FOLIEN VON D. GRAU ZUR VORLESUNG "ELEKTRODYNAMIK UND RELATIVITÄTSTHEORIE"

nach dem Skriptum von H. Nowotny

Kapitel 2

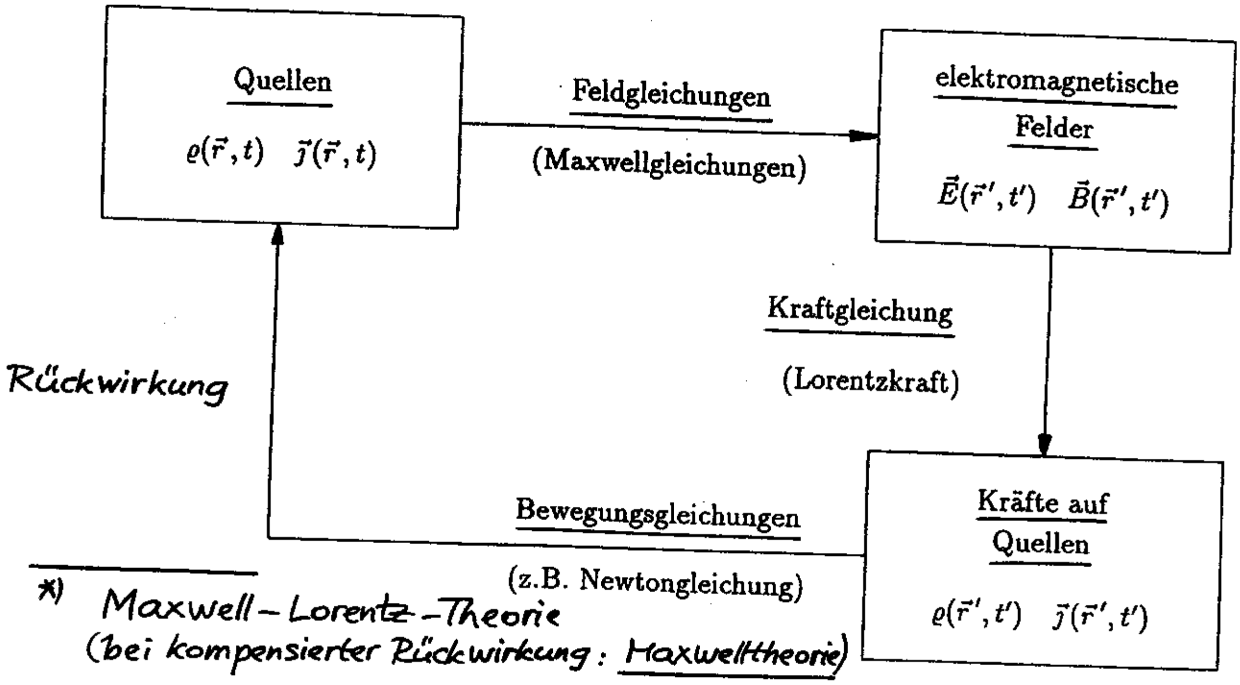
ELEKTRODYNAMIK IM VAKUUM

(MIKROSKOPISCHE ELEKTRODYNAMIK) *)

II. GRUNDGLEICHUNGEN

II.1. Feld–, Kraft– und Bewegungsgleichungen

II.1.A. Übersicht : Logisches Schema



AB
RB

*) Maxwell–Lorentz–Theorie
(bei kompensierter Rückwirkung: Maxwelltheorie)

Feldgleichungen: Maxwellgleichungen

$$\operatorname{div}\vec E(\vec r,t) = 4\pi\varrho(\vec r,t) \qquad (1a)$$

$$\operatorname{div}\vec B(\vec r,t) = 0 \qquad (1b)$$

$$\operatorname{rot}\vec E(\vec r,t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec B(\vec r,t)}{\partial t} \qquad (1d)$$

$$\operatorname{rot}\vec B(\vec r,t) = \frac{4\pi}{c}\vec\jmath(\vec r,t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec E(\vec r,t)}{\partial t} \qquad (1c)$$

