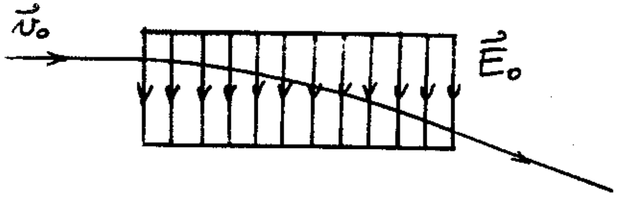
FOLIEN VON D. GRAU ZUR VORLESUNG "ELEKTRODYNAMIK UND RELATIVITÄTSTHEORIE"

nach dem Skriptum von H. Nowotny

Kapitel 4

2) $\vec{v}_0 \not\parallel \vec{E}_0$: beschleunigte Bewegung längs Parabelbahn (z.B. Plattenkondensator)



(ohne Randeffekte)

Unterschiede zu spezieller Relativitätstheorie?
(c Grenzgeschwindigkeit ; Selbstkraft)

IV. MAGNETOSTATIK IM VAKUUM

IV.1 Stationäre Ströme . Magnetostatik

FG

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}) &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}) \end{aligned}} \qquad (\text{III}.2)$$

mit
KG

$$\underline{\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}) = 0} \qquad (\text{II}.5)$$

mathematisch : Integrabilitätsbedingung

physikalisch : Ladungserhaltung

(III.2) : $\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad \Longrightarrow$

$$\underline{\vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r})} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) \qquad ✡$$

$$= \operatorname{grad} \underbrace{\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r})}_{0 \text{ verlangt}} \underline{- \Delta \vec{A}(\vec{r})}$$

$$\underline{= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r})}$$

0 verlangt :
Coulombeichung (= Lorenzeichung)

Also:

Eichung $\underline{\mathrm{div}\,\vec{A}(\vec{r}) = 0}$ (2)

FG $\boxed{\Delta\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r})}$ (3)

IV.1.A. Magnetfelder bei natürlichen RB

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}} \qquad (4)$$

(4) erfüllt (3) ✓ (Elektrostatik!)

(4) erfüllt (2):

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r' \, \vec{j}(\vec{r}\,')\cdot\overbrace{\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}^{-\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}$$

$$= -\frac{1}{c}\int d^3r' \, \vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) + \frac{1}{c}\int d^3r' \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\underbrace{\vec{\nabla}'\cdot\vec{j}(\vec{r}\,')}_{(\mathrm{II}.5):\ 0}$$

Gauß

$$= -\frac{1}{c}\oint d^2\vec{f}\,'\cdot\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = 0 \quad ✓$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r' \, \vec{\nabla}\times\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

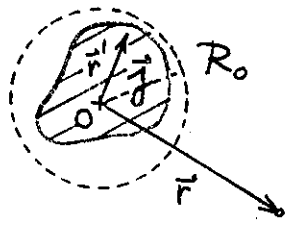
$$= -\frac{1}{c}\int d^3r' \, \vec{j}(\vec{r}\,')\times\underbrace{\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}_{-\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}} \qquad (6)$$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}} \qquad (7)$$

Für <u>spezielle Randwertprobleme</u> ist zur obigen Lösung für $\vec{A}(\vec{r})$ bzw. für $\vec{B}(\vec{r})$ eine geeignete Lösung der homogenen Gln. zu addieren.

IV.1.B. Magnetisches Dipolmoment.

Magnetfeld einer lokalisierten Stromverteilung



Lokalisierte Stromverteilung

(im engeren Sinn):

$$\vec{j}(\vec{r}\,') = \vec{0} \quad \text{für } r' > R_0 \qquad (8)$$

(4):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

(III.28b):

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^3} + \dots$$

$r > R_0$:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{1}{cr}\int d^3r'\,\vec{j}(\vec{r}\,')}_{\vec{A}_{monopol}(\vec{r})} + \underbrace{\frac{1}{cr^3}\int d^3r'\,(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')\,\vec{j}(\vec{r}\,') + \dots}_{\vec{A}_{dipol}(\vec{r})} \qquad (9)$$

$$\vec{A}_{monopol}(\vec{r}) = \vec{0}, \text{ da}$$

$$\int d^3r'\,\vec{j}(\vec{r}\,') = \vec{0} \qquad (12)$$

(s. nächste Folie)

$$\frac{\partial}{\partial x_i'}\left(j_i(\vec{r}\,')\,x_k'\right) = \underbrace{\frac{\partial j_i(\vec{r}\,')}{\partial x_i'}}_{div'\vec{j}(\vec{r}\,')=0 \ (KG)} x_k' + j_i(\vec{r}\,')\,\delta_{ik} \qquad (10$$

$$= j_k(\vec{r}\,') \quad \text{, symbolisch}$$

$$\left(\vec{\nabla}'\cdot\vec{j}(\vec{r}\,')\right)\vec{r}\,' = \vec{j}(\vec{r}\,') \qquad (11a)$$

$\Longrightarrow$

$$\int d^3r'\,\vec{j}(\vec{r}\,') = \int d^3r'\,\left(\vec{\nabla}'\cdot\vec{j}(\vec{r}\,')\right)\vec{r}\,'$$

$$= (\text{Gauß}) = \oint \left(d^2\vec{f}\,'\cdot\vec{j}(\vec{r}\,')\right)\vec{r}\,' = 0$$

Es bleibt also

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}_{dipol}(\vec{r}) + \dots} \qquad r > R_0$$

mit

$$\vec{A}_{dipol}(\vec{r}) = \frac{1}{cr^3}\int d^3r'\,\underbrace{(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')\,\vec{j}(\vec{r}\,')}_{\text{wird umgeformt}}$$

$$(\vec r\cdot\vec r\,')\,\vec j(\vec r\,')$$

$$1)\quad \frac{\partial}{\partial x_i'}\left(j_i(\vec r\,')\,x_l x_l' \underline{\underline{x_k'}}\right) = \overbrace{\frac{\partial j_i(\vec r\,')}{\partial x_i'}}^{0\ (KG)}\, x_l x_l' x_k'$$

$$+\,j_i(\vec r\,')\underbrace{x_l\,\delta_{il}}_{x_i}\,x_k' + j_i(\vec r\,')\,x_l x_l'\,\delta_{ik}$$

$$j_k(\vec r\,')$$

$$= x_i\, j_i(\vec r\,')\,\underline{\underline{x_k'}} + x_l x_l'\,\underline{\underline{j_k}}(\vec r\,')$$

$$(\vec r\cdot\vec r\,')\,\vec j(\vec r\,') = -(\vec r\cdot\vec j(\vec r\,'))\,\vec r\,' + \underline{(\vec\nabla'\cdot\vec j(\vec r\,'))(\vec r\cdot\vec r\,')\,\vec r\,'} \qquad (11b)$$

$$2)\quad \vec r\times(\vec r\,'\times\vec j(\vec r\,')) = (\vec r\cdot\vec j(\vec r\,'))\,\vec r\,' - (\vec r\cdot\vec r\,')\,\vec j(\vec r\,')$$

$$(\vec r\cdot\vec r\,')\,\vec j(\vec r\,') = (\vec r\cdot\vec j(\vec r\,'))\,\vec r\,' - \underline{\vec r\times(\vec r\,'\times\vec j(\vec r\,'))}$$

$$\Uparrow$$

1)+2)

$$\underline{(\vec r\cdot\vec r\,')\,\vec j(\vec r\,') = -\tfrac{1}{2}\,\vec r\times(\vec r\,'\times\vec j(\vec r\,'))}$$

$$\underline{+\,\tfrac{1}{2}\,(\vec\nabla'\cdot\vec j(\vec r\,'))\,(\vec r\cdot\vec r\,')\,\vec r\,'} \qquad (13)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\int d^3r'\,(\vec r\cdot\vec r\,')\,\vec j(\vec r\,') = -\tfrac{1}{2}\,\vec r\times\int d^3r'\,(\vec r\,'\times\vec j(\vec r\,'))$$

$$+\,0$$

$$\vec A_{dipol}(\vec r) = \frac{1}{\cancel{c}\,r^3}\underbrace{\int d^3r'\,(\vec r\cdot\vec r\,')\,\vec j(\vec r\,')}$$

$$-\frac{1}{\cancel{2}}\,\vec r\times\underbrace{\int d^3r'\,(\vec r\,'\times\vec j(\vec r\,'))}_{\cancel{2}\cancel{c}\,\vec m} \qquad (14)$$

$$\boxed{\vec m := \frac{1}{2c}\int d^3r\,(\vec r\times\vec j(\vec r))}$$ unabhängig von Wahl des Koordinatenursprungs (15)

kartesisches
MAGNETISCHES (DIPOL-)MOMENT
der Stromverteilung

$$\boxed{\begin{aligned}\vec A_{dipol}(\vec r) &= \frac{\vec m\times\vec r}{r^3} && (16)\\ \vec B_{dipol}(\vec r) &= \frac{3(\vec m\cdot\vec r)\,\vec r - r^2\vec m}{r^5} && (17)\end{aligned}}\qquad \underline{\underline{r > R_0}}$$

s. nächste Folie

$$\vec{B}_{dipol}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}_{dipol}(\vec{r})$$

$$= \vec{\nabla} \times \left(\vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3}\right)$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \vec{m}\left(\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}\right) - (\vec{m}\cdot\vec{\nabla})\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{x_i}{r^3} = \frac{1}{r^3}\underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_i}}_{3} + x_i \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r^3}}_{-3\frac{x_i}{r^5}} = 0$$

