

FOLIEN VON D. GRAU ZUR
VORLESUNG "ELEKTRODYNAMIK
UND RELATIVITÄTSTHEORIE"
nach dem Skriptum von H. Nowotny

Kapitel 3

III. ELEKTROSTATIK IM VAKUUM

Max-Gln. im Vakuum: Statik

$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho$

$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\text{div } \vec{B} = 0$

$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Elektrostatik

--- "getrennt" ---

Magnetostatik
Kapitel IV

III. 1. A. Elektrische Felder bei natürlichen RB

$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \phi$

(5)

0 gesetzt
(willkürlich)

1) (5) erfüllt (4):

(II. 42a) $\phi_{\text{ret}}(\vec{r}, t) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

oder:

Beweis, daß

$G(|\vec{r} - \vec{r}'|) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$
Greenfunktion des Laplaceoperators
für natürliche RB

(6)

Partikulärintegral von

$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$

(6')

ist, womit

$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' G(|\vec{r} - \vec{r}'|) \rho(\vec{r}')$
 $= \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ folgt.

✓

III. 1 Randwertprobleme der Elektrostatik

$\text{div } \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r})$
 $\text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$

(1)

(1): $\text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \Rightarrow$

$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \phi(\vec{r})$

(3)

$\Rightarrow \text{div } \vec{E}(\vec{r}) = -\text{div grad } \phi(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r})$

$\Delta \phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r})$

Poissongleichung

(4)

FG

$$2) \vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \phi(\vec{r}) = - \int d^3r' \rho(\vec{r}') \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$- \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Halten wir schon
in Kapitel I ...

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

verschwindet für eine lokalisierte Quellverteilung

($\rho(\vec{r}') = 0$ für $|\vec{r}'| > R_0$) im Unendlichen

(wie $\frac{1}{r^2}$).

III.1.B. Randbedingungen auf geschlossenen Flächen (RWA der Potentialtheorie)

Für spezielle Randwertprobleme ist zur obigen

Lösung für $\phi(\vec{r})$ (bzw. $\vec{E}(\vec{r})$) eine geeignete

Lösung der homogenen Gl. (bzw. Gl.n.) zu

addieren:

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \phi_{\text{hom}}(\vec{r})$$

$$\text{mit } \Delta \phi_{\text{hom}}(\vec{r}) = 0 \quad (8)$$

Äquivalent dazu:

$$G_{\text{speziell}}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + G_{\text{hom}}(\vec{r}, \vec{r}') \quad (10)$$

$$\text{mit } \Delta G_{\text{hom}}(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad (9)$$

und

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' G_{\text{speziell}}(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') \quad (10')$$

Dirichletsche RWA:

$\phi(\vec{r})$ auf geschlossener Fläche vorgegeben

Physikalische Realisierung: System von (unterein=

ander isolierten) auf verschiedenen Potentialen

gehaltenen Leitern. (Bzgl. Leiter s. später.)

Satz: Durch Vorgabe von $\phi(\vec{r})$ auf einer

geschlossenen Fläche $F(V)$ ist das

Potential und damit die elektrische

Feldstärke in V eindeutig bestimmt.



Beweis:

1) Annahme: \exists 2 Lösungen $\phi_1(\vec{r}), \phi_2(\vec{r})$,
d.h. mit

$$\chi(\vec{r}) := \phi_1(\vec{r}) - \phi_2(\vec{r})$$

gilt $\Delta\chi(\vec{r}) = 0$ in V , $\chi(\vec{r}) = 0$ auf $F(V)$ (H)

wobei

$$\chi(\vec{r}) \neq 0 \text{ in } V$$

2) 1. Greenscher Satz (I.12a) gibt

$$\int_V d^3r \left[(\text{grad } \chi)^2 + \chi \Delta \chi \right] = \int_{F(V)} d^2f \chi \frac{\partial \chi}{\partial n} \quad (12)$$

$$\Rightarrow \text{grad } \chi(\vec{r}) \equiv 0 \text{ in } V$$

$$\Rightarrow \chi(\vec{r}) = \chi_0 \text{ in } V$$

$$\text{RB: } \chi_0 = 0 \Rightarrow \chi(\vec{r}) = 0 \text{ in } V \text{ Widerspruch}$$

Neumannsche RWA:

$$\frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial n} \equiv \vec{n}(\vec{r}) \cdot \text{grad } \phi(\vec{r}) \text{ auf}$$

geschlossener Fläche vorgegeben

$\vec{n}(\vec{r})$... Flächennormalenvektor im Flächenpunkt \vec{r}

Physikalische Realisierung: ?

(Würde Vorgabe der Flächenladungsdichte $\sigma(\vec{r})$ auf Leitoberfläche entsprechen. Im Experiment kann man aber nur die Gesamtladung auf einer Leitoberfläche vorgeben, wie sich diese verteilt ist a priori unbekannt und geometrieabhängig.)

Satz: Durch Vorgabe von $\frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial n}$ auf einer geschlossenen Fläche $F(V)$ ist das Potential in V bis auf eine additive Konstante und damit die elektrische Feldstärke in V eindeutig bestimmt.

Beweis: analog wie oben (Details selbst anschreiben)

1) Annahme: $\chi(\vec{r}) := \phi_1(\vec{r}) - \phi_2(\vec{r}) \neq \text{konst.}$ in V

2) 1. Grenzscher Satz gibt

$\chi(F) = \chi_0$ in V Widerspruch

Bemerkung: Man kann auch "gemischte" RB
vorgeben ($\phi(F)$ auf "Teil" von $F(V)$, $\frac{\partial \phi(F)}{\partial n}$
auf "Rest" von $F(V)$ vorgegeben).

Diese RWA wird aber im Folgenden nicht
betrachtet. ●

Spezielle Greenfunktionen $G_D(\vec{r}, \vec{r}')$, $G_N(\vec{r}, \vec{r}')$

Anwendung des 2. Greenschen Satzes (I.12b)

$$\int_V d^3r' \left[\underbrace{u(\vec{r}')}_{\phi(\vec{r}')} \Delta' v(\vec{r}') - \underbrace{v(\vec{r}')}_{\phi(\vec{r}')} \Delta' u(\vec{r}') \right]$$

$$= \oint_{F(V)} d^2f' \left[u(\vec{r}') \frac{\partial v(\vec{r}')}{\partial n'} - v(\vec{r}') \frac{\partial u(\vec{r}')}{\partial n'} \right]$$

Beachte:
 $G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}'/\vec{r})$

$$\int_V d^3r' \left[\underbrace{G(\vec{r}, \vec{r}') \Delta' \phi(\vec{r}')}_{-4\pi \rho(\vec{r}')} - \phi(\vec{r}') \underbrace{\Delta' G(\vec{r}, \vec{r}')}_{-4\pi \delta(\vec{r}-\vec{r}') \uparrow} \right] \quad (13)$$

$$= \oint_{F(V)} d^2f' \left[G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \phi(\vec{r}')}{\partial n'} - \phi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \right] \Rightarrow$$

Ist $G(\vec{r}, \vec{r}')$ eine beliebige Greenfunktion des Laplaceoperators, so gilt für Punkte \vec{r} in V

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d^3r' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') + \frac{1}{4\pi} \oint_{F(V)} d^2f' \left[G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \phi(\vec{r}')}{\partial n'} - \phi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \right] \quad (14)$$

Dirichletsche RWA:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = G_D(\vec{r}, \vec{r}')$$

Dirichletsche Greenfunktion verwendet

RWA

$$\begin{aligned} \Delta G_D(\vec{r}, \vec{r}') &= -4\pi \delta(\vec{r}-\vec{r}'), \vec{r}, \vec{r}' \text{ in } V \\ G_D(\vec{r}, \vec{r}') &= 0 \text{ für } \vec{r}' \text{ auf } F(V) \end{aligned}$$

lösen, (15a)

dann folgt für die Lösung der

Dirichletschen RWA

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d^3r' G_D(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') - \frac{1}{4\pi} \oint_{F(V)} d^2f' \phi(\vec{r}') \frac{\partial G_D(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'}$$

\vec{r} in V

Vorgegebene RB

Neumannsche RWA:

$$G(F, F') = G_N(F, F')$$

Neumannsche Greenfunktion

verwendet

ABER:

RWA

$$\Delta G_N(F, F') = -4\pi \delta(F - F'), \quad F, F' \text{ in } V$$

$$\frac{\partial G_N(F, F')}{\partial n'} = 0 \quad \text{für } F' \text{ auf } F(V)$$

besitzt keine Lösung (Widerspruch zwischen

Dgl. und RB!): Gauss

$$\int_V d^3r' \underbrace{\Delta' G_N(F, F')}_{-4\pi \delta(F - F') \text{ für } F \text{ in } V} = \int_V d^2f' \underbrace{\frac{\partial G_N(F, F')}{\partial n'}}_{\text{kann nicht Null sein!}} = -4\pi$$

↖

⇒ einfachste erlaubte RB für G_N : konstanter Wert

$$\frac{\partial G_N(F, F')}{\partial n'} = -\frac{4\pi}{|F|}, \quad |F| \text{ Flächeninhalt von } F(V)$$

Somit:

RWA

$$\Delta G_N(F, F') = -4\pi \delta(F - F'), \quad F, F' \text{ in } V$$

$$\frac{\partial G_N(F, F')}{\partial n'} = -\frac{4\pi}{|F|} \quad \text{für } F' \text{ auf } F(V)$$

lösen!

dann folgt für die Lösung der

Neumannschen RWA

$$\phi(F) = \int_V d^3r' G_N(F, F') \rho(F') + \frac{1}{4\pi} \int_{F(V)} d^2f' G_N(F, F') \frac{\partial \phi(F')}{\partial n'} + \text{konst.}$$

Vorgegebene RB

$$\text{aus: } -\frac{1}{4\pi} \int_{F(V)} d^2f' \phi(F') \underbrace{\frac{\partial G_N(F, F')}{\partial n'}}_{-\frac{4\pi}{|F|}}$$

$$= \frac{1}{|F|} \int_{F(V)} d^2f' \phi(F') = \text{konst.} = \text{unbekannt, aber}$$

$$= \text{Mittelwert von } \phi \text{ auf } F(V)$$

entstanden.