Kraftgleichung: Lorentzkraftdichte

$$\vec f(\vec r,t) = \varrho(\vec r,t)\vec E(\vec r,t) + \frac{\vec\jmath(\vec r,t)}{c}\times\vec B(\vec r,t) \qquad (2)$$

Bewegungsgleichungen: Newtongleichungen (vorläufig)

$$m_{(n)}\frac{d^2}{dt^2}\vec r_{(n)}(t) = \vec F_{(n)}(t) \qquad n=1,2,\dots,N \qquad (3)$$

mit $\vec F_{(n)}(t) = \int_{V(\vec r_{(n)}(t))} d^3r\,\vec f(\vec r,t)$

<u>Bemerkungen:</u>

1) Die Feldstärken $\vec{E}, \vec{B}$ lassen sich aus den Gleichungen nicht eliminieren, ein "Übergang zu einer "reinen Mechanik" ist nicht möglich (Grund: endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit c der elm. Wirkungen, Abstrahlung). Elektrodynamik ist eine echte Feldtheorie (Nahwirkungstheorie), das elm. Feld trägt Energie, Impuls und Drehimpuls (s. später).

2) Später werden wir die Newtonschen Bewegungsgleichungen durch die relativistischen BG ersetzen (Einsteinsches Relativitätsprinzip, Spezielle Relativitätstheorie; s. Kapitel VII, VIII)

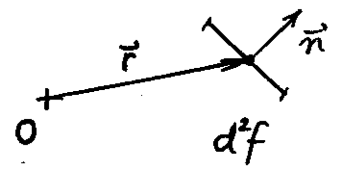
"Außer Konkurrenz" (in VO nicht behandelt)

3) Selbstkraftproblem! Kraftgesetz muß ebenfalls noch modifiziert werden. s. F. Rohrlich: Classical Charged Particles

II.1.B. Maxwellgleichungen

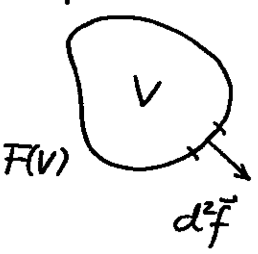
Quellen: elektrische Ladungsdichte $\rho(\vec{r},t)$

elektrische Stromdichte $\vec{j}(\vec{r},t)$



$\vec{j}(\vec{r},t)\cdot\underbrace{\vec{n}\, d^2f}_{d^2\vec{f}}$ ... elektrische Ladung, welche zum Zeitpunkt t das Flächenelement d^2f in der Zeiteinheit netto durchsetzt

Ladungserhaltung
(empirische Tatsache)



$$-\frac{d}{dt}\int_V d^3r\, \rho(\vec{r},t) = \oint_{F(V)} d^2\vec{f}\cdot\vec{j}(\vec{r},t) \quad \forall V \quad \Longrightarrow \text{(Gauß)}$$

$$\boxed{\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j}(\vec{r},t) = 0} \qquad (5)$$

Kontinuitätsgleichung

<u>Spezialfall</u>: <u>System mit N Punktladungen</u>

$$\rho(\vec{r},t) = \sum_{n=1}^{N} q_{(n)}\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_{(n)}(t)) \qquad (6a)$$

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \sum_{n=1}^{N} q_{(n)}\, \vec{v}_{(n)}(t)\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_{(n)}(t)) \qquad (6b)$$

<u>Verifiziere</u> selbst, daß (6a,b) die <u>KG</u> erfüllen.

<u>Felder</u>: <u>elektrisches Feld</u> $\vec{E}(\vec{r},t)$
(elektrische Feldstärke)

<u>magnetisches Feld (Magnetfeld)</u> $\vec{B}(\vec{r},t)$
(magnetische Feldstärke, magnetische Induktion)

besser: <u>elm. Feld $\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{B}(\vec{r},t)$</u>
(Spezielle Relativitätstheorie!)

<u>Berechnung der Felder aus den Quellen</u> (im Sinne des logischen Schemas) <u>mit Hilfe der Feldgleichungen</u> (Maxwellgleichungen).