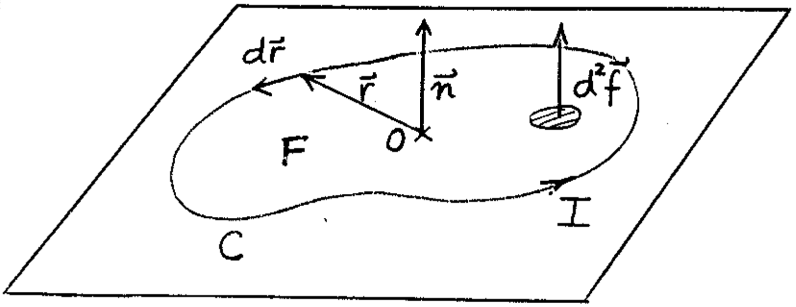
$$\left[(\vec{m}\cdot\vec{\nabla})\frac{\vec{r}}{r^3}\right]_i = m_j \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{x_i}{r^3}$$

$$= m_j \frac{\delta_{ij}}{r^3} - m_j x_i \frac{3x_j}{r^5}$$

$$= \frac{m_i}{r^3} - \frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})x_i}{r^5}$$

$$\vec{B}_{dipol}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5} \quad \checkmark$$

Ebene Leiterschleife C



dünner
geschlossener
Linienstrom
in einer Ebene

Allgemeine Formel $\quad \vec{m} = \frac{1}{2c}\int d^3r\, (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}))$

$\vec{j}(\vec{r})d^3r \longrightarrow I d\vec{r}$

gibt

$$\vec{m} = \frac{I}{c}\underbrace{\frac{1}{2}\oint_C (\vec{r} \times d\vec{r})}_{} \qquad (18a)$$

Mathematik : $|F|\vec{n}$

($|F|$ Flächeninhalt von F)

Falls "vergessen":

$$\frac{1}{2}\oint_C (\vec{r} \times d\vec{r})_\ell = \frac{1}{2}\oint_C \varepsilon_{\ell mk}\, x_m\, dx_k$$

$$= \oint_C dx_k\, \frac{1}{2}\varepsilon_{\ell mk}\, x_m = (\text{Stokes};\ (\text{I}.11b))$$

$$= \int_F d^2f_i\, \varepsilon_{ijk}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{\ell mk}\, x_m\right)}_{\frac{1}{2}\varepsilon_{\ell mk}\,\delta_{jm}} = \int_F \overbrace{d^2f_i\, \frac{1}{2}\underbrace{\varepsilon_{imk}\,\varepsilon_{\ell m}}_{(A.6a):\ \delta_{i\ell}}}^{d^2f_\ell}$$

$$\boxed{\vec m = \frac{I}{c}\,\frac{1}{2}\oint_C (\vec r\times d\vec r) = \frac{I}{c}\int_F d^2\vec f = \frac{I}{c}|F|\vec n}$$

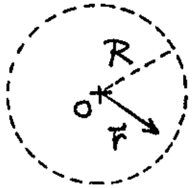
(18a,b)

IV. 1. C. Mittelwert des Magnetfeldes (Kugelbereich) bei natürlichen RB

Natürliche RB :

$$\vec A(\vec r) = \frac{1}{c}\int d^3r'\, \frac{\vec j(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}$$

Koo-Ursprung in Mittelpunkt der Mittelungskugel gelegt :



arithmetisches Mittel gebildet

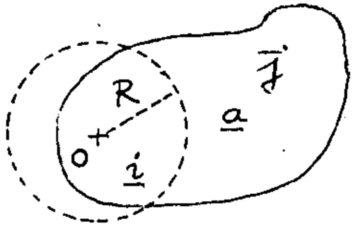
$$\langle\vec B\rangle_R = \frac{3}{4\pi R^3}\int_{r<R} d^3r\,\vec B(\vec r) = \frac{3}{4\pi R^3}\int_{r<R} d^3r\,(\vec\nabla\times\vec A(\vec r))$$

$$= (\text{Gauß}) = \frac{3}{4\pi R^3}\oint_{r=R}(d^2\vec f\times\vec A(\vec r)) \qquad (19)$$

$$= \frac{3}{4\pi R^3}\oint_{r=R}\Big(d^2\vec f\times\frac{1}{c}\int d^3r'\,\frac{\vec j(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}\Big)$$

$$\langle\vec B\rangle_R = \frac{3}{4\pi R^3}\oint_{r=R}\Big(d^2\vec f\times\frac{1}{c}\int d^3r'\,\frac{\vec j(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}\Big) \qquad (20)$$

$$= -\frac{1}{c}\int d^3r'\Big[\overset{\downarrow}{\vec j}(\vec r')\times\underbrace{\frac{3}{4\pi R^3}\oint_{r=R}d^2\vec f\,\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}}_{\underline{(40)}:\ \begin{cases}\frac{\vec r'}{r'^3}, & r'\ge R\\ \frac{\vec r'}{R^3}, & r'\le R\end{cases}}\Big]$$



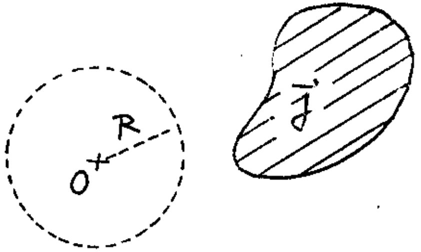
$$\boxed{\begin{aligned}\langle\vec B\rangle_R &= \frac{1}{c}\int_{r'>R} d^3r'\,\frac{\vec j(\vec r')\times(-\vec r')}{r'^3} &&\text{- - -}\ \vec B_{\underline a}(\vec 0)\\ &+\frac{2}{R^3}\,\frac{1}{2c}\int_{r'<R} d^3r'\,(\vec r'\times\vec j(\vec r')) &&\text{- - -}\ \frac{2\vec m_{\underline i}}{R^3}\end{aligned}} \qquad (21)$$

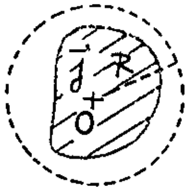
Beachte:

$$\vec B(\overset{\overset{\vec 0}{\|}}{\vec r}) = \frac{1}{c}\int d^3r'\,\frac{\vec j(\vec r')\times(\cancel{\vec r}-\vec r')}{|\cancel{\vec r}-\vec r'|^3}$$

$$\vec m = \frac{1}{2c}\int d^3r'\,(\vec r'\times\vec j(\vec r'))$$

Spezialfälle:





$\langle\vec{B}\rangle_R = \vec{B}(\vec{0})$

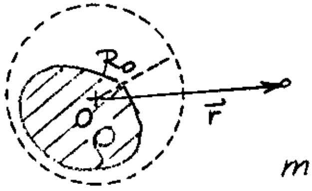
unabhängig von R
(solange $\vec{j}(\vec{r}') = 0$
für $r' < R$)

$\langle\vec{B}\rangle_R = \dfrac{2\vec{m}}{R^3}$

proportional $\dfrac{1}{\text{Volumen}}$
der Mittelungskugel

IV.1.D. Vergleich: elektrischer und magnetischer Dipol

Elektrischer Dipol



$r > R_0$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_{dipol}(\vec{r}) + \ldots$$

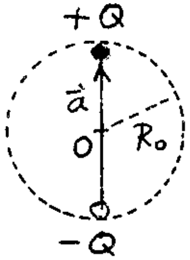
mit

$$\vec{E}_{dipol}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$$

ρ: $q = \int d^3r' \rho(\vec{r}') = 0$

$\vec{p} = \int d^3r' \, \vec{r}' \rho(\vec{r}') \neq \vec{0}$

Beispiel:



$\vec{p} = Q\vec{a}$

Mathematischer elektrischer Dipol (elektrischer Punktdipol) := elektrischer Dipol dessen höhere Multipolmomente alle null sind (räumliche Ausdehnung ↓ null bei festem Dipolmoment).

im Beispiel: Grenzübergang $Q \uparrow \infty$, $a \downarrow 0$
$Qa = p$ fest

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_{dipol}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}, \quad r > 0}$$

für Punktdipol im Ursprung

"Außenbereich"
des Punktdipol

Die Information über das "Innere" des Punktdipols geht nur in die Feldstärke im Ursprung (am Ort des Dipols) ein:

$$-\frac{4\pi}{3}\vec{p}\,\delta(\vec{r}) \qquad \text{Kontaktterm}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_{dipol}(\vec{r}) = \dfrac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5} - \frac{4\pi}{3}\vec{p}\,\delta(\vec{r}) \\[1em] \text{für Punktdipol im Ursprung}\end{array}} \qquad (22)$$

Damit ist <u>für beliebiges $R > 0$</u>

$$\int\limits_{r<R} d^3r\ \vec{E}(\vec{r}) = \frac{4\pi R^3}{3}\underbrace{\langle\vec{E}\rangle_R}_{} = \frac{4\pi \cancel{R^3}}{3}\underbrace{\left(-\frac{\vec{p}}{\cancel{R^3}}\right)}_{}$$

(III.41)

gesichert.