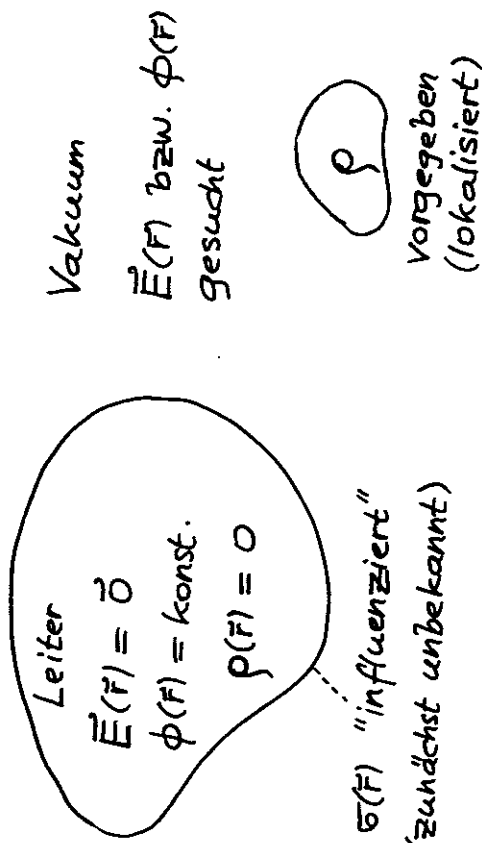
Bemerkungen:

- 1) G_D, G_N lassen sich nur für besonders einfache Geometrie von $F(V)$ analytisch berechnen (z.B. Kugel).
- 2) Für $|F| \rightarrow +\infty$ folgt konst. = 0, falls $\int d^2f' \phi(F') \neq 0$.

III.1.C. Randbedingungen bei Anwesenheit von Leitern

Leiter: frei bewegliche Ladungen, welche den Leiter (bei den üblichen Feldstärken) nicht verlassen können.

Situation nach Einbringen eines Leiters in das Feld einer vorgegebenen Ladungsverteilung und Abwarten des Einstellens eines zeitunabhängigen Zustandes:



Bestimmung von $\vec{E}(\vec{r})$ bzw. $\phi(\vec{r})$ im Außenraum der Leiter sowie Bestimmung von $\sigma(\vec{r})$ auf den Leiteroberflächen:

III-12
Lösen der FG der Elektrostatik im Außenraum der Leiter (Vakuum) unter Verwendung der

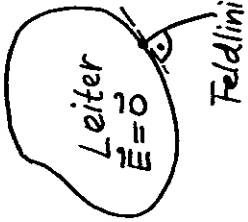
Randbedingungen

$\vec{E}_{\text{tg}}(\vec{r}) = \vec{0}$ bzw. $\phi(\vec{r}) = \text{konst.}$

und

$E_n(\vec{r}) = 4\pi\sigma(\vec{r})$

auf den Leiteroberflächen



(20)

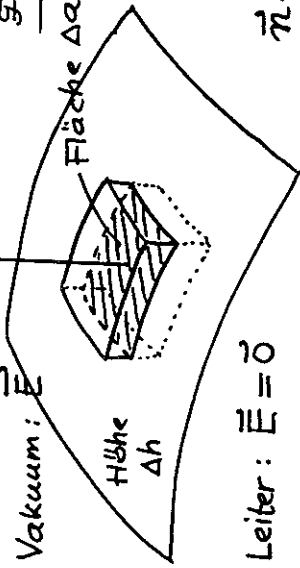
Physikalisch vorgeben kann man auf jeder der Leiteroberflächen

entweder die Gesamtladung
oder den Wert des Potentials !

(der Potentialdifferenz gegen das Unendliche)

Beweis der RB: "skizziert"

1)
$$\oint_{S(\sigma)} d^2\vec{f} \cdot \vec{E} = 4\pi \int_V d^3r \rho$$



Vakuum: \vec{E}
 Fläche Δa
 Höhe Δh
 Bis auf höhere Ordnungen in $\Delta a, \Delta h$ gilt:

Leiter: $\vec{E} = \vec{0}$

$$\vec{n} \cdot (\vec{E} - \vec{0}) \Delta a = 4\pi \int_{-\frac{\Delta h}{2}}^{+\frac{\Delta h}{2}} \rho dh \cdot \Delta a$$

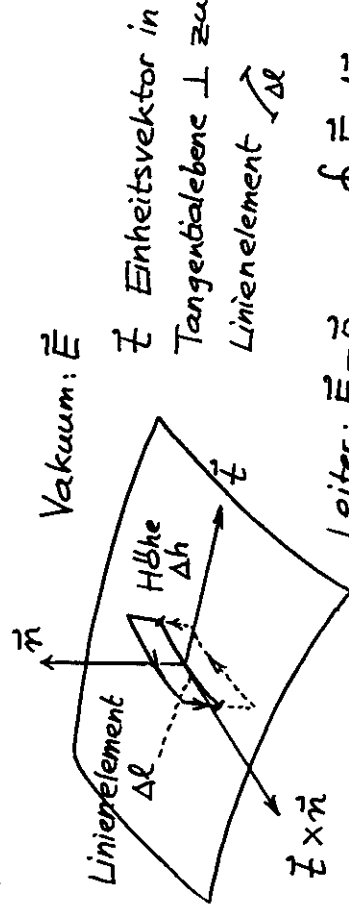
$\Delta a \rightarrow 0, \Delta h \rightarrow 0:$

$$\vec{n} \cdot \vec{E} \equiv E_n = 4\pi \sigma + \frac{\Delta h}{2}$$

mit
$$G = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{-\frac{\Delta h}{2}}^{+\frac{\Delta h}{2}} \rho dh$$

(Physikalisch: $\int \rho dh$ über dünne Oberflächenschicht)

2)



Vakuum: \vec{E}
 \vec{z} Einheitsvektor in Tangentialebene \perp zu Linienelement Δl

Leiter: $\vec{E} = \vec{0}$ $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$

Bis auf höhere Ordnungen in $\Delta l, \Delta h$ gilt: $(\vec{z} \times \vec{n}) \cdot (\vec{E} - \vec{0}) \Delta l = 0$

$$(\vec{z} \times \vec{n}) \cdot \vec{E} = (\vec{n} \times \vec{E}) \cdot \vec{z} = 0$$

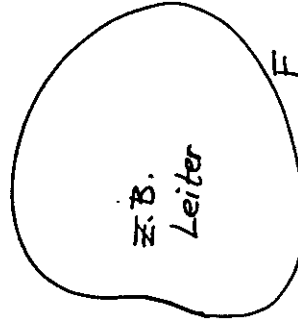
muß für beliebige Linienelemente durch den Flächenpunkt, also für beliebiges \vec{z} , gelten

$$\Rightarrow \vec{n} \times \vec{E} = \vec{n} \times \vec{E}_{tg} = \vec{0}$$

bzw. $\vec{E}_{tg} = \vec{0}$

III.1.D. Methode der Bild- (Spiegel-)ladungen

Prinzip der Methode: 1) zu lösendes Problem



$\rho(\vec{r})$ vorgegeben (lokalisiert)

V Vakuum

$$\vec{E}(\vec{r}) \text{ bzw. } \phi(\vec{r})$$

gesucht für \vec{r} in V

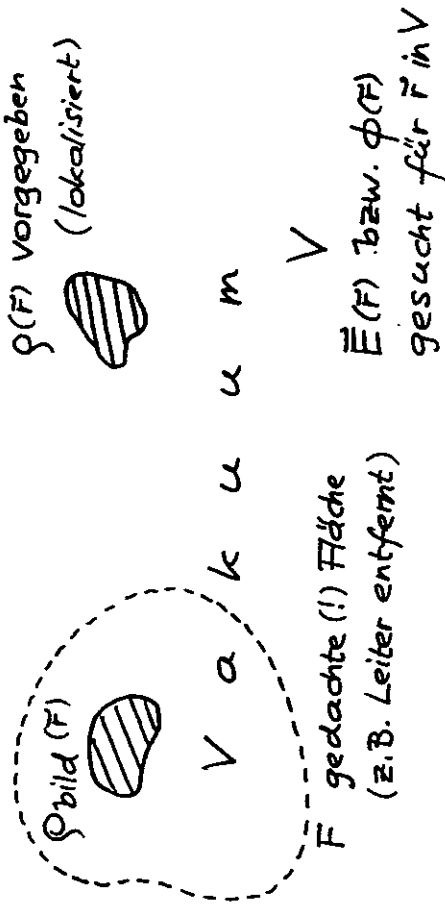
$$\Delta \phi_{\text{hom}}(\vec{r}) = 0 \text{ für } \vec{r} \text{ in } V \quad (21)$$

$$(22)$$

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \underbrace{\phi_{\text{hom}}(\vec{r})}_{\text{so zu bestimmen, das RB auf F (und im Unendlichen) erfüllt sind}}$$

so zu bestimmen, das RB auf F (und im Unendlichen) erfüllt sind

2) Ersatzproblem



$\rho_{\text{bild}}(F)$ fiktive Bild- (Spiegel-)ladungsverteilung

$\rho_{\text{bild}}(F) = 0$ für \vec{r} in V (24a)

