{0} \text{ (selbst ausrechnen...)}$$

Feldamplitude proportional zu  $\phi_2 - \phi_1$

Beachte: Bei mehrfach zusammenhängendem

Querschnitt gibt es TEM-Wellen für beliebige

Kreisfrequenzen  $\omega \in (0, \infty)$  und es gilt

$$\omega = ck, \text{ d.h. } v_{ph} = \frac{\omega}{k} = c \text{ (unabhängig von } \omega).$$

Signale, welche ein ganzes Frequenzspektrum

enthalten, werden daher unverzerrt "durchgeleitet".

V.4.D. TM-Wellen und TE-WellenTM-Wellen (auch Wellen vom E-Typ genannt)

$$B_z(x,y) = 0, \text{ aber } E_z(x,y) \neq 0 \quad (4a)$$

$$-\Delta_t E_z(x,y) = (\frac{\omega^2}{c^2} - k^2) E_z(x,y) \quad (4b) \equiv (A)$$

$$-\Delta_t \underbrace{B_z(x,y)}_0 = (\frac{\omega^2}{c^2} - k^2) \underbrace{B_z(x,y)}_0 \quad \checkmark \quad (B)$$

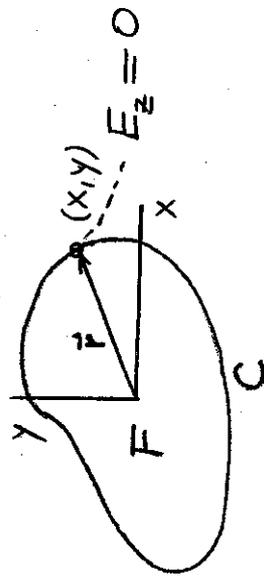
$$(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2) \vec{E}_t(x,y) = ik \nabla_t E_z(x,y) \quad (C)$$

$$+ i \frac{\omega}{c} \nabla_t \underbrace{B_z(x,y)}_0 \times \vec{e}_z \quad (D)$$

$$(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2) \vec{B}_t(x,y) = ik \nabla_t \underbrace{B_z(x,y)}_0 - i \frac{\omega}{c} \nabla_t E_z(x,y) \times \vec{e}_z$$

(A) Lösungen gesucht, welche die RB

$$E_z = 0 \text{ auf } C \text{ erfüllen}$$



EWP von  $-\Delta_t$  mit Dirichletscher RB:

$$-\Delta_t E_z(x,y) = \lambda^2 E_z(x,y) \quad \text{in } F$$

$$RB: E_z = 0 \quad \text{auf } C$$

$\lambda^2$  EW-Parameter ( $\lambda^2 > 0$ )

Siehe V-27'!

Lösung des EWP: angeschrieben für den Fall, daß keine Entartung vorliegt (Quadrat)

$$-\Delta_t E_z^{(n)}(x,y) = \lambda^{(n)2} E_z^{(n)}(x,y)$$

In Beispielen  
statt  $n$  besser  
Indexpaar!

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (50)$$

$$EW: \lambda^{(1)2} < \lambda^{(2)2} < \dots$$

$$(A): -\Delta_t E_z(x,y) = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) E_z(x,y) \quad (\omega \text{ vor= gegeben})$$

1) besitzt keine brauchbare Lösung, wofem für das vorgegebene  $\omega$

$$k^{(1)2} = \frac{\omega^2}{c^2} - \lambda^{(1)2} < 0$$

ist  $\Rightarrow \exists$  Grenzfrequenz, welche überschritten sein muß

Bemerkung:  $k^2 < 0 \Rightarrow k$  imaginär

$\Rightarrow$  Welle klingt in

$z$ -Richtung exponentiell ab.