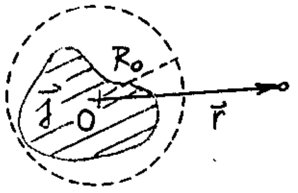
Bemerkung 1: Das Winkelintegral über den ersten Term in (22) ist null, das Radialintegral besitzt allerdings keinen definierten Wert.

Bemerkung 2: "Außer Konkurrenz": Für einen elektrischen Punktdipol im Ursprung gilt

$$\rho(\vec{r}) = -\vec{p}\cdot \text{grad}\,\delta(\vec{r}) = -\text{div}\left[\vec{p}\,\delta(\vec{r})\right]$$

Analog:

Magnetischer Dipol



<u>$r > R_0$:</u>

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_{dipol}(\vec{r}) + \ldots$$

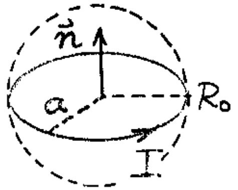
mit

$$\vec{B}_{dipol}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$$

$\vec{j}$:

$$\vec{m} = \frac{1}{2c}\int d^3r'\,(\vec{r}\,'\times\vec{j}(\vec{r}\,')) \neq \vec{0}$$

<u>Beispiel:</u> Kreisstrom



$$\vec{m} = \frac{I}{c}\pi a^2\vec{n}$$

Mathematischer magnetischer Dipol (magnetischer Punktdipol) := magnetischer Dipol dessen höhere Multipolmomente alle null sind (räumliche Ausdehnung ↓ null bei festem Dipolmoment

<u>im Beispiel:</u> Grenzübergang $I\uparrow\infty$, $a\downarrow 0$

$$\frac{I}{c}\underbrace{\pi a^2}_{|F|} = m \text{ fest}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_{dipol}(\vec{r}) = \dfrac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5} + \underbrace{\dfrac{8\pi}{3}\vec{m}\,\delta(\vec{r})}_{\text{Kontaktterm}} \\ \text{für Punktdipol im Ursprung}\end{array}} \qquad (23)$$

1) Ohne Kontaktterm gilt die Formel nur für $r > 0$.

2) Der Kontaktterm gewährleistet, daß für beliebiges $R > 0$

$$\int_{r<R} d^3r\,\vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi R^3}{3}\underbrace{\langle\vec{B}\rangle_R}_{} = \frac{4\pi \cancel{R^3}}{3}\underbrace{\frac{2\vec{m}}{\cancel{R^3}}}_{(21)} \quad \text{gilt.}$$

"Außer Konkurrenz"

Bemerkung 1: Obigen Kontaktterm benötigt man in der QM für die Hyperfeinaufspaltung von s–Niveaus in Atomen.

Bemerkung 2: Für einen magnetischen Punktdipol im Ursprung gilt

$$\vec{j}(\vec{r}) = -c\vec{m}\times \text{grad}\,\delta(\vec{r}) = c\,\text{rot}\left[\vec{m}\,\delta(\vec{r})\right]$$

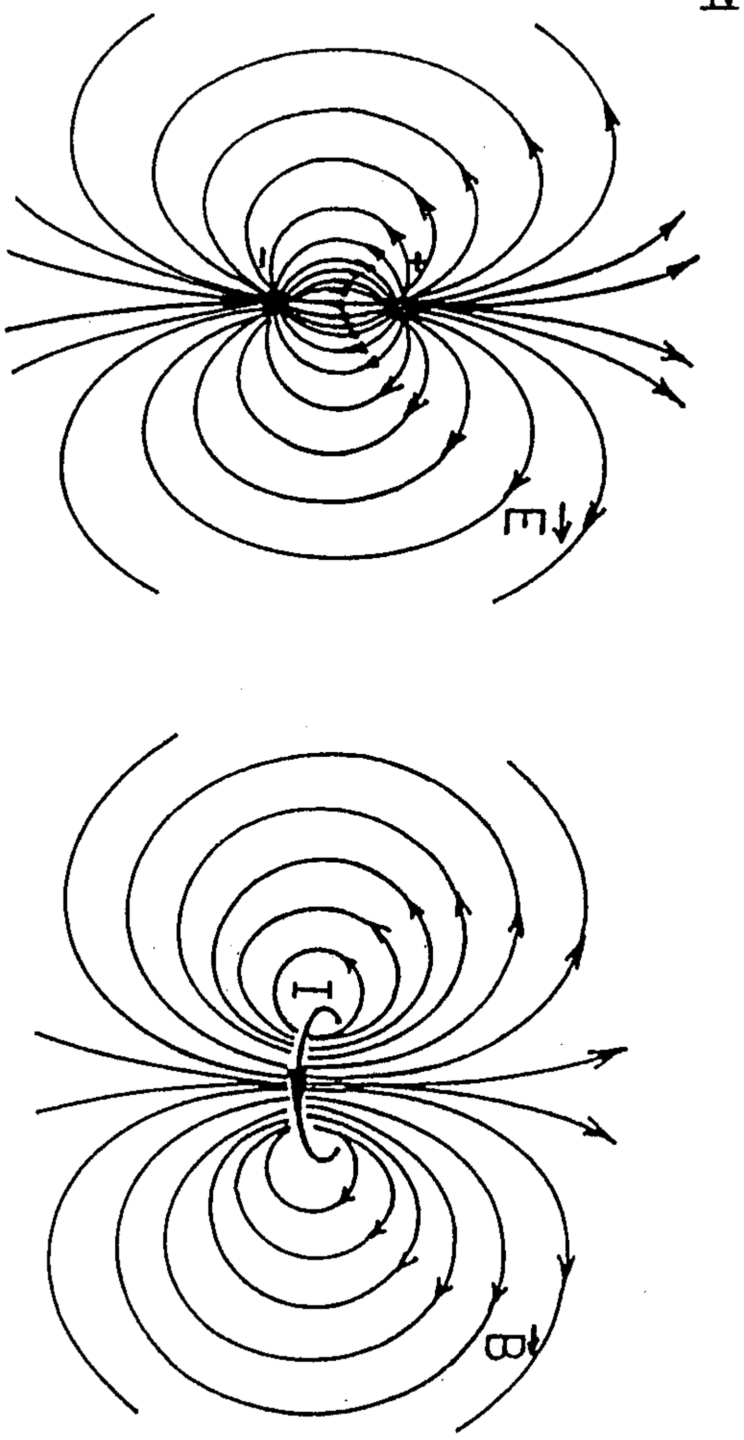


Fig. 4.1 Vergleich des Feldlinienverlaufes: elektrischer Dipol und magnetischer Dipol

IV.2 Magnetische sphärische Multipolentwicklung

IV.2.A. Skalares magnetisches Potential

Lokalisierte Stromverteilung

$$\vec{j}(\vec{r}\,') = \vec{0} \quad \text{für } r' > R_0$$

$r > R_0$:

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

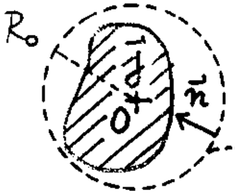
$$\operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}) = \vec{0} \qquad (24)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= -\operatorname{grad} \phi_M(\vec{r}) && (25) \\ \Delta \phi_M(\vec{r}) &= 0 && (26) \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}\cdot\vec{B}(\vec{r}) = -(\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\,\phi_M(\vec{r}) = -r\,\frac{\partial \phi_M(\vec{r})}{\partial r} \qquad (27)$$

$r \downarrow R_0$:

$$\vec{r}\cdot\vec{B}(\vec{r})\Big|_{r\downarrow R_0} = -\,r\,\frac{\partial \phi_M(\vec{r})}{\partial r}\Big|_{r\downarrow R_0}$$



Außenraum

$$\Delta \phi_M(\vec{r}) = 0 \qquad \vec{r}\cdot\vec{B}(\vec{r})\Big|_{r\downarrow R_0} = R_0\,\frac{\partial \phi_M}{\partial n}$$

$\frac{\partial \phi_M}{\partial n}$ auf Oberfläche

Aus Elektrostatik ist bekannt:

Die Lösung der Laplacegleichung für den Außenraum ist durch die Vorgabe der Normalableitung auf der Kugeloberfläche und die Regularitätsforderung im Unendlichen (bis auf eine bedeutungslose additive Konstante) EINDEUTIG BESTIMMT.

Folge:

Gelingt es uns, eine reguläre Lösung $\phi_M(\vec{r})$ der Laplacegleichung für den Außenraum $(r > R_0)$ anzugeben, welche für $r \downarrow R_0$

$$\vec{r}\cdot\vec{B}(\vec{r}) = -r\,\frac{\partial \phi_M(\vec{r})}{\partial r}$$

erfüllt, so stellt diese das gesuchte Potential dar, welche die magnetische Feldstärke der lokalisierten Stromverteilung im Außenraum liefert.