<u>Maxwellgleichungen</u> in differentieller Form und in Integralform

Coulombsches Gesetz

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r},t) = 4\pi \rho(\vec{r},t)} \qquad \oint_{F(V)} d^2\vec{f} \cdot \vec{E}(\vec{r},t) = 4\pi \int_V d^3r\, \rho(\vec{r},t) \quad \forall V \qquad (4a)$$

Quellenfreiheit des Magnetfeldes
(Nichtexistenz magnetischer Monopole)

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r},t) = 0} \qquad \oint_{F(V)} d^2\vec{f} \cdot \vec{B}(\vec{r},t) = 0 \quad \forall V \qquad (4b)$$

Faradaysches Induktionsgesetz

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}} \qquad \oint_{C(\mathcal{F})} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \overbrace{\int_{\mathcal{F}} d^2\vec{f} \cdot \vec{B}(\vec{r},t)}^{\text{magnet. Fluß durch } \mathcal{F}} \quad \forall \mathcal{F} \qquad (4d)$$

Verkettungsterm = Induktionsterm

Ampèresches Durchflutungsgesetz (Oerstedsches Gesetz + Maxwellterm)

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r},t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r},t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}} \qquad \oint_{C(\mathcal{F})} d\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r},t) = \frac{4\pi}{c} \int_{\mathcal{F}} d^2\vec{f} \cdot \vec{j}(\vec{r},t) + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}} d^2\vec{f} \cdot \vec{E}(\vec{r},t) \qquad (4c) \quad \forall \mathcal{F}$$

Verkettungsterm = Maxwellterm
(historisch: $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ "Verschiebungsstrom")

(4a), (4c):

$$\underbrace{\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{B}}_{0} = \frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\operatorname{div}\vec{E}}_{4\pi\rho}$$

$$= \frac{4\pi}{c}\left(\operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right)$$

Somit:

Mathematisch betrachtet ist die Kontinuitätsgl. Integrabilitätsbedingung der Maxwellgln.

II.1.C. Lorentzkraft

Kraft auf eine Punktladung q, welche sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ längs der Bahn $\vec{r}(t)$ bewegt:

$$\vec{F}(t) = \int\limits_{V(\vec{r}(t))} d^3r\, \vec{f}(\vec{r},t)$$

$$\boxed{\vec{f}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\,\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{\vec{j}(\vec{r},t)}{c}\times\vec{B}(\vec{r},t)} \qquad (7)$$

$$\rho(\vec{r},t) = q\,\delta(\vec{r}-\vec{r}(t)) \quad , \quad \vec{j}(\vec{r},t) = \vec{v}(t)\,\rho(\vec{r},t)$$

$\Rightarrow$ Lorentzkraft

$$\boxed{\vec{F}(t) = q\left[\vec{E}(\vec{r}(t),t) + \frac{\vec{v}(t)}{c}\times\vec{B}(\vec{r}(t),t)\right]} \qquad (8)$$

$$\vec{F}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t)$$ Selbstkraftproblem!

II.1.D. Bewegungsgleichungen

Teilchenindex (n) weggelassen

nichtrelativistische Näherung: Newtongleichungen mit Lorentzkraft

$$\boxed{m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(t) = \int\limits_{V(\vec{r}(t))} d^3r\, \vec{f}(\vec{r},t)} \qquad (9)$$

Für Punktteilchen

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = q\left[\vec{E}(\vec{r}(t),t) + \frac{\vec{v}(t)}{c}\times\vec{B}(\vec{r}(t),t)\right]$$

II.2 Potentiale und Eichtransformationen

Maxwellgln.

$$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho \qquad \operatorname{div}\vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \operatorname{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Simultansystem von 8 linearen partiellen Dgln. 1. Ordnung für 6 Feldgrößen ($E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$)

Bemerkung: Terminologie homogene Mx-Gln. $\updownarrow$ inhomogene Mx-Gln. in der Literatur uneinheitlich.