$\Rightarrow \Delta \phi_{\text{bild}}(F) = -4\pi \rho_{\text{bild}}(F) = 0$ für \vec{r} in V (24b)

$\rho_{\text{bild}}(F)$ so zu wählen, dass

$$\phi(F) = \int_V d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \underbrace{\int_V d^3r' \frac{\rho_{\text{bild}}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{\phi_{\text{bild}}(F) = \phi_{\text{hom}}(F)}, \quad \vec{r} \text{ in } V$$

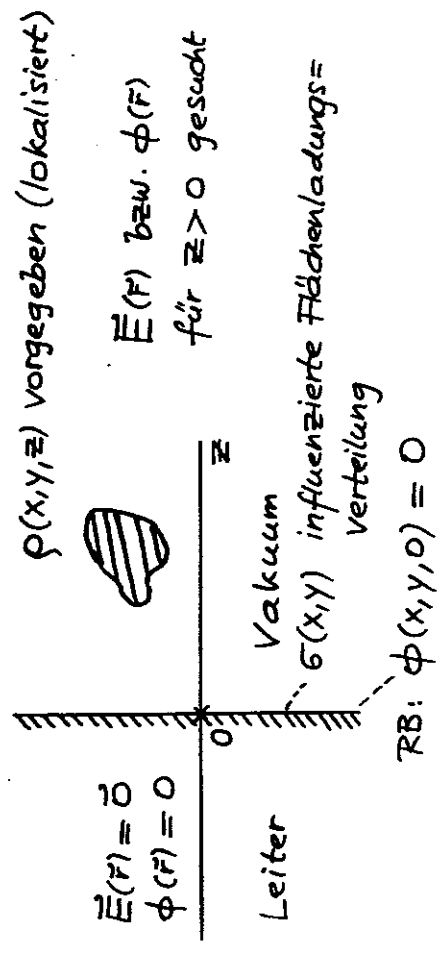
auf der gedachten Fläche F die RB des eigentlichen Problems erfüllt

Ein solches $\rho_{\text{bild}}(F)$ zu finden, gelingt nur bei besonders einfacher Geometrie von F und einfachen RB (z.B. Leiter).

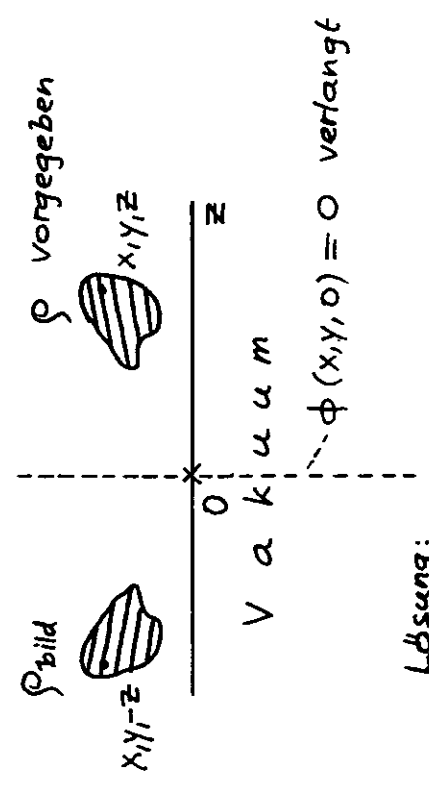
Beispiele:

a) Ebene Leiteroberfläche (unendlich ausgedehnt) auf dem Potential null ("geerdet")

Eigentliches Problem

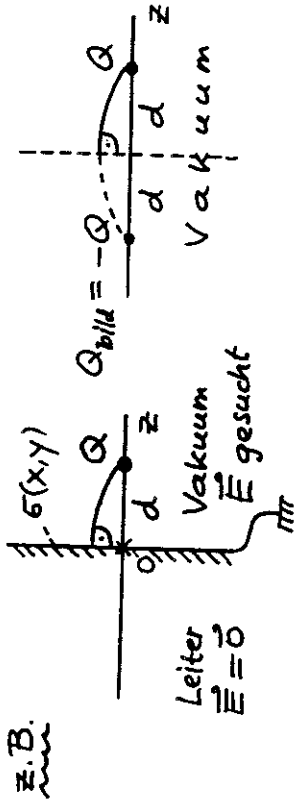


Ersatzproblem (für $z > 0$)



Lösung:

$\rho_{\text{bild}}(x,y,z) = -\rho(x,y,z)$ (25)



Lösung:
$$\phi(r) = \frac{Q}{|\vec{r}-d\vec{e}_z|} - \frac{Q}{|\vec{r}+d\vec{e}_z|}, \quad z \geq 0$$

$$\phi(x,y,0) = \frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+d^2}} - \frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+d^2}} = 0 \quad \forall x,y$$

$$\vec{E}(r) = \frac{Q(\vec{r}-d\vec{e}_z)}{|\vec{r}-d\vec{e}_z|^3} - \frac{Q(\vec{r}+d\vec{e}_z)}{|\vec{r}+d\vec{e}_z|^3}, \quad z \geq 0$$

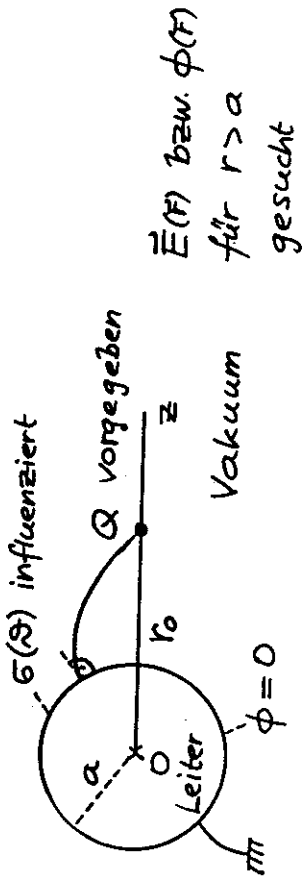
$$\sigma(x,y) = \frac{1}{4\pi} E_z(x,y,0) = -\frac{1}{2\pi} \frac{Qd}{(x^2+y^2+d^2)^{3/2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \sigma(x,y) = -Q = Q_{\text{bild}}$$

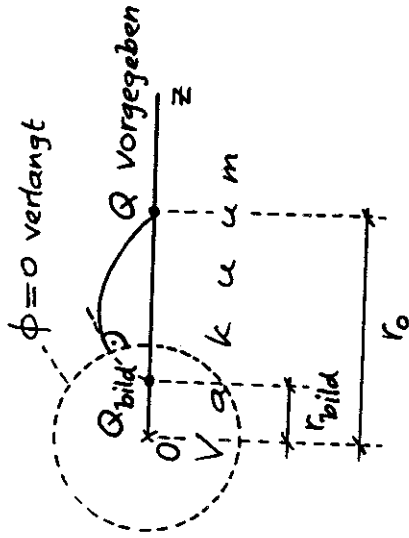
b) Kugelförmige Leiteroberfläche

b1) auf dem Potential null ("geerdet")

Eigentliches Problem



Ersatzproblem (für r > a): ANSATZ



Lösung:

$$Q_{\text{bild}} = -Q \frac{a}{r_0}$$

$$r_{\text{bild}} = \frac{a^2}{r_0}$$

$$|Q_{\text{bild}}| < |Q|$$

Gesamtladung auf Leiteroberfläche:

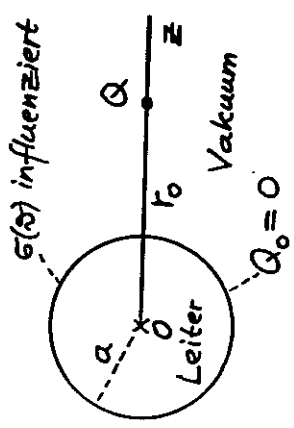
$$Q_{\text{bild}} = -Q \frac{a}{r_0}$$

Begründung:

integrale Form

des Coulombgesetzes!