Dies gelingt in den folgenden Schritten:

1. Schritt: Ableitung einer im ganzen Raum gültigen Poissongleichung für $\vec{r}\cdot\vec{B}(\vec{r})$

$$\underline{\Delta(\vec{r}\cdot\vec{B}(\vec{r}))} = \frac{\partial}{\partial x_i}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(x_k B_k)}_{B_i + x_k \frac{\partial B_k}{\partial x_i}}$$

$$= \underbrace{\frac{\partial B_i}{\partial x_i}}_{0} + \underbrace{\frac{\partial B_i}{\partial x_i}}_{0} + x_k \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} B_k$$

$$\underline{= \vec{r}\cdot\Delta\vec{B}(\vec{r})}$$

$$\underline{\Delta\vec{B}(\vec{r})} = \mathrm{grad}\,\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{B}(\vec{r})}_{0} - \mathrm{rot}\,\underbrace{\mathrm{rot}\,\vec{B}(\vec{r})}_{\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r})}$$

$$\underline{= -\frac{4\pi}{c}\,\mathrm{rot}\,\vec{j}(\vec{r})}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\Delta(\vec{r}\cdot\vec{B}(\vec{r})) = -\frac{4\pi}{c}\,\vec{r}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{j}(\vec{r})}}$$

$$\underline{\underline{\Delta(\vec{r}\cdot\vec{B}(\vec{r})) = -\frac{4\pi}{c}\,\vec{r}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{j}(\vec{r})}}$$

$$\underline{\vec{\nabla}\cdot(\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r}))} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\varepsilon_{ikl}\, x_k\, j_l)$$

$$= \underbrace{\varepsilon_{ikl}\,\delta_{ik}}_{0}\, j_l + \underbrace{\varepsilon_{ikl}}_{-\varepsilon_{kil}}\, x_k \frac{\partial j_l}{\partial x_i}$$

$$= -x_k\,\varepsilon_{kil}\frac{\partial j_l}{\partial x_i} \underline{= -\vec{r}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{j}(\vec{r})}$$

$$\boxed{\Delta(\vec{r}\cdot\vec{B}(\vec{r})) = \frac{4\pi}{c}\,\vec{\nabla}\cdot(\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r}))} \qquad (28)$$

gültig im ganzen Raum

$\Rightarrow$ (Greenfunktion von Δ für natürliche RB)

$$\boxed{\vec{r}\cdot\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{1}{c}\int d^3r'\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\vec{\nabla}'\cdot(\vec{r}\,'\times\vec{j}(\vec{r}\,'))}$$

gültig im ganzen Raum (29)

IV. 2. B Sphärische magnetische Multipolmomente

2. Schritt: Multipolentwicklung von $\vec{r}\cdot\vec{B}(\vec{r})$
für $r > R_0$

$$\vec{r}\cdot\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{1}{c}\int d^3r' \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \, \vec{\nabla}'\cdot(\vec{r}'\times\vec{j}(\vec{r}'))$$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{\ell m} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{r'^{\ell}}{r^{\ell+1}} Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi) Y^*_{\ell m}(\vartheta',\varphi') \quad \text{für } r' < r$$

$r > R_0$:

$$\vec{r}\cdot\vec{B}(\vec{r}) = -\sum_{\ell m} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)}{r^{\ell+1}} \frac{1}{c}\int d^3r' \, r'^{\ell} \, Y^*_{\ell m}(\vartheta',\varphi') \cdot \\ \cdot \vec{\nabla}'\cdot(\vec{r}'\times\vec{j}(\vec{r}')) \qquad (30)$$

$$\frac{1}{r^{\ell+1}} = -r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r^{\ell+1}}\frac{1}{\ell+1}$$

$$\vec{r}\cdot\vec{B}(\vec{r}) = -r\frac{\partial}{\partial r}\underline{\phi_M(\vec{r})}$$

$$\underline{= -r\frac{\partial}{\partial r}\sum_{\ell m}\frac{4\pi}{2\ell+1}\frac{Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)}{r^{\ell+1}} \overbrace{\frac{(-1)}{(\ell+1)c}\int d^3r' \, r'^{\ell} \, Y^*_{\ell m}(\vartheta',\varphi') \cdot \vec{\nabla}'\cdot(\vec{r}'\times\vec{j}(\vec{r}'))}^{M^*_{\ell m}}}$$

3. Schritt: "Ablesen" vom $\phi_M(\vec{r})$

$$M^*_{\ell m} := -\frac{1}{(\ell+1)c}\int d^3r' \, r'^{\ell} \, Y^*_{\ell m}(\vartheta',\varphi') \, \vec{\nabla}'\cdot(\vec{r}'\times\vec{j}(\vec{r}')) \qquad (33)$$

Sphärische magnetische Multipolmomente

$M_{00} = 0$ s. später

$r > R_0$:

$$\boxed{\phi_M(\vec{r}) = \sum_{\ell m}\frac{4\pi}{2\ell+1}\frac{Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)}{r^{\ell+1}} M^*_{\ell m}} \qquad (32)$$

1) Ist reguläre Lsg. von $\Delta\phi_M(\vec{r}) = 0$ für $r > R_0$. ✓

2) Erfüllt für ($r > R_0$ und) $r \downarrow R_0$

$$\underline{\vec{r}\cdot\vec{B}(\vec{r}) = -r\frac{\partial\phi_M(\vec{r})}{\partial r}} \,. \quad ✓$$

$\phi_M(\vec{r})$ stellt also das gesuchte Potential dar, welches gemäß

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = -\operatorname{grad}\phi_M(\vec{r})}$$

die Multipolentwicklung von $\vec{B}(\vec{r})$ für $r > R_0$ liefert.

IV. 2.C. Vektorkugelflächenfunktionen

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{L} &:= -i(\vec{r}\times\vec{\nabla}) && (35)\\ \vec{X}_{\ell m}(\vartheta,\varphi) &:= \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\,\vec{L}\,Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi) && (38)\end{aligned}}$$

$\vec{L}$ in QM Drehimpulsoperator (in Einheiten $\hbar$), hier formaler Differentialoperator.

Eigenschaften aus QM bekannt, z.B.

1) L_x, L_y, L_z wirken nur auf ϑ,φ (nicht auf r); z.B. $L_z = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}$

2) $\vec{r}\cdot\vec{L} = 0$ (Nulloperator)

Weitere Eigenschaften : s. Skriptum ANHANG A

Eigenschaften der $\vec{X}_{\ell m}(\vartheta,\varphi)$:

1) $\vec{X}_{00}(\vartheta,\varphi) = \vec{0}$

2) $\vec{r}\cdot\vec{X}_{\ell m}(\vartheta,\varphi) = 0$

3) $\left\{ \vec{X}_{\ell m}(\vartheta,\varphi)\,,\ \frac{\vec{r}}{r}\times\vec{X}_{\ell m}(\vartheta,\varphi)\,;\ \begin{aligned}&\ell=(0,)1,2,\dots\\ &m=-\ell,\dots,+\ell\end{aligned} \right\}$

bilden VON für Entwicklung beliebiger $\vec{F}(\vartheta,\varphi)$ mit $\vec{r}\cdot\vec{F}(\vartheta,\varphi) = 0$

Formel zur Berechnung aller $\vec{X}_{\ell m}$, weitere Eigenschaften sowie explizite Ausdrücke für die $\vec{X}_{1m}$, $m=0,\pm1$, s. Skriptum ANHANG A

$M_{\ell m}$ durch die $\vec{X}_{\ell m}$ "ausdrücken":

$$M_{\ell m} = -\frac{1}{(\ell+1)c}\int d^3r\, \underbrace{\overbrace{r^\ell Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)}^{u}\,\vec{\nabla}\cdot\overbrace{(\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r}))}^{\vec{a}}}_{u\vec{\nabla}\cdot\vec{a} \,=\, \underline{\vec{\nabla}\cdot(u\vec{a})} - \vec{a}\cdot\vec{\nabla}u}$$

$$= \underline{0} + \frac{1}{(\ell+1)c}\int d^3r\, \underbrace{(\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r}))\cdot\vec{\nabla}}_{\substack{-\vec{j}(\vec{r})\cdot(\vec{r}\times\vec{\nabla})\\ =-i\vec{j}(\vec{r})\cdot\vec{L}}}(r^\ell Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi))$$

Beachte: $\vec{L} := -i(\vec{r}\times\vec{\nabla})$

$$= -\frac{i}{(\ell+1)c}\int d^3r\, \vec{j}(\vec{r})\cdot\underbrace{\vec{L}\,(r^\ell Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi))}_{r^\ell\,\underbrace{\vec{L}\,Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)}_{\sqrt{\ell(\ell+1)}\,\vec{X}_{\ell m}(\vartheta,\varphi)}}$$

$$\boxed{M_{\ell m} = -i\sqrt{\frac{\ell}{\ell+1}}\int d^3r\, r^\ell\,\vec{X}_{\ell m}(\vartheta,\varphi)\cdot\frac{\vec{j}(\vec{r})}{c}} \qquad (39)$$

Vergleich Elektrostatik — Magnetostatik

$r > R_0$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\,\mathrm{grad}\,\phi(\vec{r})$$

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{\ell m} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)}{r^{\ell+1}}\, q^{*}_{\ell m}$$

$$q_{\ell m} = \int d^3r\, r^{\ell}\, Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)\, \rho(\vec{r})$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\,\mathrm{grad}\,\phi_M(\vec{r})$$

$$\phi_M(\vec{r}) = \sum_{\ell m} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)}{r^{\ell+1}}\, M^{*}_{\ell m}$$

$$M_{\ell m} = -i\sqrt{\frac{\ell}{\ell+1}} \int d^3r\, r^{\ell}\, \vec{X}_{\ell m}(\vartheta,\varphi)\cdot \frac{\vec{j}(\vec{r})}{c}$$