Wichtig für das praktische Lösen (insbesondere bei gegebenen Quellen):
Die besondere mathematische Form der keine Quellterme enthaltenden Mx-Gln. (4a,d), d.h. der Gln.

$$\mathrm{div}\,\vec{B}(\vec{r},t) = 0 \qquad \mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t} = \vec{0}, \tag{10a,b}$$

gestattet es, von den Mx-Gln. (4a,b,c,d)
zu einem Simultansystem von 4 linearen partiellen Dgln. 2. Ordnung für 4 Feldgrößen ("Potentiale") überzugehen
oder
zu 4 untereinander nicht gekoppelten linearen partiellen Dgl. 2. Ordnung für diese 4 Feldgrößen und einer die Feldgrößen koppelnden partiellen Dgl. 1. Ordnung ("Nebenbedingung") überzugehen etc.

Bemerkung: Die Mx-Gln. (4a,d) sind mathematisch teilweise redundant:

$$\mathrm{div} \;\Big|\; \mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{div}\,\vec{B}(\vec{r},t) = 0$$

$\Rightarrow$ statt $\mathrm{div}\,\vec{B}(\vec{r},t) = 0$ zu fordern, würde es genügen zu verlangen, daß
$\mathrm{div}\,\vec{B}(\vec{r},t_0) = 0$, t_0 beliebig fest, gilt.

Einführung der elm. Potentiale

$\phi(\vec{r},t)$ Skalares Potential
$\vec{A}(\vec{r},t)$ Vektorpotential

Ansatz:

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r},t) \tag{11a}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\,\mathrm{grad}\,\phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} \tag{11b}$$

Damit (4a,d) identisch erfüllt ("gelöst"), d.h. man kann (4a,d) "vergessen":

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = 0 \quad \checkmark$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \cancel{-\,\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi} \;\cancel{-\,\mathrm{rot}\,\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \;\cancel{+\,\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}} = \vec{0} \quad \checkmark$$

Bestimmungsgleichungen für die Potentiale $\phi, \vec{A}$:
Einsetzen des Ansatzes in (4b,c)

(4b): $\quad \mathrm{div}\,\vec{E} = 4\pi\rho \qquad$ (12a)

$$-\underbrace{\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi}_{\Delta\phi} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{div}\,\vec{A} = 4\pi\rho$$

$$\Delta\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{div}\,\vec{A} = -4\pi\rho$$

Definition: Quablaoperator (d'Alembertoperator, Wellenoperator)

$$\Box := \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \qquad (17)$$

Beachte: Wird oft (z.B. bei Landau/Lifschitz) mit umgekehrtem Vorzeichen definiert.

$$\underline{\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)}\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\,\vec{A} + \underline{\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}}\right) = -4\pi\rho$$

$$\Box\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -4\pi\rho$$

(4c):
$$\mathrm{rot}\,\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$
$$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}, \qquad \vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} + \mathrm{grad}\,\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Formel aus Vektoranalysis:

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{a} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{a} - \Delta\vec{a}$$

Bemerkung: Vektorlaplace, auch ✡$\vec{a}$ geschrieben

✡ $:= \mathrm{grad}\,\mathrm{div} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}$

ABER: $(✡\vec{a})_i = \Delta(a_i)$ — "gewöhnlicher" Δ

für $i = x, y, z$ kartesische Vektorkomponenten

(nicht z.B. für $i = r, \vartheta, \varphi$!)

Wir können also statt ✡$\vec{a}$ einfach $\Delta\vec{a}$ schreiben und Δ als "gewöhnlichen" Laplaceoperator verstehen, wenn wir vereinbaren, Gln., in denen $\Delta\vec{a}$ vorkommt, nur nach kartesischen Vektorkomponenten zu zerlegen.

$$\underbrace{-\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}}_{\Delta\vec{A} - \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A}} - \underline{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}} - \mathrm{grad}\,\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\Box\vec{A} - \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

SOMIT:

Feldgleichungen für die elm. Potentiale:

$$\Box\phi(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\,\vec{A}(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi(\vec{r},t)}{\partial t}\right) = -4\pi\rho(\vec{r},t)$$

$$\Box\vec{A}(\vec{r},t) - \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\,\vec{A}(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi(\vec{r},t)}{\partial t}\right) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t)$$