b2) ungeladen

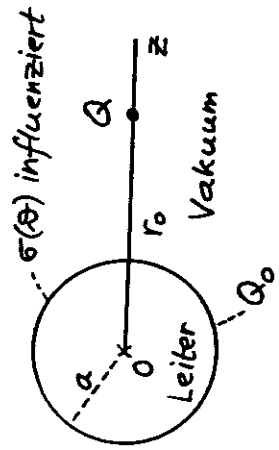


$Q_{\text{bild}}, r_{\text{bild}}$ wie zuvor

Potential auf Leiteroberfläche:

$$\phi(a, \vartheta, \varphi) = \phi_0 = -\frac{Q_{\text{bild}}}{a}$$

b3) mit der Gesamtladung $Q_0 \neq 0$

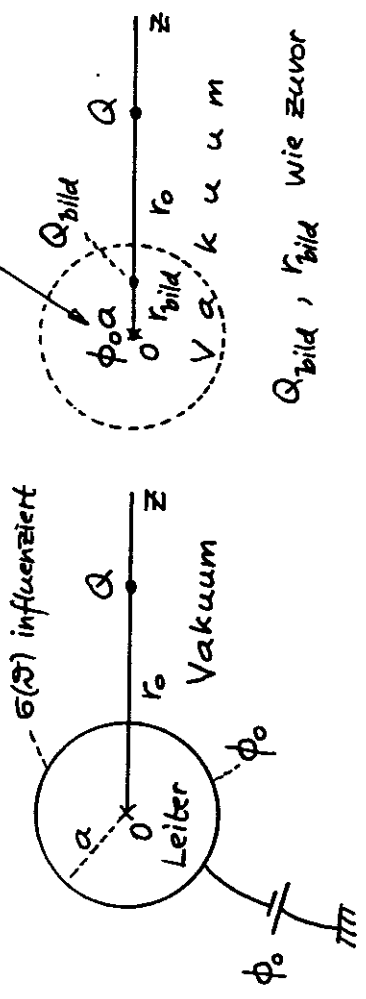


$Q_{\text{bild}}, r_{\text{bild}}$ wie zuvor

Potential auf Leiteroberfläche:

$$\phi(a, \vartheta, \varphi) = \phi_0 = \frac{Q_0}{a} - \frac{Q_{\text{bild}}}{a}$$

b4) auf dem Potential $\phi_0 \neq 0$

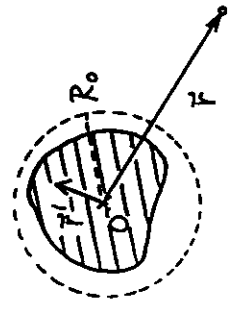


$Q_{\text{bild}}, r_{\text{bild}}$ wie zuvor

Gesamtladung auf der Leiteroberfläche:

$$\int_{\text{Leit}} d\Omega \sigma(r) = \phi_0 a + Q_{\text{bild}} = \phi_0 a - Q \frac{a}{r_0}$$

III.2 Elektrostatistische Multipolentwicklung.
Elektrisches Feld in großer Entfernung
einer lokalisierten Ladungsverteilung



Lokalisierte Ladungsverteilung
 (im engeren Sinn):

$$\rho(F') = 0 \text{ für } r' > R_0 \quad (26)$$

$$\underline{(5)}: \phi(F) = \int d^3r' \frac{\rho(F')}{|F - F'|} \quad (27)$$

III.2.A. Kartesische Multipolentwicklung

III-21

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$r > r_0$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}')^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2}}$$

$$= \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}}}$$

(28)

$$= \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - r'^2 r^2}{r^5} + \dots$$

$$\underline{\underline{\phi(\vec{r})}} = \frac{1}{r} \int d^3r' \rho(\vec{r}') + \frac{x_j x_j}{r^3} \int d^3r' x'_j \rho(\vec{r}') + \dots$$

bereits "faktorisier" $\Rightarrow \underline{\underline{\phi_{\text{monopol}}(\vec{r})}}$ + $\underline{\underline{\phi_{\text{dipol}}(\vec{r})}}$ \leftarrow ... bereits "faktorisier"

$$+ \frac{1}{2r^5} \int d^3r' [3x_j x_k x'_j x'_k - x'_j x'_j x'_k x'_k] \rho(\vec{r}')$$

+ $\underline{\underline{\phi_{\text{quadrupol}}(\vec{r})}}$ + ...
 "Zerlegung" ("Faktorisierung") der \vec{r} - und \vec{r}' -Abhängigkeit nicht eindeutig möglich

kartesische Multipolentwicklung für $r > r_0$ (Koeffizienten evtl. numerisch berechnen!)

Monopolbeitrag

$$\phi_{\text{monopol}}(\vec{r}) = \frac{1}{r} \int d^3r' \rho(\vec{r}')$$

$$\underline{\underline{Q}} := \int d^3r \rho(\vec{r})$$

unabhängig von Wahl des Koordinatensystems
 = Gesamtladung der Ladungsverteilung
 kartesisches ELEKTRISCHES MONOPOLMOMENT (30a)

$$\underline{\underline{\phi_{\text{monopol}}(\vec{r})}} = \frac{Q}{r}$$

$$\underline{\underline{\vec{E}_{\text{monopol}}(\vec{r})}} = \frac{Q\vec{r}}{r^3}$$

(30b)

$r > r_0$

(30c)

Dipolbeitrag

$$\phi_{\text{dipol}}(\vec{r}) = \frac{x_j}{r^3} \int d^3r' x'_j \rho(\vec{r}')$$

$$\underline{\underline{\vec{p}}} := \int d^3r \vec{r} \rho(\vec{r})$$

von der Wahl des Koordinatensystems nur dann unabhängig, falls $Q = 0$ gilt
 kartesisches ELEKTRISCHES DIPOLMOMENT der Ladungsverteilung (31a)

$$\phi_{\text{dipol}}(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{E}_{\text{dipol}}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{p}}{r^5}$$

(31b)

 $r > R_0$

(31c)

Quadrupolbeitrag

$$\phi_{\text{quadrupol}}(\vec{r}) = \frac{1}{2r^5} \int d^3r' [3x_j x_k x'_j x'_k - x_j x_j x'_k x'_k] \rho(\vec{r}')$$

"Faktorisierungsmöglichkeiten":

$$3x_j x_k x'_j x'_k - x_j x_j x'_k x'_k$$

$$= x_j x_k (3x'_j x'_k - \delta_{jk} r'^2)$$

$$= (3x_j x_k - \delta_{jk} r^2) x'_j x'_k$$

$$= \frac{1}{3} (3x_j x_k - \delta_{jk} r^2) (3x'_j x'_k - \delta_{jk} r'^2) \quad [3]$$

Meist wird die Möglichkeit [1] (bzw. [3]) bevorzugt:

$$Q_{jk} := \int d^3r (3x_j x_k - r^2 \delta_{jk}) \rho(\vec{r}) \quad (32a)$$

 $\vec{Q} = (Q_{jk})$ kartesisches
ELEKTRISCHES QUADRUPOLE
MOMENT

\vec{Q} von der Wahl des Koordinatensystems
nur dann unabhängig, falls $q=0$ und $\vec{p}=\vec{0}$
gilt

$$\phi_{\text{quadrupol}}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \frac{x_j x_k}{r^5} Q_{jk} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{Q} \cdot \vec{r}}{2r^5} \quad (32b)$$

$$= \frac{1}{6} \frac{3x_j x_k - r^2 \delta_{jk}}{r^5} Q_{jk} \quad [1]$$

$$\vec{E}_{\text{quadrupol}}(\vec{r}) = \frac{5(\vec{r} \cdot \vec{Q} \cdot \vec{r})\vec{r} - 2r^2 \vec{Q} \cdot \vec{r}}{2r^7} \quad [3]$$

(32c)

Beachte: \vec{Q} ist symmetrisch $r > R_0$ und besitzt die Spur null:

$$Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0$$

Bemerkung: \vec{Q} stellt deshalb einen irreduziblen
Tensor vom Rang 2 bzgl. Drehungen
dar (Transformation gemäß $D^{(2)}$)

"außer Konkurrenz"

Vielfach wird in der Literatur gemäß Faktorisierung [2]

$$\vec{Q}_{jk} := \int d^3r \downarrow 3x_j x_k \rho(\vec{r}) \quad \text{--- s. auch VI.3.D!}$$

verwendet (und dann ohne Querbalken geschrieben):

$$\Rightarrow \phi_{\text{quadrupol}}(\vec{r}) = \frac{1}{6} \frac{3x_j x_k - r^2 \delta_{jk}}{r^5} \vec{Q}_{jk} \quad (32b') \quad [2]$$

Bemerkung: Die von null verschiedene Spur von \vec{Q} ist eine Drehinvariante (Konkurrenz!) (Transformation gemäß $D^{(0)} = 1$)

III. 2. B. Sphärische Multipolentwicklung

Bemerkung:
für $r > r'$
reguläre
Partikulärlsgn.
der Laplacegl. \square

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$r > R_0$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{\ell m} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{r'^{\ell}}{r^{\ell+1}} Y_{\ell m}(\vartheta', \varphi) Y_{\ell m}^*(\vartheta, \varphi) \quad (33)$$

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{\ell m} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)}{r^{\ell+1}} \int d^3r' r'^{\ell} Y_{\ell m}^*(\vartheta', \varphi) \rho(\vec{r}') \quad (34)$$

$$Q_{\ell m} := \int d^3r r^{\ell} Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) \rho(\vec{r}) \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (35)$$

$m = -\ell, \dots, +\ell$

Sphärische ELEKTRISCHE MULTIPOLMOMENTE

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{\ell m} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)}{r^{\ell+1}} Q_{\ell m}^* \quad (34')$$

Bemerkung: Manche Autoren (z.B. Landau/Lifschitz) "Spalten" $\frac{4\pi}{2\ell+1}$ "symmetrisch auf", nehmen also den Faktor $\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}$ in die Definition der $Q_{\ell m}$ auf.