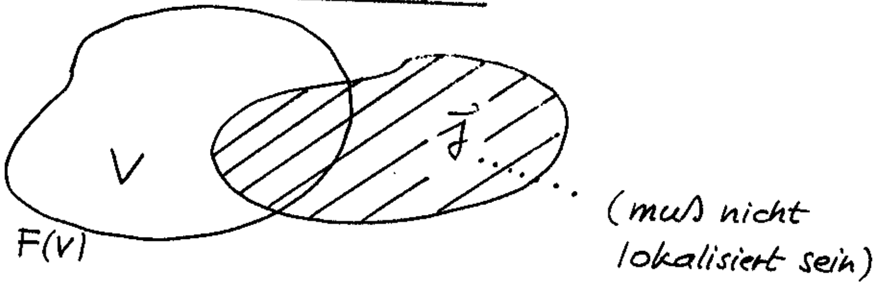
1) $\vec{X}^*_{00}(\Omega) = \vec{0} \implies M^*_{00} = 0$

2) $\vec{X}^*_{1m}(\Omega)$ Skriptum Anhang A $\implies$

$$M^*_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\, m_z \quad , \quad M^*_{1,\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,(m_x \mp i m_y)$$

IV.3 Magnetostatische Energie

IV.3.A. Selbstenergie und Wechselwirkungsenergie



Gesamtenergie im Volumen V

$$W_V = \frac{1}{8\pi}\int_V d^3r\, \vec{B}^2(\vec{r}) \qquad (40)$$

$$\vec{B}^2(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r})\cdot\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r})\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r}))$$

$$= \vec{\nabla}\cdot(\vec{A}(\vec{r})\times \underset{\uparrow}{\vec{B}(\vec{r})}) + \vec{A}(\vec{r})\cdot \underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r}))}_{\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r})}$$

$$\frac{1}{8\pi}\vec{B}^2(\vec{r}) = \frac{1}{2c}\vec{j}(\vec{r})\cdot\vec{A}(\vec{r}) + \frac{1}{8\pi}\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}(\vec{r})\times\vec{B}(\vec{r}))$$

$$W_V = \frac{1}{2c}\int_V d^3r\, \vec{j}(\vec{r})\cdot\vec{A}(\vec{r})$$
$$+ \frac{1}{8\pi}\oint_{F(V)} d^2\vec{f}\cdot(\vec{A}(\vec{r})\times\vec{B}(\vec{r})) \qquad (41)$$

Beachte: $V \uparrow \mathbb{R}^3$: $\oint\limits_{\substack{F(V)\\ V\uparrow\mathbb{R}^3}}$ muß nicht gegen null streben

Aber:

Gesamte magnetische Feldenergie im ganzen Raum bei natürlichen RB

$$W = \frac{1}{2c}\int d^3r\, \vec{j}(\vec{r})\cdot\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2c^2}\int d^3r \int d^3r'\, \frac{\vec{j}(\vec{r})\cdot\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Beitrag nur vom Raumbereich mit $\vec{j}(\vec{r}) \neq \vec{0}$! (42)

Bei Aufteilung der Quellen in "Komplexe"

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sum_n \vec{j}_n(\vec{r}) \qquad (43)$$

folgt daraus

$$W = \sum_{mn} \frac{1}{2c^2} \int d^3r \int d^3r' \, \frac{\vec{j}_m(\vec{r}) \cdot \vec{j}_n(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

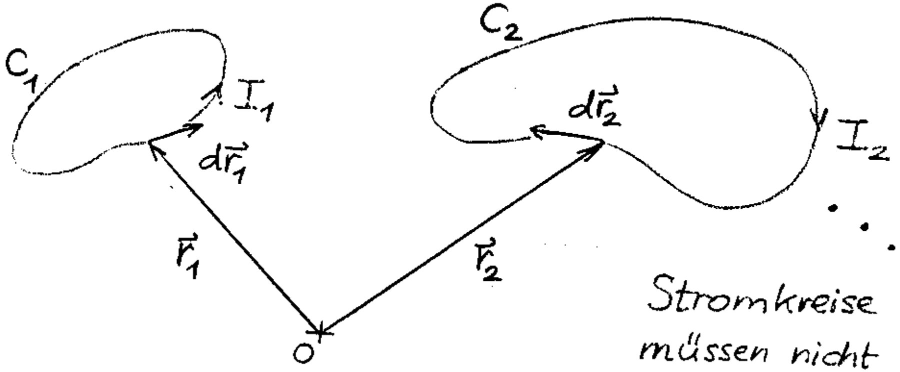
$$= W^{selbst} + W^{ww}$$

mit

$$W^{selbst} = \sum_n \underbrace{\boxed{\frac{1}{2c^2} \int d^3r \int d^3r' \, \frac{\vec{j}_n(\vec{r}) \cdot \vec{j}_n(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}}^{W_n^{selbst}} \qquad (44a)$$

$$W^{ww} = \sum_{\substack{mn \\ n<m}} \underbrace{\boxed{\frac{1}{c^2} \int d^3r \int d^3r' \, \frac{\vec{j}_m(\vec{r}) \cdot \vec{j}_n(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}}_{W_{mn}^{ww}} \qquad (44b)$$

IV. 3. B. Induktionskoeffizienten für ein System geschlossener Linienstromkreise



Stromkreise müssen nicht eben sein; Anordnung lokalisiert.

$$\underline{\vec{A}(\vec{r})} = \frac{1}{c} \int d^3r' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$= \sum_m \frac{1}{c} \int d^3r' \, \frac{\vec{j}_m(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \underline{\sum_m \frac{I_m}{c} \oint_{C_m} \frac{d\vec{r}_m}{|\vec{r}-\vec{r}_m|}}$$

$$\underline{W} = \frac{1}{2c} \int d^3r \, \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \sum_n \frac{I_n}{2c} \oint_{C_n} d\vec{r}_n \cdot \vec{A}(\vec{r}_n)$$

$$\underline{= \frac{1}{2} \sum_{mn} I_n I_m \underbrace{\frac{1}{c^2} \oint_{C_n} \oint_{C_m} \frac{d\vec{r}_n \cdot d\vec{r}_m}{|\vec{r}_n - \vec{r}_m|}}_{=: L_{nm}}} \qquad (46)$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \sum_{mn} L_{mn} I_m I_n} \qquad (48)$$

mit

$$L_{mn} = L_{nm} \doteq \frac{1}{c^2} \oint_{C_m} \oint_{C_n} \frac{d\vec{r}_m \cdot d\vec{r}_n}{|\vec{r}_m - \vec{r}_n|} \qquad (47)$$

Induktionskoeffizienten der Anordnung von Stromkreisen

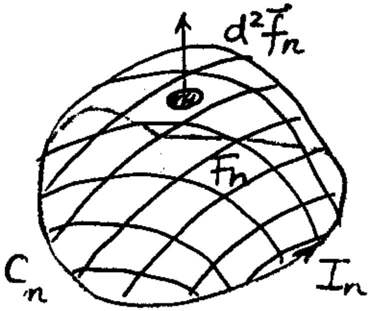
Nur abhängig von Form und (für $m \neq n$) gegenseitiger Lage der Stromkreise.

L_{nn} Selbst-*) induktionskoeff.

L_{mn}, $n \neq m$, Gegen-

*) s. IV-30'

Zusammenhang zwischen den Strömen und den magnetischen Flüssen durch die Stromkreise:



$$\Phi_n = \int_{F_n} d^2\vec{f}_n \cdot \vec{B}(\vec{r})$$

$$= \int_{F_n} d^2\vec{f}_n \cdot \mathrm{rot}\, \vec{A}(\vec{r}) \qquad (49)$$

$$= (\text{Stokes}) = \oint_{C_n} d\vec{r}_n \cdot \vec{A}(\vec{r}_n)$$

[Forts. IV-31]

Bemerkung zu den L_{nn}:

Die in (47) gegebene Definition liefert für $m=n$

$$L_{nn} = \frac{1}{c^2} \oint_{C_n} \oint_{C_n} \frac{d\vec{r}_n \cdot d\vec{r}_n{}'}{|\vec{r}_n - \vec{r}_n{}'|} \quad \nexists .$$

Zur Berechnung von L_{nn} (n fest) muß man die Idealisierung des Leiters $\mathcal{L}_n$ als Linienstrom (Linie C_n) "rückgängig" machen:

$$I_n d\vec{r}_n \longrightarrow \vec{\jmath}_n(\vec{r})\, d^3r .$$

Nimmt man an, daß der Leiter $\mathcal{L}_n$ die endliche Querschnittsfläche f_n besitzt durch die (gleich= verteilt über den Querschnitt) der Gesamtstrom I_n fließt, so hat man dann

$$L_{nn} = \frac{1}{c^2} \int_{\mathcal{L}_n} d^3r \int_{\mathcal{L}_n} d^3r' \, \frac{\frac{\vec{\jmath}_n(\vec{r})}{I_n} \cdot \frac{\vec{\jmath}_n(\vec{r}\,')}{I_n}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \qquad (47')$$

$\exists$, unabhängig von I_n, abhängig von f_n

Dabei gilt natürlich $L_{nn} \uparrow +\infty$ für $f_n \downarrow 0$ (logarithmische Divergenz).