Simultansystem von 4 part. Dgl. 2. Ordnung für $\phi, \vec{A}$: auch "nicht berauschend einfach" (13a,b)

Eichtransformationen

$\psi(\vec{r},t)$ beliebige stetig differenzierbare Funktion von x, y, z, t : Eichfunktion

Satz: Die aus $\phi, \vec{A}$ durch die Transformation

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{A}'(\vec{r},t) &= \vec{A}(\vec{r},t) - \operatorname{grad}\psi(\vec{r},t) \\ \phi'(\vec{r},t) &= \phi(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t} \end{aligned}}$$

Eichtrans= formation (14a,b)

hervorgehenden Potentiale $\phi', \vec{A}'$ liefern dieselben Feldstärken $\vec{E}, \vec{B}$ wie die Potentiale $\phi, \vec{A}$.

Beweis:

$$\operatorname{rot}\vec{A}' = \operatorname{rot}\vec{A} - \underbrace{\operatorname{rot}\operatorname{grad}\psi}_{\vec{0}} = \vec{B} \quad \checkmark$$

$$-\operatorname{grad}\phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} = -\operatorname{grad}\phi - \cancel{\operatorname{grad}\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \cancel{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\psi}$$

$$= \vec{E} \quad \checkmark$$

●

Resümee: Selbst wenn man die Lösung der Mx-Gln. durch Hinzunahme der der physikalischen Situation entsprechenden Anfangs- oder Randbedingungen für $\vec{E}, \vec{B}$ eindeutig festlegt ($\vec{E}, \vec{B}$ eindeutig bestimmt), sind die zugehörigen Potentiale unendlich unbestimmt.

$\Rightarrow$ Mathematischer Vorteil: Freiheit in der Wahl der Potentiale kann zur Vereinfachung der Bestimmungsgln. für die Potentiale genutzt werden, indem man eine $\operatorname{div}\vec{A}$ enthaltende Nebenbedingung vorschreibt.

Beachte: $\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{B}$, also $\operatorname{rot}\vec{A}$ bereits "fixiert" ●

II.2.B. Lorenzeichung[+] (Index L)

Nebenbedingung: Lorenzkonvention

$$\operatorname{div}\vec{A}_L(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi_L(\vec{r},t)}{\partial t} = 0 \qquad (15)$$

+) Geht auf L. Lorenz (Däne), nicht auf H. A. Lorentz (Holländer) zurück!

(13a,b):

$$\Box\phi_L + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\operatorname{div}\vec{A}_L + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi_L}{\partial t}\right)}_{0} = -4\pi\rho$$

$$\Box\vec{A}_L - \operatorname{grad}\underbrace{\left(\operatorname{div}\vec{A}_L + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi_L}{\partial t}\right)}_{0} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

SOMIT:

<u>Feldgln. für die elm. Potentiale in Lorenzeichung:</u>

$$\Box\phi_L(\vec{r},t) = -4\pi\rho(\vec{r},t) \qquad (16a)$$

$$\Box\vec{A}_L(\vec{r},t) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t) \qquad (16b)$$

$$\operatorname{div}\vec{A}_L(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi_L(\vec{r},t)}{\partial t} = 0 \qquad (15)$$

(16a), (16b) } inhomogene Wellengln., untereinander nicht gekoppelt

Man muß aber beim praktischen Lösen solche Partikulärintegrale von (16a,b) "kombinieren", welche die Nebenbedingung (15) erfüllen, d.h. man darf (15) nicht "vergessen"!

<u>Satz 1</u>: Sind $\phi, \vec{A}$ irgendwelche Potentiale, welche die FG (13a,b) erfüllen, und ist die Eichfunktion Lösung der Wellengleichung

$$\Box\psi(\vec{r},t) = \operatorname{div}\vec{A}(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi(\vec{r},t)}{\partial t}, \qquad (18)$$

so sind die Potentiale

$$\vec{A}_L(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) - \operatorname{grad}\psi(\vec{r},t)$$

$$\phi_L(\vec{r},t) = \phi(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t}$$

Potentiale in Lorenzeichung.