$Q_{\ell m}$, $m = -\ell, -\ell+1, \dots, +\ell$
sphärisches 2^{ℓ} -polmoment

$2\ell+1$ Komponenten

$\ell=0$: Monopolmoment

$$Q_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} Q$$

$\ell=1$: Dipolmoment

$$Q_{1,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (\rho_x \mp i\rho_y)$$

$$Q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \rho_z$$

$\ell=2$: Quadrupolmoment

$$Q_{2,\pm 2} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{32\pi}} (Q_{xx} - Q_{yy} \mp 2i Q_{xy})$$

$$Q_{2,\pm 1} = \mp \frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (Q_{xz} \mp i Q_{yz})$$

$$Q_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} Q_{zz}$$

(5 Komponenten $\leftrightarrow Q_{jk} = Q_{kj}$, $\sum_i Q_{ii} = 0$!)

$\ell=3$: Oktupolmoment

⋮

$$\begin{aligned}
 q_{\ell m} &= \int d^3r r^\ell Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) \rho(\vec{r}) \\
 q_{\ell m}^* &= \int d^3r r^\ell \underbrace{Y_{\ell m}^*(\vartheta, \varphi)}_{(-1)^m Y_{\ell, -m}(\vartheta, \varphi)} \rho(\vec{r}) \quad \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$q_{\ell m}^* = (-1)^m q_{\ell, -m} \quad (36)$$

Wir hätten bei den Beispielen also nur die $\ell+1$ Komponenten $q_{\ell m}$, $m=0, 1, \dots, \ell$, angeben müssen.

Definition: Betrag des 2^ℓ -Polmomentes

$$|q_\ell| = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_m |q_{\ell m}|^2} \quad (37)$$

$\ell=1$:

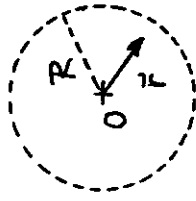
$$|q_1| = \sqrt{p^2}$$

III.2.C. Mittelwert des elektrischen Feldes (Kugelbereich) bei natürlichen RB

VS: Natürliche RB:

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Koo-Ursprung in Mittelpunkt der Mittelungskugel gelegt:



Arithmetisches Mittel gebildet

$$\langle \vec{E} \rangle_R = \frac{3}{4\pi R^3} \int_{r < R} d^3r \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{3}{4\pi R^3} \int_{r < R} d^3r \text{grad} \phi(\vec{r})$$

= (verallg. Gaußscher Satz)

$$= -\frac{3}{4\pi R^3} \oint_{r=R} d^2\vec{f} \phi(\vec{r}) \quad (38)$$

$$= -\frac{3}{4\pi R^3} \oint_{r=R} d^2\vec{f} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$= -\int_{r=R} d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{3}{4\pi R^3} \oint d^2\vec{f} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (39)$$

$$\langle \vec{E} \rangle_R = - \int d^3r' \rho(\vec{r}') \underbrace{\frac{3}{4\pi R^3} \oint_{r=R} d^2\vec{f} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{\substack{\frac{r'}{R^3}, r' \geq R \\ \frac{r'}{R^3}, r' \leq R}}$$

Beweis (40)
später

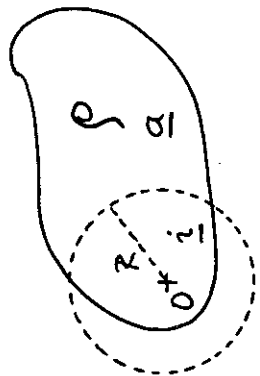
$$\langle \vec{E} \rangle_R = \int_{r' > R} d^3r' \frac{\rho(\vec{r}') (-\vec{r}')}{r'^3} \quad \text{---} \quad \vec{E}_a(\vec{0}) \quad (41)$$

$$- \frac{1}{R^3} \int_{r' < R} d^3r' r' \rho(\vec{r}') \quad \text{---} \quad - \frac{\bar{\rho}}{R^3}$$

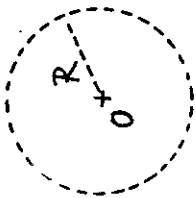
Beachte: $\vec{0}$

$$\vec{E}(\vec{r}') = \int d^3r'' \frac{\rho(\vec{r}'') (\vec{r}' - \vec{r}'')}{|\vec{r}' - \vec{r}''|^3}$$

$$\bar{\rho} = \int d^3r' r' \rho(\vec{r}')$$

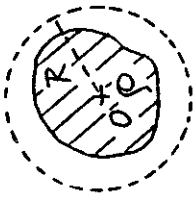


Spezialfälle:



$$\langle \vec{E} \rangle_R = \vec{E}(\vec{0})$$

unabhängig von R
(solange $\rho(\vec{r}') = 0$
für $r' < R$)



$$\langle \vec{E} \rangle_R = - \frac{\bar{\rho}}{R^3}$$

proportional $\frac{1}{\text{Volumen}}$
der Mittelungskugel

Beweis von

$$\vec{I}(\vec{r}') \equiv \frac{3}{4\pi R^3} \oint_{r=R} d^2\vec{f} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \begin{cases} \frac{r'}{r'^3} & \text{für } r' \geq R \\ \frac{r'}{R^3} & \text{für } r' \leq R \end{cases} \quad (40)$$

\vec{r}' ist für die Integration fest, für Integration wird $\frac{\vec{r}'}{r'} = \vec{e}_z$ gewählt (Wahl der z-Achse):

$$\vec{I}(\vec{r}') = \frac{3}{4\pi R^3} \int_{[4\pi]} d\Omega (\sin\vartheta \cos\varphi \vec{e}_x + \sin\vartheta \sin\varphi \vec{e}_y + \cos\vartheta \vec{e}_z) \frac{1}{|\vec{r}-r'\vec{e}_z|} \quad \text{für } |\vec{r}|=R$$

nur von ϑ abhängig;

φ -Integral null

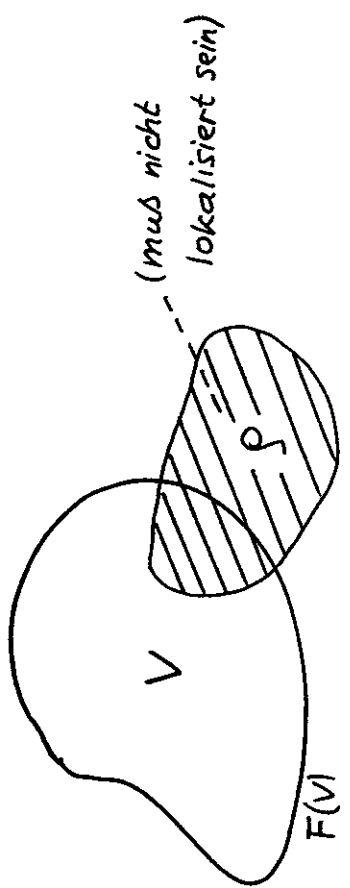
$$\vec{I}(\vec{r}') = \frac{3}{2R} \frac{r'}{r'} \sum_{\ell} \int_{-1}^{+1} d\vartheta P_{\ell}(\frac{r}{r'}) P_{\ell}(\frac{r'}{r}) \cdot \begin{cases} \frac{R^{\ell}}{r'^{\ell+1}}, & r' > R \\ \frac{r^{\ell}}{R^{\ell+1}}, & r' < R \end{cases}$$

$$\sum_{\ell} P_{\ell}(\cos\vartheta) \cdot \begin{cases} \frac{R^{\ell}}{r'^{\ell+1}}, & r' > R \\ \frac{r^{\ell}}{R^{\ell+1}}, & r' < R \end{cases}$$

(erzeugende Funktion der Legendrepolynome)

$$\vec{I}(\vec{r}') = \begin{cases} \frac{1}{R} \frac{r'}{r'} \frac{R}{r'^2} \cdot \frac{2}{3} \delta_{21} & , r' \geq R \\ \frac{1}{R} \frac{r'}{R} \frac{R}{R^2} & , r' \leq R \end{cases} \checkmark$$

III.3 Elektrostatische Energie
III.3.A: Selbstenergie und Wechselwirkungsenergie



Gesamtenergie im Volumen V

$$W_V = \frac{1}{8\pi} \int_V d^3r \vec{E}^2(\vec{r}) \quad (42)$$

$$\vec{E}^2(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}(\phi(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})) + \phi(\vec{r})\vec{\nabla}\vec{E}(\vec{r}) \quad 4\pi\rho(\vec{r})$$

$$\frac{1}{8\pi} \vec{E}^2(\vec{r}) = \frac{1}{2} \rho(\vec{r})\phi(\vec{r}) + \frac{1}{8\pi} \vec{\nabla}(\phi(\vec{r})\vec{\nabla}\phi(\vec{r}))$$

$$W_V = \frac{1}{2} \int_V d^3r \rho(\vec{r})\phi(\vec{r}) + \frac{1}{8\pi} \oint_{F(V)} d^2\vec{f} \cdot \phi(\vec{r}) \text{grad} \phi(\vec{r}) \quad (43)$$

$$W_V = \frac{1}{2} \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{8\pi} \int_{F(V)} d^2\vec{f} \cdot \phi(\mathbf{r}) \cdot \text{grad} \phi(\mathbf{r})$$

Beachte: $V \uparrow \mathbb{R}^3$: $\oint_{F(V)}$ muß nicht gegen null streben

Aber:

Gesamte elektrostatische Feldenergie im ganzen Raum bei natürlichen RB

$$W = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (44)$$

Bei Aufteilung der Quellen in "Komplexe"

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_n \rho_n(\mathbf{r}) \quad (45)$$

folgt daraus

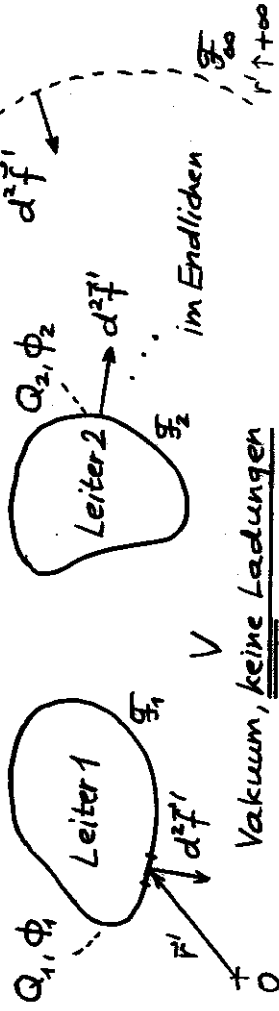
$$W = \sum_{mn} \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho_m(\mathbf{r}) \rho_n(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (48)$$

mit $W^{\text{selbst}} + W^{\text{WW}} > 0$
 $W_n^{\text{selbst}} > 0$

$$W^{\text{selbst}} = \sum_n \left(\frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho_n(\mathbf{r}) \rho_n(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (49a)$$

$$W^{\text{WW}} = \sum_{\substack{mn \\ m < n}} \left(\int d^3r \int d^3r' \frac{\rho_m(\mathbf{r}) \rho_n(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) W_{mn}^{\text{WW}} \quad (49b)$$

III.3.B. Kapazitätskoeffizienten für eine Anordnung von Leitern



Zusammenhang zwischen den Ladungen Q_m und den Potentialen ϕ_n gesucht. (Vorgegeben für jeden der Leiter Ladung oder Potential [gegen das "Unendliche"])

Dirichletsche Greenfunktion $G_D(\vec{r}, \vec{r}')$ des Problems:
 $G_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ für \vec{r}' auf $F(V) = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \dots \cup \mathcal{F}_\infty$

Abschnitt III.1.B (s. Seite III-8; dabei ist zu beachten, daß wir hier $d^2\vec{r}'$ entgegen der üblichen Konvention beim Greenschen Satz nach V "hinein" gewählt haben, was einen Vorzeichenwechsel in $\oint d^2\vec{r}'$ bewirkt)

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_V d^3r' G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') + \frac{1}{4\pi} \oint_{F(V)} d^2\vec{r}' \cdot \phi(\mathbf{r}') \nabla' G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

\vec{r} in V hier: 0 ... hier $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \dots \cup \mathcal{F}_\infty$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_n \phi_n \oint_{\mathcal{F}_n} d^2\vec{r}' \cdot \nabla' G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad \vec{r} \text{ in } V \quad (50)$$

*1) Damit $d^2\vec{r}'$ wie "gewohnt" bzgl. Leiter nach "außen".

$$\phi(F) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_n \phi_n \oint_{\mathcal{F}_n} d^2\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}' G_D(F, F')$$

$$Q_m = \oint_{\mathcal{F}_m} d^2\vec{r} \sigma(F) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \oint_{\mathcal{F}_m} d^2\vec{r} \cdot \vec{E}(F)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon} \oint_{\mathcal{F}_m} d^2\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \phi(F)$$

$$= -\sum_n \phi_n \frac{1}{(4\pi\epsilon)^2} \oint_{\mathcal{F}_m} d^2\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \oint_{\mathcal{F}_n} d^2\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}' G_D(F, F')$$

$$Q_m = \sum_n C_{mn} \phi_n$$

linearer
Zusammenhang

(52)

mit

$$C_{mn} = C_{nm} = -\frac{1}{(4\pi\epsilon)^2} \oint_{\mathcal{F}_m} d^2\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \oint_{\mathcal{F}_n} d^2\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}' G_D(F, F')$$

(51')

Kapazitätskoeffizienten der Anordnung von Leitern

Nur abhängig von Form und gegenseitiger Lage der Leiter.

Beachte: Wegen der Komplexiertheit der RWA für

$G_D(F, F')$ wird man i.a. $G_D(F, F)$ gar nicht

berechnen können. Die Beziehungen (52) und

(53) (s. Folie III-36') behalten auch dann ihre Nützlichkeit. ●

Spezialfall: Zwei Leiter

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(C_{mn})} \begin{pmatrix} C_{22} - C_{12} & C_{11} \\ -C_{21} & C_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

Technik: Kondensator

$$Q_1 = -Q_2 = Q$$

(54)

$$C = \frac{Q}{\phi_1 - \phi_2}$$

Kapazität des
Kondensators

Aus obigen Formeln folgt für $Q_1 = -Q_2 = Q$

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{1}{\det(C_{mn})} (C_{22} + C_{12} + C_{21} + C_{11}) Q$$

$$\Rightarrow C = \frac{C_{11} C_{22} - C_{12} C_{21}}{C_{11} + C_{22} + C_{12} + C_{21}} \quad (55)$$

Gesamte elektrostatische Energie der

Anordnung von III-34:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{E}^2(r) = (\text{da feldfreier Raum in den Leitern})$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int_V d^3r \vec{E}^2(r) = (\text{s. (43)})$$

$$= \frac{1}{2} \int_V d^3r \underbrace{\rho(r) \phi(r)}_0 \neq \frac{1}{8\pi} \int_{F(V)} d^2\vec{f} \cdot \phi(r) \nabla \phi(r)$$

----- da hier $d^2\vec{f}$ nach V hinein orientiert

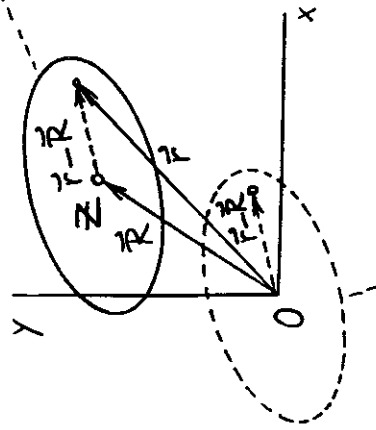
$$= \frac{1}{8\pi} \sum_m \phi_m \left(\int d^2\vec{f} \cdot \nabla \phi(r) \right)$$

(51): $4\pi Q_m$

$$W = \frac{1}{2} \sum_m Q_m \phi_m = \frac{1}{2} \sum_{mn} C_{mn} \phi_m \phi_n \quad (53)$$

III.3.C. Lokalisierte Ladungsverteilung
in einem über dieselbe "quasihomogenen"
äußeren elektrischen Feld

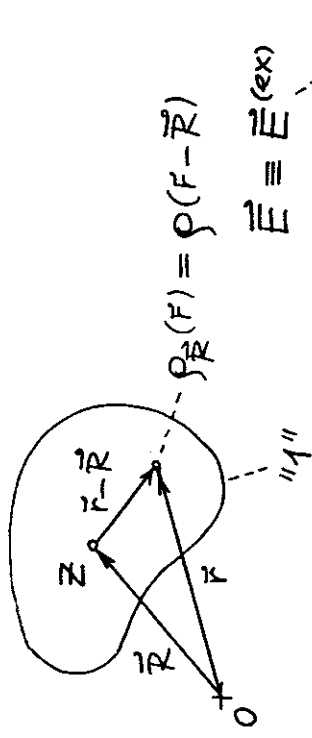
Versobene Ladungs=
 Verteilung: Dichte mit
 $\rho_{\vec{R}}(\vec{r})$ bezeichnet
 Es gilt dann



Ladungsdichte mit

$\rho_0(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$ bezeichnet
 vorgegebene Funktion
 Zentrum in 0

$$\rho_{\vec{R}}(\vec{r}) = \rho(\vec{r} - \vec{R})$$



$$\rho_{\vec{R}}(\vec{r}) = \rho(\vec{r} - \vec{R})$$

$$\vec{E} \equiv \vec{E}^{(ex)}$$

$$W_{12}^{ww} = \int d^3r \rho_1(\vec{r}) \phi_2(\vec{r}) \quad (\text{kein Faktor } \frac{1}{2}!)$$

$$W^{ww}(\vec{R}) = \int d^3r \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) \equiv \phi^{(ex)}(\vec{r})$$

$$W^{ww}(\vec{R}) = \int d^3r \rho(\vec{r} - \vec{R}) \phi(\vec{r}) \quad (56)$$

$$W^{ww}(\vec{R}) = \int d^3r \rho(\vec{r}) \phi(\vec{R} + \vec{r})$$

$$\phi(\vec{R} + \vec{r}) = \phi(\vec{R}) + \vec{\nabla}_{\vec{R}} \phi(\vec{R}) \cdot \vec{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi(\vec{R})}{\partial R_j \partial R_k} x_j x_k + \dots \quad (57)$$

$$W^{ww}(\vec{R}) = \underbrace{\int d^3r \rho(\vec{r})}_{Q} + \underbrace{\vec{\nabla}_{\vec{R}} \phi(\vec{R}) \cdot \int d^3r \vec{r} \rho(\vec{r})}_{-\vec{E}(\vec{R})} \underbrace{\int d^3r \vec{r} \rho(\vec{r})}_{\vec{p}}$$

$$+ \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \phi(\vec{R})}{\partial R_j \partial R_k \partial R_l} \int d^3r 3x_j x_k x_l \rho(\vec{r}) + \dots$$

$$- \frac{\partial E_j(\vec{R})}{\partial R_k} \underbrace{\int d^3r 3x_j x_k x_l \rho(\vec{r})}_{Q_{jkl}}$$

Multipolmomente bezgl.
 Zentrum

$$W^{WW}(\vec{R}) = q\phi(\vec{R}) - \vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{R}) - \frac{1}{6} \bar{Q}_{jk} \frac{\partial E_j(\vec{R})}{\partial R_k} + \dots$$

Monopol- Dipol- Quadrupol- ...