Zum EWP von  $-\Delta_t$  mit Dirichletscher RB:

QM: zeitunabhängige Schrödingergleichung für Teilchen der Masse  $m$  im

Zweidimensionalen unendlich tiefen

Kastenpotential der Grundfläche  $F$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi(x,y) = E \psi(x,y)$$

RB:  $\psi = 0$  auf  $C$   
(Rand von  $F$ )

$\rightarrow$  diskrete positive Energieeigenwerte

2) besitzt  $n_0$  brauchbare Lösungen,  
wofür für das vorgegebene  $\omega$

$$k^{(n)^2} = \frac{\omega^2}{c^2} - \lambda^{(n)^2} > 0 \text{ für } (51)$$

$n=1,2,\dots,n_0$

aber

$$k^{(n_0+1)^2} = \frac{\omega^2}{c^2} - \lambda^{(n_0+1)^2} < 0$$

ist

Es gibt also stets nur eine endliche  
Anzahl von "Moden".

(C), (D) gestatten dann die Berechnung

der zu einem bestimmten  $n$

( $n=1,2,\dots,n_0$ ) gehörigen Komponenten

$$\vec{E}_t^{(n)}(x,y), \vec{B}_t^{(n)}(x,y)$$

$$\vec{E}_t^{(n)}(x,y) = i k^{(n)} \vec{\nabla}_t E_z^{(n)}(x,y) - \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^{(n)^2} \right) \vec{e}_z \lambda^{(n)^2} > 0$$

$$\vec{B}_t^{(n)}(x,y) = -i \frac{\omega}{c} \frac{\vec{\nabla}_t E_z^{(n)}(x,y) \times \vec{e}_z}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^{(n)^2}}$$

$n=1,2,\dots,n_0$

TE-Wellen (auch Wellen vom B-Typ bzw. H-Typ genannt)

$$E_z(x,y) = 0, \text{ aber } B_z(x,y) \neq 0 \quad (52)$$

Vollkommen analog mit vertauschten Rollen von  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ ; gleiche EWG wie zuvor,

ABER: andere EW  $\lambda^{(n)2}$  und andere EF  $B_z^{(n)}(x,y)$ , da andere RB:  
daher auch andere Grenzfrequenz

(D):  $(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2) \vec{B}_t(x,y) = i k \vec{\nabla}_t B_z(x,y)$   
Benötigt, um RB für  $B_z$  abzuleiten.  $-i \frac{\omega}{c} \vec{\nabla}_t E_z(x,y) \times \vec{e}_z$

RB für  $B_z$  auf C:

$$B_n = \vec{n} \cdot \vec{B} \Big|_C = \vec{n} \cdot \vec{B}_t \Big|_C \quad \text{da } \vec{n} \cdot \vec{e}_z = 0 \quad (56)$$

$$= \frac{i k}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \underbrace{\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_t B_z \Big|_C}_{\frac{\partial B_z}{\partial n}} = 0$$

$> 0$  (da  $-\Delta_t$  positiv definit)

$$\frac{\partial B_z}{\partial n} = 0 \text{ auf C} \quad (57)$$

EWP von  $-\Delta_t$  mit Neumannscher RB:

$$-\Delta_t B_z(x,y) = \lambda^2 B_z(x,y) \text{ in } F$$

$$\text{RB: } \frac{\partial B_z}{\partial n} = 0 \text{ auf } C$$

$\lambda^2$  EW-Parameter ( $\lambda^2 > 0$ )

Beispiele: s. Greiner

Bemerkungen:

1) Die verschiedenen TM- und TE-Wellen plus TEM-Wellen (falls  $\exists$ ) bilden zusammen ein vollständiges Entwicklungssystem für einen beliebigen elm. Wellenvorgang im Wellenleiter.

2) Für TM- bzw. TE-Wellen gilt

$$v_{Ph}^{(n)} = \frac{\omega}{k^{(n)}} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \lambda^{(n)2}}} \text{ abhängig von } \omega \text{ und von } n!$$

Signale, welche TM- oder (und) TE-Wellen mit verschiedenen Frequenzen oder (und) mehrere Moden enthalten, werden daher beim "Durchgang" durch den Wellenleiter verzerrt.