Beweis:

$$\operatorname{div}\vec{A}_L + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi_L}{\partial t} = \operatorname{div}\vec{A} - \Delta\psi + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

$$= \operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} - \Box\psi = 0 \checkmark$$

Daraus folgt auch der

<u>Satz 2</u>: Sind $\phi, \vec{A}$ Potentiale in Lorenzeichung, so führt eine Eichtransformation mit einer Eichfunktion ψ, welche Lsg. von $\Box\psi(\vec{r},t) = 0$ ist, wieder auf Potentiale in Lorenzeichung.

Vorschreiben der Lorenzkonvention als Nebenbedingung führt also zu einer Einschränkung der allgemeinen Eichtransformationen (ψ beliebig) auf die residualen Eichtransformationen mit $\Box\psi = 0$, die Potentiale sind aber nach wie vor unendlich unbestimmt (Eichklasse).

II.2.C. Coulombeichung (Strahlungseichung)

Potentiale mit ϕ_c, $\vec{A}_T$ bezeichnet

Coulomb   transversal

(Gründe: s. später)

Nebenbedingung:

$$\operatorname{div}\vec{A}_T(\vec{r},t) = 0 \qquad (19)$$

(13a,b):

$$\Box\phi_c + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\big(\underbrace{\operatorname{div}\vec{A}_T}_{0} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi_c}{\partial t}\big) = -4\pi\rho$$

$$\Delta\phi_c$$

$$\Box\vec{A}_T - \operatorname{grad}\big(\underbrace{\operatorname{div}\vec{A}_T}_{0} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi_c}{\partial t}\big) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

SOMIT: "Entkoppelung unvollständig"

Feldgln. für die elm. Potentiale in Coulombeichung:

$$\Delta\phi_c(\vec{r},t) = -4\pi\rho(\vec{r},t) \qquad (20a)$$

$$\Box\vec{A}_T(\vec{r},t) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_T(\vec{r},t) \qquad (20b\text{-}1)$$

mit $\vec{j}_T(\vec{r},t) := \vec{j}(\vec{r},t) - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\phi_c(\vec{r},t)$ (20b-2)

$$\operatorname{div}\vec{A}_T(\vec{r},t) = 0 \qquad (19)$$

(20a) Poissongl. (inhomogene Laplacegl.) wie in der Elektrostatik; deshalb ϕ_c

(20b) inhomogene Wellengl. mit $\vec{j}_T(\vec{r},t)$ als "Quelle": transversaler Strom; es gilt

$$\operatorname{div}\vec{j}_T(\vec{r},t) = \operatorname{div}\vec{j}(\vec{r},t) + \frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} = 0$$

Bevor man (20b) unter der Nebenbedingung (19) lösen kann, muß man (20a) gelöst haben.

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \underbrace{-\operatorname{grad}\phi_c(\vec{r},t)}_{=:\,\vec{E}_c(\vec{r},t)} \underbrace{- \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}_T(\vec{r},t)}{\partial t}}_{=:\,\vec{E}_T(\vec{r},t)} \qquad (22)$$

Coulombanteil   transversaler oder $\perp$ Anteil

induzierter

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\operatorname{grad}\phi_C(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}_T(\vec{r},t)}{\partial t}$$
$$= \vec{E}_C(\vec{r},t) + \vec{E}_T(\vec{r},t)$$
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \operatorname{rot}\vec{A}_T(\vec{r},t)$$

Beachte: Mx-Gln. für $\vec{E}_C$, $\vec{E}_T$, $\vec{B}$

$$\boxed{\begin{aligned}
&\operatorname{div}\vec{E}_C(\vec{r},t) = 4\pi\rho(\vec{r},t) \\
&\operatorname{rot}\vec{E}_C(\vec{r},t) = \vec{0} \\
&\operatorname{div}\vec{E}_T(\vec{r},t) = 0 \\
&\operatorname{rot}\vec{E}_T(\vec{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t} \\
&\operatorname{div}\vec{B}(\vec{r},t) = 0 \\
&\operatorname{rot}\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}
\end{aligned}}$$

Coulomb-

transversal bzw. induziert

Rest analog wie im Abschnitt II.2.B, deshalb kurz gefaßt (Beweise selbst ausführen!).