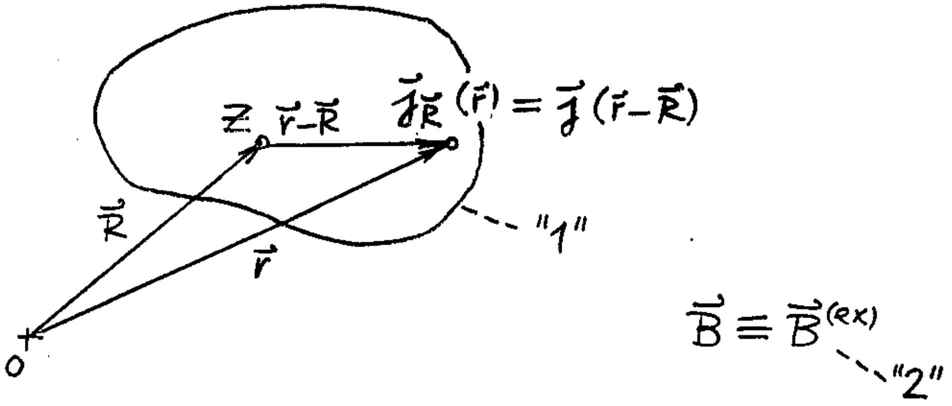
$$\frac{1}{c}\Phi_n = \frac{1}{c}\oint_{C_n} d\vec{r}_n \cdot \vec{A}(\vec{r}_n)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_m \frac{I_m}{c}\oint_{C_m} \frac{d\vec{r}_m}{|\vec{r}-\vec{r}_m|}$$

$$\frac{1}{c}\Phi_n = \sum_m I_m \underbrace{\frac{1}{c^2}\oint_{C_n}\oint_{C_m}\frac{d\vec{r}_n \cdot d\vec{r}_m}{|\vec{r}_n-\vec{r}_m|}}_{L_{nm}}$$

$$\boxed{\frac{1}{c}\Phi_n = \sum_m L_{nm} I_m} \qquad (50)$$

IV.3.C. Lokalisierte Stromverteilung in einem über dieselbe "quasihomogenen" äußeren Magnetfeld



$$\underbrace{W_{12}^{WW}}_{W^{WW}(\vec{R})} = \frac{1}{c}\int d^3r\, \underbrace{\vec{j}_1(\vec{r})}_{\vec{j}_{\vec{R}}(\vec{r}) = \vec{j}(\vec{r}-\vec{R})} \cdot \underbrace{\vec{A}_2(\vec{r})}_{\vec{A}^{(ex)}(\vec{r}) \equiv \vec{A}(\vec{r})}$$

$$W^{WW}(\vec{R}) = \frac{1}{c}\int d^3r\, \vec{j}(\vec{r}-\vec{R}) \cdot \vec{A}(\vec{r}) \qquad (51)$$

$$W^{WW}(\vec{R}) = \frac{1}{c}\int d^3r\, \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{R}+\vec{r})$$

$$\underline{\vec{A}(\vec{R}+\vec{r}) = \vec{A}(\vec{R}) + (\vec{r}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{R}})\vec{A}(\vec{R}) + \dots} \qquad (52)$$

$$W^{WW}(\vec{R}) = \frac{1}{c}\underbrace{\int d^3r\, \vec{j}(\vec{r})}_{\underline{(12)}:\ \vec{0}} \cdot \vec{A}(\vec{R}) \qquad \text{Monopolbeitrag}$$

$$+ \frac{1}{c}\int d^3r\, \underbrace{\vec{j}(\vec{r}) \cdot \left[(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{R}})\vec{A}(\vec{R})\right]}_{\underline{(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{R}})}(\vec{j}(\vec{r})\cdot\vec{A}(\vec{R}))} + \dots$$

Dipolbeitrag

Elektrostatik:

$$W^{WW}(\vec{R}) = q\phi(\vec{R}) - \vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{R}) + \dots$$

$$\underline{(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{R}})\vec{j}(\vec{r})}$$

$\underline{(13)}$:

$$(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')\vec{j}(\vec{r}\,') = -\frac{1}{2}\vec{r}\times(\vec{r}\,'\times\vec{j}(\vec{r}\,'))$$
$$+\frac{1}{2}(\vec{\nabla}'\cdot\vec{j}(\vec{r}\,'))(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')\vec{r}\,'$$

$\Rightarrow$

$$(\overset{\downarrow}{\vec{r}}\cdot\vec{r}\,')\vec{j}(\vec{r}) = \frac{1}{2}(\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r}))\times\overset{\downarrow}{\vec{r}\,'}$$
$$+\frac{1}{2}(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r}))(\vec{r}\cdot\overset{\downarrow}{\vec{r}\,'})\vec{r}$$

$\Rightarrow$ Formel

$$\underline{(\vec{r}\cdot\overset{\downarrow}{\vec{a}})\vec{j}(\vec{r}) = \frac{1}{2}(\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r}))\times\overset{\downarrow}{\vec{a}}}$$
$$\underline{+\frac{1}{2}(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r}))(\vec{r}\cdot\overset{\downarrow}{\vec{a}})\vec{r}} \qquad (F)$$

$\vec{a}$ beliebiger von $\vec{r}$ unabhängiger Vektor oder Vektoroperator

HIER:

$$\underline{(\vec{r}\cdot\overset{\downarrow}{\vec{\nabla}_{\vec{R}}})\vec{j}(\vec{r}) = \frac{1}{2}(\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r}))\times\overset{\downarrow}{\vec{\nabla}_{\vec{R}}}}$$
$$\underline{+\frac{1}{2}(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r}))(\vec{r}\cdot\overset{\downarrow}{\vec{\nabla}_{\vec{R}}})\vec{r}} \qquad (53)$$

$$W^{WW}(\vec{R}) = \frac{1}{c}\int d^3r \, \underbrace{\underline{(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{R}})(\vec{j}(\vec{r})}\cdot\vec{A}(\vec{R}))} \quad + \dots$$

$$\underline{\left[\tfrac{1}{2}(\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r}))\times\vec{\nabla}_{\vec{R}}\right]}\cdot\vec{A}(\vec{R})$$

$$+\underline{\tfrac{1}{2}(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r}))\,(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{R}})}\,(\vec{r}\cdot\vec{A}(\vec{R}))$$

$$W^{WW}(\vec{R}) = \frac{1}{2c}\int d^3r \left[(\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r}))\times\vec{\nabla}_{\vec{R}}\right]\cdot\vec{A}(\vec{R}) + \dots$$

$$\underline{\left[\overbrace{(\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r}))}^{\vec{b}(\vec{r})}\times\vec{\nabla}_{\vec{R}}\right]\cdot\vec{A}(\vec{R})}$$

$$= \overbrace{(\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r}))}^{\vec{b}(\vec{r})}\cdot(\vec{\nabla}_{\vec{R}}\times\vec{A}(\vec{R}))$$

$$= \underline{(\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r}))\cdot\vec{B}(\vec{R})}$$

$$W^{WW}(\vec{R}) = \underbrace{\frac{1}{2c}\int d^3r \,(\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r}))}_{\vec{m}}\cdot\vec{B}(\vec{R}) + \dots \qquad (54)$$

$$W^{WW}(\vec{R}) = \vec{m}\cdot\vec{B}(\vec{R}) + \dots \qquad (55)$$

Beachte :

?

Elektrostatik :

$$W^{WW}(\vec{R}) = q\,\Phi(\vec{R}) - \vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{R}) + \dots$$

IV. 4. Kräfte in Magnetfeldern

IV. 4. A. Kraft auf eine lokalisierte Stromverteilung in einem über dieselbe "quasihomogenen" äußeren Magnetfeld

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{2\to 1} = \frac{1}{c}\int d^3r \left[\underbrace{\vec{j}_1(\vec{r})}_{\vec{j}_{\vec{R}}(\vec{r}) = \vec{j}(\vec{r}-\vec{R})} \times \underbrace{\vec{B}_2(\vec{r})}_{\vec{B}^{(ex)}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r})}\right]$$

$$\vec{F}_1 \;\vdots\; \vec{F}(\vec{R})$$

Gesamtkraft auf die Stromverteilung (mit Zentrum am Ort $\vec{R}$)

$$\vec{F}(\vec{R}) = \frac{1}{c}\int d^3r \left[\vec{j}(\vec{r}-\vec{R})\times\vec{B}(\vec{r})\right] \qquad (56)$$

$$\vec{F}(\vec{R}) = \frac{1}{c}\int d^3r \left[\vec{j}(\vec{r})\times\vec{B}(\vec{R}+\vec{r})\right]$$

$$\underline{\vec{B}(\vec{R}+\vec{r}) = \vec{B}(\vec{R}) + (\vec{r}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{R}})\vec{B}(\vec{R}) + \dots}$$

$$\vec{F}(\vec{R}) = \frac{1}{c}\underbrace{\int d^3r\,\vec{j}(\vec{r})}_{\overset{(42)}{}\;\vec{0}}\times\vec{B}(\vec{R}) \qquad (57)$$

$$+\frac{1}{c}\int d^3r \left[\vec{j}(\vec{r})\times(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{R}})\vec{B}(\vec{R})\right] + \dots$$

$$\vec{F}(\vec{R}) = \frac{1}{c}\int d^3r\,\left[\vec{j}(\vec{r}) \times (\vec{r}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{R}})\vec{B}(\vec{R})\right] + \dots$$

$$\underline{\vec{j}(\vec{r}) \times (\vec{r}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{R}})\vec{B}(\vec{R})} = \underbrace{(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{R}})\,\vec{j}(\vec{r})}\times\vec{B}(\vec{R})$$