Im Quadrupolbeitrag kann man wegen $\text{div } \vec{E}(\vec{r}) \equiv \text{div } \vec{E}^{(ex)}(\vec{r}) = 0$ im betrachteten Raumbereich, insbesondere am Ort $\vec{r} = \vec{R}$, statt \bar{Q}_{jk} auch Q_{jk} einsetzen:

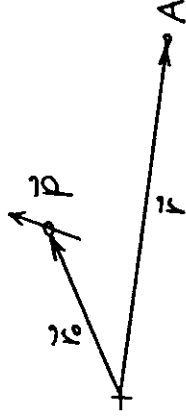
$$-\frac{1}{6} \frac{\partial E_j(\vec{R})}{\partial R_k} \underbrace{\int d^3r (3x_j x_k - r^2 \delta_{jk}) \rho(\vec{r})}_{Q_{jk}} = -\frac{1}{6} \frac{\partial E_j(\vec{R})}{\partial R_k} \underbrace{Q_{jk} + \frac{1}{6} \frac{\partial E_j(\vec{R})}{\partial R_j} \int d^3r r^2 \rho(\vec{r})}_0 \equiv$$

Somit gilt auch

$$W^{WW}(\vec{R}) = q\phi(\vec{R}) - \vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{R}) - \frac{1}{6} Q_{jk} \frac{\partial E_j(\vec{R})}{\partial R_k} + \dots \quad (58)$$

III.3.D. Wechselwirkungsenergie zweier elektrischer Punktdipole

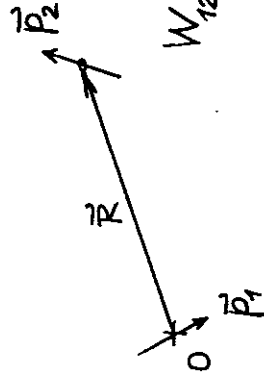
Elektrischer Punktdipol (mathematischer elektrischer Dipol): Gesamtladung null, $\vec{p} \neq \vec{0}$, \bar{Q} und alle höheren Multipolmomente null
Näheres dazu in Abschnitt IV.1.D.



$$(31c): \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{3[\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)](\vec{r} - \vec{r}_0) - (r - r_0)^2 \vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^5} \quad (60)$$

Anwendung:

$$|\vec{r} - \vec{r}_0| > 0$$



$$W_{12}^{WW}(\vec{R}) = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1(\vec{R}) = -\vec{p}_1 \cdot \vec{E}_2(\vec{0})$$

gibt

$$W_{12}^{WW}(\vec{R}) = \frac{R^2 \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 3(\vec{p}_1 \cdot \vec{R})(\vec{p}_2 \cdot \vec{R})}{R^5} \quad (61)$$

III. 4. Kräfte in elektrischen Feldern

III. 4.A. Kraft auf eine lokalisierte

Ladungsverteilung in einem über dieselbe

"quasihomogenen" äußeren elektrischen Feld

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \int d^3r \rho_1(\vec{r}) \vec{E}_2(\vec{r})$$

$$\vdots$$

$$\vec{F}(\vec{R}) = \int d^3r \rho(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}^{(ex)}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r})$$

$$\rho_{\vec{R}}(\vec{r}) = \rho(\vec{r} - \vec{R})$$

Gesamtkraft auf die Ladungsverteilung
(mit Zentrum am Ort \vec{R})

$$\vec{F}(\vec{R}) = \int d^3r \rho(\vec{r} - \vec{R}) \vec{E}(\vec{r}) \tag{63}$$

$$\vec{F}(\vec{R}) = \int d^3r \rho(\vec{r}) \vec{E}(\vec{R} + \vec{r})$$

$$\vec{E}(\vec{R} + \vec{r}) = \vec{E}(\vec{R}) + (\vec{r} \cdot \nabla_{\vec{R}}) \vec{E}(\vec{R}) + \dots$$

$$\vec{F}(\vec{R}) = \underbrace{\int d^3r \rho(\vec{r}) \vec{E}(\vec{R})}_{Q} + \underbrace{\int d^3r \rho(\vec{r}) (\vec{r} \cdot \nabla_{\vec{R}}) \vec{E}(\vec{R})}_{\vec{p} \cdot \nabla_{\vec{R}}} + \dots \tag{64}$$

$$W_{12}^{ww}(\vec{R}) = \frac{R^2 (\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) - 3 (\vec{p}_1 \cdot \vec{R}) (\vec{p}_2 \cdot \vec{R})}{R^5}$$

gibt speziell mit

$$W = \frac{|\vec{p}_1| |\vec{p}_2|}{R^3}$$

$$W_{12}^{ww}$$

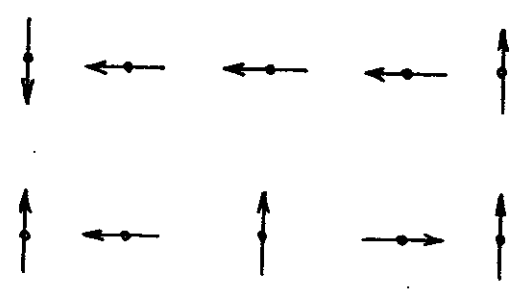
$$+ 2W$$

$$+ W$$

$$0$$

$$- W$$

$$- 2W$$



$$\vec{F}(\vec{R}) = q \vec{E}(\vec{R}) + (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}}) \vec{E}(\vec{R}) + \dots$$

$$\underbrace{\vec{p} \times (\vec{\nabla}_{\vec{R}} \times \vec{E}(\vec{R}))}_{\vec{0}} = \vec{0} = \frac{\vec{\nabla}_{\vec{R}} (\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{R}))}{(65)} - \frac{(\vec{p} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}}) \vec{E}(\vec{R})}{(66)}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{R}) &= q \vec{E}(\vec{R}) + \vec{\nabla}_{\vec{R}} (\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{R})) + \dots \\ &= -\vec{\nabla}_{\vec{R}} (q \phi(\vec{R}) - \vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{R}) + \dots) \\ &= -\vec{\nabla}_{\vec{R}} W^{WW}(\vec{R}) \end{aligned} \quad (67)$$

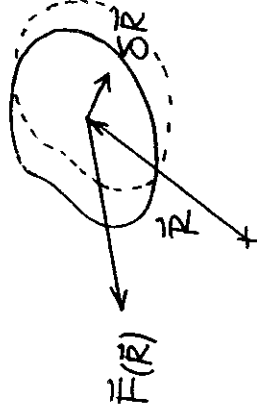
Die elektrostatische WW-Energie, welche die als Feldenergie gespeicherte WW-Energie darstellt, kann also als Potential der Kraft des äußeren elektrischen Feldes auf die feste Ladungsverteilung und somit auch als potentielle Energie der Ladungsverteilung im äußeren elektrischen Feld angesehen werden.

UNTERSCHIED zur Magnetostatik! (s. später)

Energiebilanz bei Verschiebung um $\delta \vec{R}$:

$W(\vec{R})$ potentielle Energie

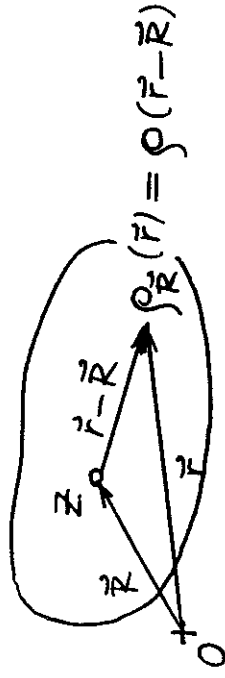
$$\begin{aligned} W(\vec{R}) + (-\vec{F}(\vec{R}) \cdot \delta \vec{R}) \\ = W(\vec{R} + \delta \vec{R}) \end{aligned}$$



$$W(\vec{R}) - \vec{F}(\vec{R}) \cdot \delta \vec{R} = W(\vec{R}) + \delta \vec{R} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}} W(\vec{R})$$

$$\underline{\vec{F}(\vec{R}) = -\vec{\nabla}_{\vec{R}} W(\vec{R})}$$

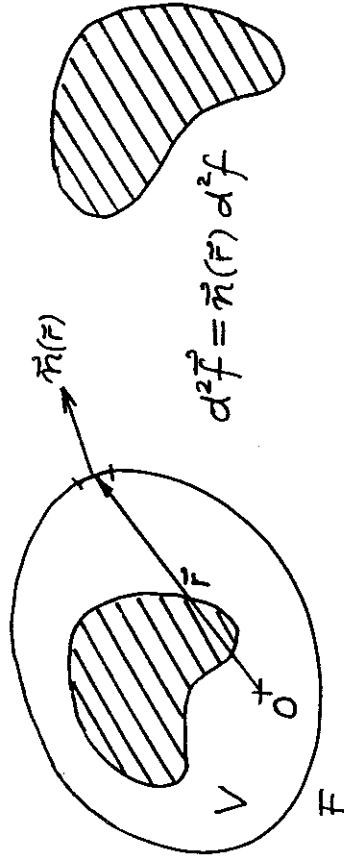
Gesamtes auf die Ladungsverteilung (mit Zentrum am Ort \vec{R}) bzgl. des Zentrums wirkendes Drehmoment



$$\vec{N}(\vec{R}) = \int d^3r [(\vec{r} - \vec{R}) \times \rho(\vec{r} - \vec{R}) \vec{E}(\vec{r})] \quad (68)$$

$$\vec{N}(\vec{R}) = \vec{p} \times \vec{E}(\vec{R}) + \dots \quad (69)$$

III.4.B. Maxwell'scher Spannungstensor



$$d^2\vec{f} = \vec{n}(F) d^2f$$

$$\begin{aligned} \text{(II.56):} \quad \frac{d}{dt} (\vec{P}^{\text{mech}}(t) + \vec{P}^{\text{field}}(V;t)) \\ = \oint_F d^2\vec{f} \cdot \vec{T}(F,t) \end{aligned}$$