Satz 1: Sind $\phi, \vec{A}$ irgendwelche Potentiale, welche die FG (13a,b) erfüllen, und ist die Eichfunktion Lösung der Dgl.

$$\Delta\psi(\vec{r},t) = \operatorname{div}\vec{A}(\vec{r},t), \qquad (24)$$

so sind die Potentiale

$$\vec{A}_T(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) - \operatorname{grad}\psi(\vec{r},t)$$
$$\phi_C(\vec{r},t) = \phi(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t}$$

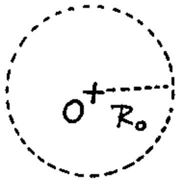
Potentiale in Coulombeichung.

> Satz 2: Sind $\phi, \vec{A}$ Potentiale in Coulombeichung, so führt eine Eichtransformation mit einer Eichfunktion, welche Lsg. von $\Delta\psi(\vec{r},t) = 0$ ist, wieder auf Potentiale in Coulombeichung.

Vorschreiben von $\operatorname{div}\vec{A} = 0$ als Nebenbedingung führt also zu einer Einschränkung der allgemeinen Eichtransformationen (ψ beliebig) auf die residualen Eichtransformationen mit $\Delta\psi = 0$, die Potentiale sind aber nach wie vor unendlich unbestimmt (Eichklasse).

II.3 Berechnung des elm. Feldes einer vorgegebenen lokalisierten Quellverteilung +) (natürliche RB)

Lokalisierte Quellverteilung (im engeren Sinn):



$$\left.\begin{aligned} \rho(\vec r\,', t') &= 0 \\ \vec{j}(\vec r\,', t') &= \vec 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{für } r' > R_0, \ \forall t'$$

Das von einer solchen Quellverteilung physikalisch verursachte Feld ist gesucht.

Um die entsprechende Lösung der Maxwellgln. festzulegen, muß man zu den Maxwellgln. eine geeignete asymptotische Bedingung hinzunehmen:

Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung

Diese gewährleistet die Erfüllung der "natürlichen RB", daß die Feldstärken im Unendlichen verschwinden, und asymptotisch nur auslaufende Wellen vorhanden sind.

Mathematisch kompliziert, hier nicht gebracht;
s. H. Stumpf / W. Schuler: Elektrodynamik.

+) Maxwelltheorie für lokalisierte Quellen

HIER: Spezielle Partikulärlösungen der Mx-Gln. betrachtet, eine davon "intuitiv" als Lösung der gestellten Aufgabe "erkannt".

II.3.A. Fouriertransformierte Maxwellgln.

Komplexes "vierdimensionales" Fourierintegral:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec E(\vec r,t) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{\mathbb{R}^4} d^3k\, d\omega\, e^{i\vec k\cdot\vec r}\, e^{-i\omega t}\, \vec E(\vec k,\omega) && (25) \\ \vec E(\vec k,\omega) &= \int_{\mathbb{R}^4} d^3r\, dt\, e^{-i\vec k\cdot\vec r}\, e^{i\omega t}\, \vec E(\vec r,t) && (26) \end{aligned}}$$

$\vec B, \rho, \vec j$ analog

$$\left(\vec E(\vec r,t)\right)^* = \vec E(\vec r,t) \implies \left(\vec E(\vec k,\omega)\right)^* = \vec E(-\vec k,-\omega) \tag{29}$$