$$\underline{(53)}:\ \frac{1}{2}(\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r}))\times\vec{\nabla}_{\vec{R}} + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r}))(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{R}})\vec{r}$$

$$\underline{= \frac{1}{2}\left[(\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r}))\times\vec{\nabla}_{\vec{R}}\right]\times\vec{B}(\vec{R})}$$

$$\underline{+\frac{1}{2}(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r}))(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{R}})\,\vec{r}\times\vec{B}(\vec{R})}$$

$$\vec{F}(\vec{R}) = \Big[\underbrace{\frac{1}{2c}\int d^3r\,(\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r}))}_{\vec{m}}\times\vec{\nabla}_{\vec{R}}\Big]\times\vec{B}(\vec{R}) + \dots \qquad (58)$$

$$(\vec{m}\times\vec{\nabla}_{\vec{R}})\times\vec{B}(\vec{R}) = \vec{\nabla}_{\vec{R}}(\vec{m}\cdot\vec{B}(\vec{R})) - \vec{m}\,\underbrace{(\vec{\nabla}_{\vec{R}}\cdot\vec{B}(\vec{R}))}_{0}$$

$$\underline{\vec{F}(\vec{R}) = \vec{\nabla}_{\vec{R}}(\vec{m}\cdot\vec{B}(\vec{R}) + \dots)} \qquad (59)$$

$$= \vec{\nabla}_{\vec{R}}W^{WW}(\vec{R}) = -\vec{\nabla}_{\vec{R}}(\underset{\uparrow}{-}W^{WW}(\vec{R}))$$

Es fungiert also $-W^{WW}(\vec{R})$ (und nicht $W^{WW}(\vec{R})$) als mechanisches Potential –
im Gegensatz zur Elektrostatik

$$\vec{F}(\vec{R}) = q\vec{E}(\vec{R}) + \vec{\nabla}_{\vec{R}}(\vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{R})) + \dots = -\vec{\nabla}_{\vec{R}}W^{WW}(\vec{R})$$

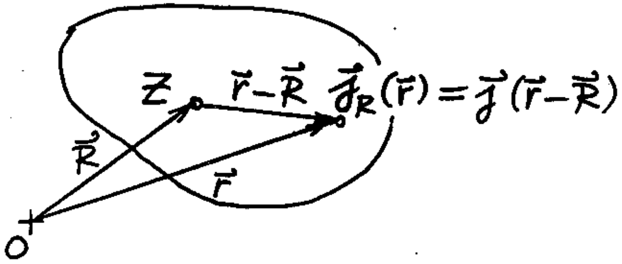
Die magnetostatische WW-Energie $W^{WW}(\vec{R})$, welche die als Feldenergie gespeicherte magnetische WW-Energie darstellt, kann nicht als mechanisches Potential der Kraft des äußeren Magnetfeldes auf die bzgl. $\vec{Z}$ feste Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$ angesehen werden.

Grund: Bei "starrer Bewegung" der Stromverteilung im äußeren Feld muß zur Aufrechterhaltung der Ströme Energie von außen nachgeliefert werden; andernfalls würden die bei der Bewegung auftretenden Induktionsspannungen die Ströme ändern (Faradaysches Induktionsgesetz).

(Diese nachzuliefernde Energie beträgt für einen magnetischen Punktdipol $\vec{m}$ gerade $+2(\vec{m}\cdot\vec{B})$, sodaß sich als WW-Energie $-\vec{m}\cdot\vec{B} + 2(\vec{m}\cdot\vec{B}) = +\vec{m}\cdot\vec{B}$ ergibt.)

UNTERSCHIED zur Elektrostatik!

Gesamtes auf die Stromverteilung (mit Zentrum am Ort $\vec{R}$) bzgl. des Zentrums wirkendes Drehmoment



$$\vec{N}(\vec{R}) = \frac{1}{c}\int d^3r \left[(\vec{r}-\vec{R})\times\left(\vec{j}(\vec{r}-\vec{R})\times\vec{B}(\vec{r})\right)\right]$$

$$\vec{N}(\vec{R}) = \frac{1}{c}\int d^3r \left[\vec{r}\times\left(\vec{j}(\vec{r})\times\vec{B}(\vec{R}+\vec{r})\right)\right] \qquad (60)$$

$$\underline{\vec{B}(\vec{R}+\vec{r}) = \vec{B}(\vec{R}) + \dots}$$

$$\vec{N}(\vec{R}) = \frac{1}{c}\int d^3r \left[\vec{r}\times\left(\vec{j}(\vec{r})\times\vec{B}(\vec{R})\right)\right] + \dots$$

$$= \frac{1}{c}\int d^3r\,(\vec{r}\cdot\vec{B}(\vec{R}))\,\vec{j}(\vec{r})$$

$$-\frac{1}{c}\underbrace{\int d^3r\,(\vec{r}\cdot\vec{j}(\vec{r}))}\,\vec{B}(\vec{R}) + \dots$$

$$0,\ \text{denn}:\ \underline{(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r}))\tfrac{1}{2}r^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\tfrac{1}{2}r^2 j_i(\vec{r})\right)$$

$$= \cancel{r}\frac{x_i}{\cancel{r}}j_i + \frac{1}{2}r^2\underbrace{\frac{\partial j_i}{\partial x_i}}_{0} = \underline{\vec{r}\cdot\vec{j}(\vec{r})}$$

$$\vec{N}(\vec{R}) = \underline{\frac{1}{c}}\int d^3r\,\underbrace{(\vec{r}\cdot\vec{B}(\vec{R}))\,\vec{j}(\vec{r})} + \dots$$

IV-33: <u>(F)</u> mit $\vec{a}\equiv\vec{B}(\vec{R})$:

$$\underline{\frac{1}{2}(\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r}))}\times\vec{B}(\vec{R}) + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r}))(\vec{r}\cdot\vec{B}(\vec{R}))\vec{r}$$

$$\underline{\vec{N}(\vec{R}) = \vec{m}\times\vec{B}(\vec{R}) + \dots} \qquad (61)$$

Elektrostatik: $\vec{N}(\vec{R}) = \vec{p}\times\vec{E}(\vec{R}) + \dots$

IV. 4. B. Bewegung eines geladenen Teilchens (nichtrelativistisch)

BG:

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(t) = q\,\frac{\vec{v}(t)}{c}\times\vec{B}(\vec{r}(t)) \qquad (62)$$

AB: $\vec{r}(0)=\vec{r}_0$
$\vec{v}(0)=\vec{v}_0$

$\Rightarrow$ (Arbeitssatz)

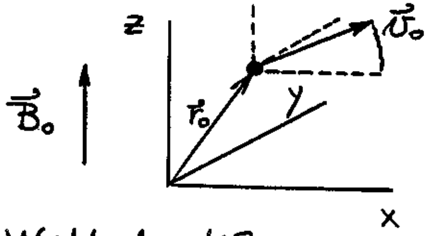
$$\frac{d}{dt}\,\frac{m\vec{v}^2(t)}{2} = \vec{F}(t)\cdot\vec{v}(t) = 0$$

$\Rightarrow$ $|\vec{v}(t)| = |\vec{v}_0|$ in beliebigen magnetischen Feldern

Homogenes Magnetfeld $\vec{B}_0$

$$\vec{\omega}_B := \frac{q}{mc}\vec{B}_0 \qquad (63)$$

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{v}(t) \times \vec{\omega}_B \qquad (64)$$



Wahl des KS

$$\underline{\omega_B = \frac{qB_0}{mc}} \quad \left(\begin{matrix}>0 \text{ falls}\\ q>0\end{matrix}\right)$$

$$\underline{\vec{\omega}_B = (0, 0, \omega_B)}$$

$$\underline{\vec{v}_0 = (v_{0x}, 0, v_{0z})}, \underline{v_{0x} \underset{(=)}{>} 0}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_B v_y(t) \\ -\omega_B v_x(t) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (65)$$

Integration gibt (<u>selbst rechnen</u>) :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_{0x} \cos\omega_B t \\ -v_{0x} \sin\omega_B t \\ v_{0z} \end{pmatrix} \qquad (66a)$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{v_{0x}}{\omega_B} \sin\omega_B t \\ \frac{v_{0x}}{\omega_B} [\cos\omega_B t - 1] \\ v_{0z} t \end{pmatrix} + \vec{r}_0 \qquad (66b)$$

$$\underline{a := \frac{v_{0x}}{\omega_B}} \qquad [\text{Länge}] \qquad (q > 0 \text{ betrachtet})$$

<u>1)</u> $\underline{v_{0x} = 0}$: <u>logitudinales Feld</u>

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_{0z} \end{pmatrix}, \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_{0z} t \end{pmatrix} + \vec{r}_0$$

<u>gleichförmig geradlinige Bewegung in Feldrichtung</u>

2) $\underline{v_{0x} > 0}$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_{0x} \cos\omega_B t \\ -v_{0x} \sin\omega_B t \\ v_{0z} \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \sin\omega_B t + x_0 \\ a [\cos\omega_B t - 1] + y_0 \\ v_{0z} t + z_0 \end{pmatrix}$$

<u>Überlagerung einer gleichförmig geradlinigen Bewegung in z-Richtung und einer dazu senkrechten Kreisbewegung</u>