Elektrostatik

Gesamtkraft auf die im Volumbereich V befindliche Ladungsverteilung

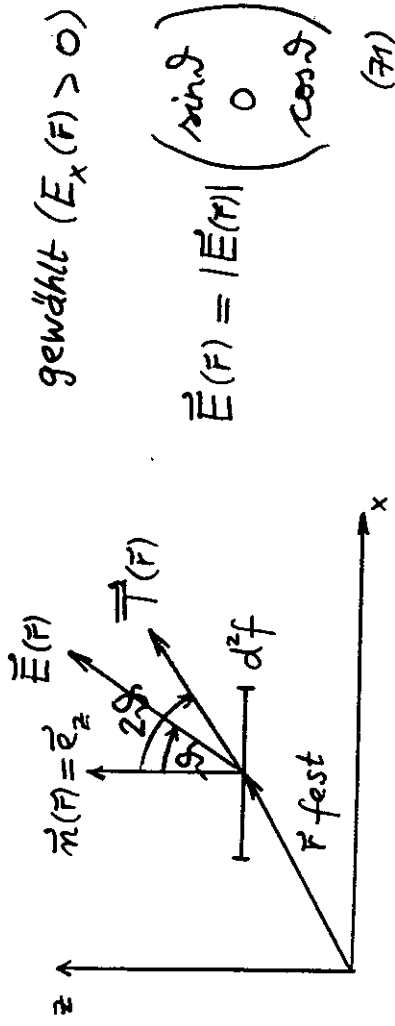
$$\vec{F} = \oint_F d^2\vec{f} \cdot \vec{T}(F) = \oint_F d^2\vec{f} \underbrace{\vec{n}(F) \cdot \vec{T}(F)}_{=: \vec{T}(F) \text{ Flächenelement}}$$

mit dem Mx-schen Spannungstensor (s. (II.52))

$$\hat{=} \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 & E_x E_y & E_x E_z \\ E_y^2 - \frac{1}{2} E^2 & E_y E_z & E_z^2 - \frac{1}{2} E^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{E} \text{ Gesamtfeld} \\ \text{aller Quellen!} \\ (70) \end{matrix}$$

Richtung und Betrag der Flächenkraft

- 1) Richtung von $d^2\vec{f}$ als z-Richtung gewählt
- 2) Ebene von $d^2\vec{f}$ und $\vec{E}(F)$ als z-x-Ebene gewählt ($E_x(F) > 0$)



$$E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 = E^2 \frac{1}{2} (2 \sin^2 \alpha - 1) = -\cos 2\alpha$$

$$E_y^2 - \frac{1}{2} E^2 = -\frac{1}{2} E^2$$

$$E_z^2 - \frac{1}{2} E^2 = E^2 \frac{1}{2} (2 \cos^2 \alpha - 1) = \cos 2\alpha$$

$$E_x E_z = E^2 \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$\hat{=} \frac{E^2}{8\pi} \begin{pmatrix} -\cos 2\alpha & 0 & \sin 2\alpha \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin 2\alpha & 0 & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{T} = \vec{e}_z \cdot \vec{T}$$

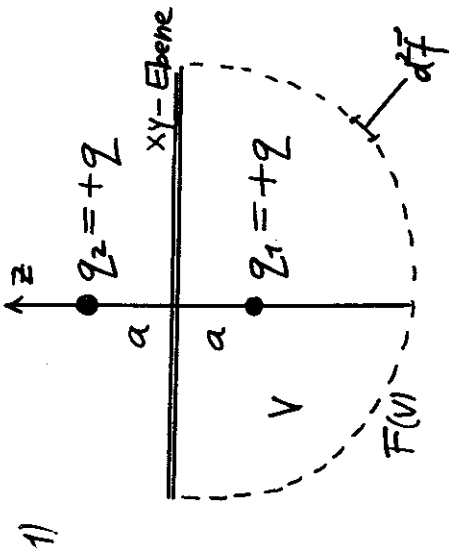
$$= \frac{\vec{E}^2}{8\pi} \begin{pmatrix} -\cos 2\sigma & 0 & \sin 2\sigma \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin 2\sigma & 0 & \cos 2\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{T}(\vec{r}) = \frac{\vec{E}^2(\vec{r})}{8\pi} \begin{pmatrix} \sin 2\sigma \\ 0 \\ \cos 2\sigma \end{pmatrix} \quad \text{Flächenkraft} \quad (72)$$

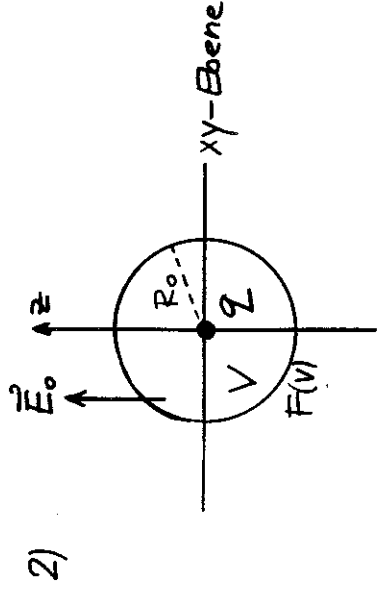
$$|\vec{T}(\vec{r})| = \frac{\vec{E}^2(\vec{r})}{8\pi}$$

$\vec{T}(\vec{r})$ liegt in der von $d^2\vec{f}$ und $\vec{E}(\vec{r})$ aufgespannten Ebene und schließt mit $\vec{E}(\vec{r})$ denselben Winkel ein wie $\vec{E}(\vec{r})$ mit $d\vec{f}$

Beispiele zum Selbstrechnen:



Kraft auf q_1 zu berechnen
 (= Kraft von q_2 auf q_1)



Kraft auf Punktladung z im homogenen Feld \vec{E}_0 zu berechnen.

III. 4. C. Bewegung eines geladenen Teilchens
 (nichtrelativistisch) in einem vorgegebenen statischen \vec{E} -Feld

$$m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(t) = q \vec{E}(\vec{r}(t)) \quad (73)$$

BG:

AB: $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$
 $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$

homogenes Feld

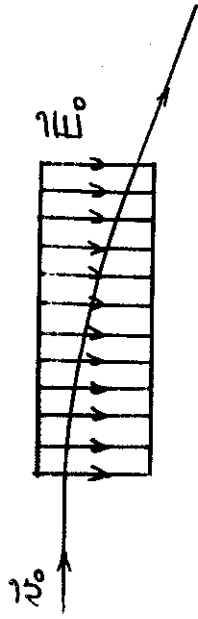
$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0$$

\Rightarrow

$$\vec{r}(t) = \frac{q}{m} \vec{E}_0 \frac{t^2}{2} + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \quad (74)$$

1) $\vec{v}_0 \parallel \vec{E}_0$: longitudinaler Fall
gleichförmig beschleunigte geradlinige Bewegung (Linearbeschleuniger)

2) $\vec{v}_0 \parallel \vec{E}_0$: beschleunigte Bewegung / cm/s
Parabelbahn (z.B. Plattenkondensator)



(ohne Randeffekte)

Unterschiede zu spezieller Relativitätstheorie?
 (c Grenzggeschwindigkeit; Selbstkraft)

IV. MAGNETOSTATIK IM VAKUUM

IV.1 Stationäre Ströme. Magnetostatik

$$\text{div } \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

$$\text{rot } \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r})$$

(III.2)

mit
 KG

$\text{div } \vec{j}(\vec{r}) = 0$

(II.5)

mathematisch: Integrabilitätsbedingung

physikalisch: Ladungserhaltung

(III.2): $\text{div } \vec{B}(\vec{r}) = 0 \implies$

$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r})$

(1)

$$\begin{aligned} \implies \text{rot } \vec{B}(\vec{r}) &= \text{rot rot } \vec{A}(\vec{r}) \quad \nabla \times \\ &= \text{grad div } \vec{A}(\vec{r}) - \Delta \vec{A}(\vec{r}) \\ &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}) \end{aligned}$$

0 verlangt:

Coulombgleichung (= Lorenzgleichung)