= <u>Bewegung längs Spirale mit $|\vec{v}(t)| = |\vec{v}_0|$</u>

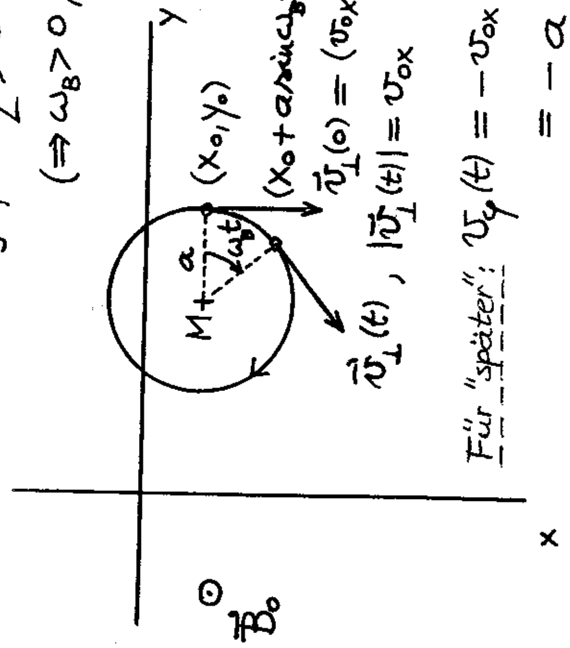
Projektion der Bahnkurve auf die xy-Ebene:

$$a = \frac{v_{0x}}{\omega_B}$$

Zeichnung für $q > 0$

$(\Rightarrow \omega_B > 0,\ a > 0)$

$M \ldots (x_0, y_0 - a)$



(x_0, y_0)

$(x_0 + a\sin\omega_B t,\ y_0 - a + a\cos\omega_B t)$

$\vec{v}_\perp(0) = (v_{0x}, 0)$

$\vec{v}_\perp(t)\ ,\ |\vec{v}_\perp(t)| = v_{0x}$

Für "später": $v_\varphi(t) = -v_{0x} = -a\omega_B$

$$= -a \frac{q}{mc} B_0$$

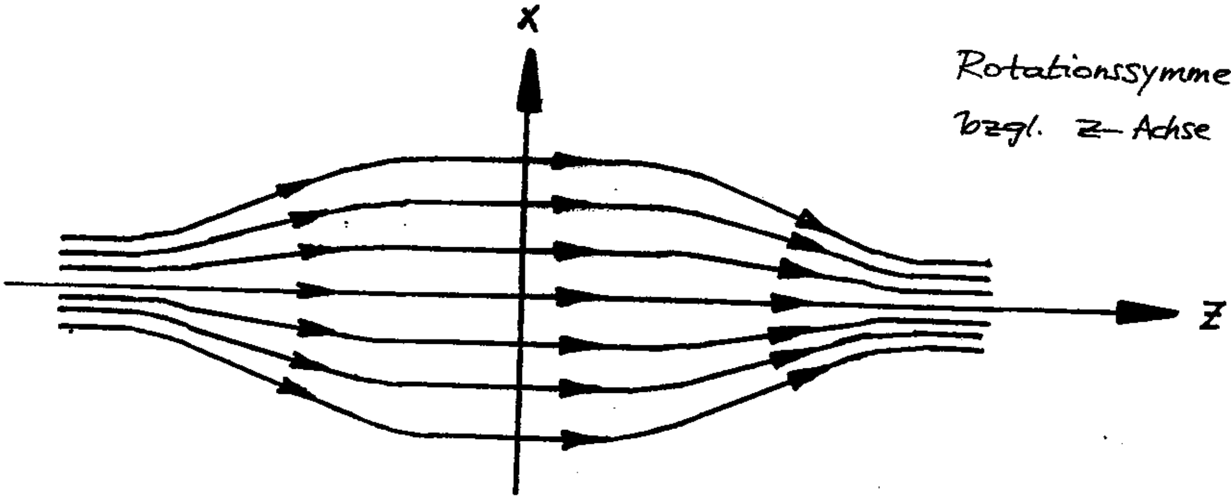
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + a\sin\omega_B t \\ y_0 - a + a\cos\omega_B t \\ z_0 + v_{0z} t \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow (x - x_0)^2 \\ \leftarrow + (y - y_0 + a)^2 = a^2 \\ \text{Kreislinie} \end{matrix}$$

Unterschiede zu spezieller Relativitätstheorie?

(In ω_B $m \rightarrow \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_0^2}{c^2}}}$; Selbstkraft.)

IV. 4. C. Magnetische Flasche

$$\vec{B}(\rho, \varphi, z) = B_\rho(\rho, z)\,\vec{e}_\rho + B_z(z)\,\vec{e}_z \tag{67}$$



Rotationssymmetrie bzgl. z-Achse

Fig. 4.3 Prinzipieller magnetischer Feldlinienverlauf für eine magnetische Flasche

$$\operatorname{div}\vec{B} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho B_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\underbrace{B_\varphi}_{0} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \tag{68}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho B_\rho(\rho, z)) = -\frac{dB_z(z)}{dz}\ ,\quad B_\rho(\rho, z) = -\frac{\rho}{2}\frac{dB_z(z)}{dz} \tag{69}$$

und $B_\rho(0, z) = 0$

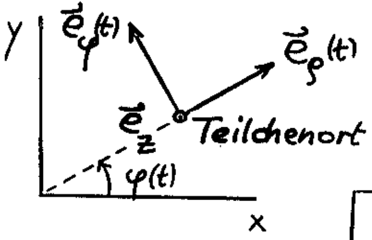
BG:

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{q}{mc}\vec{v}(t) \times \vec{B}(\vec{r}(t))$$

Zylinderkoo und -komponenten:

$$\vec{v}(t) = v_\rho(t)\vec{e}_\rho(t) + v_\varphi(t)\vec{e}_\varphi(t) + v_z(t)\vec{e}_z$$

$$\vec{B}(\vec{r}(t)) = B_\rho(\rho(t), z(t))\vec{e}_\rho(t) + B_z(z(t))\vec{e}_z$$



$$\vec{e}_\rho(t) = \cos\varphi(t)\vec{e}_x + \sin\varphi(t)\vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\varphi(t) = -\sin\varphi(t)\vec{e}_x + \cos\varphi(t)\vec{e}_y$$

$\boxed{\rho(t), \varphi(t), z(t)}$ gesucht

$$\underline{\frac{d}{dt}}\left(\underset{\uparrow}{v_\rho(t)}\underset{\uparrow}{\vec{e}_\rho(t)} + \underset{\uparrow}{v_\varphi(t)}\underset{\uparrow}{\vec{e}_\varphi(t)} + \underset{\uparrow}{\underline{v_z(t)\vec{e}_z}}\right)$$

$$= \underline{\frac{q}{mc}}\Big[v_\varphi(t)B_z(z(t))\vec{e}_\rho(t) \qquad (70)$$

$$+ \big(v_z(t)B_\rho(\rho(t),z(t)) - v_\rho(t)B_z(z(t))\big)\vec{e}_\varphi(t)$$

$$\underline{- v_\varphi(t)B_\rho(\rho(t),z(t))\vec{e}_z\Big]}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}v_z(t) = -\frac{q}{mc}v_\varphi(t)B_\rho(\rho(t),z(t))$$

Näherung zur qualitativen Abschätzung:

$$v_\varphi(t) = -v_{0x} = -a\omega_B = -a\frac{q}{mc}B_0$$ im homogenen Feld $B_0\vec{e}_z$

hier: $$v_\varphi(t) \approx -\rho(t)\frac{q}{mc}B_z(z(t)) \qquad (71)$$

$$\frac{d}{dt}v_z(t) = -\frac{q}{mc}v_\varphi(t)B_\rho(\rho(t),z(t)) \quad \Big| \cdot \frac{v_\varphi(t)}{v_\varphi(t)}$$

$$v_\varphi(t) \approx -\frac{q}{mc}\rho(t)B_z(z(t))$$

$$B_\rho(\rho,z) = -\frac{\rho}{2}\frac{dB_z(z)}{dz}$$

$$\frac{d}{dt}v_z(t) = -\cancel{\frac{q}{mc}}v_\varphi^2(t)\underbrace{\frac{B_\rho(\rho(t),z(t))}{v_\varphi(t)}}_{\approx \frac{B_\rho(\rho(t),z(t))}{-\cancel{\frac{q}{mc}}\rho(t)B_z(z(t))}}$$

$$\frac{d}{dt}v_z(t) \approx -v_\varphi^2(t)\cdot\underbrace{\left(\frac{-B_\rho(\rho(t),z(t))}{\rho(t)B_z(z(t))}\right)}_{\left[\frac{1}{2B_z(z)}\frac{dB_z(z)}{dz}\right]_{z=z(t)}}$$

$$a_z(t) \approx -v_\varphi^2(t)\left[\frac{1}{2B_z(z)}\cdot\frac{dB_z(z)}{dz}\right]_{z=z(t)} \qquad (72)$$

Raumbereich mit $\frac{dB_z(z)}{dz} \gtrless 0$

$\Rightarrow \quad a_z(t) \lessgtr 0$ (unabhängig vom Vorzeichen von $v_\varphi(t)$, also vom Vorzeichen von q!)

"Reflexion" an Flaschenenden ($|\vec{v}(t)|$ konstant!)