$\Rightarrow$ Darstellung als Integral über positive ("physikalische") Frequenzen

$$\begin{aligned} \vec E(\vec r,t) = {} & \frac{1}{(2\pi)^4}\int_0^{+\infty} d\omega\, e^{-i\omega t}\int_{\mathbb{R}^3} d^3k\, e^{i\vec k\cdot\vec r}\, \vec E(\vec k,\omega) \\ & + \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{0} d\omega\, e^{-i\omega t}\int_{\mathbb{R}^3} d^3k\, e^{i\vec k\cdot\vec r}\, \vec E(\vec k,\omega) \\ & \frac{1}{(2\pi)^4}\int_0^{+\infty} d\omega\, e^{i\omega t}\int_{\mathbb{R}^3} d^3k\, e^{-i\vec k\cdot\vec r}\, \vec E(-\vec k,-\omega) \end{aligned}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_0^{+\infty} d\omega\, e^{-i\omega t}\int_{\mathbb{R}^3} d^3k\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,\vec{E}(\vec{k},\omega) + c.c. \tag{30}$$

Fouriertransformierte Maxwellgln.:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{\mathbb{R}^4} d^3k\, d\omega\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\,\vec{E}(\vec{k},\omega)$$

Somit:

$$\vec{\nabla} \longrightarrow i\vec{k}\,, \quad \frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow -i\omega$$

unter dem Integral

$\Rightarrow$

$$\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r},t) = 4\pi\rho(\vec{r},t), \text{ d.h. } \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r},t) = 4\pi\rho(\vec{r},t)$$

$$\longrightarrow \quad i\vec{k}\cdot\vec{E}(\vec{k},\omega) = 4\pi\rho(\vec{k},\omega)$$

bzw. $\quad \vec{k}\cdot\vec{E}(\vec{k},\omega) = -i\,4\pi\rho(\vec{k},\omega)$

$$\operatorname{rot}\vec{B}(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t)\,, \quad \text{d.h.}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t)$$

$$\longrightarrow \quad i\vec{k}\times\vec{B}(\vec{k},\omega) + i\frac{\omega}{c}\vec{E}(\vec{k},\omega) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{k},\omega)$$

bzw. $\quad \vec{k}\times\vec{B}(\vec{k},\omega) + \frac{\omega}{c}\vec{E}(\vec{k},\omega) = -i\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{k},\omega)$

Restliche Mx-Gln. analog.

Fouriertransformierte Maxwellgln.:

$$\vec{k}\cdot\vec{E}(\vec{k},\omega) = -i\,4\pi\rho(\vec{k},\omega) \tag{27a}$$

$$\vec{k}\cdot\vec{B}(\vec{k},\omega) = 0 \tag{27b}$$

$$\vec{k}\times\vec{E}(\vec{k},\omega) - \frac{\omega}{c}\vec{B}(\vec{k},\omega) = \vec{0} \tag{27d}$$

$$\vec{k}\times\vec{B}(\vec{k},\omega) + \frac{\omega}{c}\vec{E}(\vec{k},\omega) = -i\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{k},\omega) \tag{27c}$$

KG:

$$\operatorname{div}\vec{j}(\vec{r},t) + \frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} = 0 \rightarrow \vec{k}\cdot\vec{j}(\vec{k},\omega) - \omega\rho(\vec{k},\omega) = 0 \tag{28}$$

II.3.B. Spezielle Greensche Funktionen +) des Quablaoperators (d.h. für die inhomogene Wellengleichung)

Dgl.:

$$\boxed{\Box D(\vec{r},t;\vec{r}',t') = -4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta(t-t')} \tag{31}$$

Sind keine AB und keine RB im Endlichen gegeben, so können die Lsgn. von (31) wegen der Homogenität und Isotropie des Raumes und der Homogenität der Zeit nur von

$$|\vec{r}-\vec{r}'|\,,\ t-t'$$

abhängen. Solche Lsgn. interessieren uns!

+) George Green

Berechnung Greenscher Funktionen $D(|\vec{r}-\vec{r}'|, t-t')$

$$D(|\vec{r}-\vec{r}'|, t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^4} d^3k\, d\omega\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}\, e^{-i\omega(t-t')}\, D(\vec{k},\omega) \qquad (34)$$

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta(t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^4} d^3k\, d\omega\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}\, e^{-i\omega(t-t')} \qquad (35)$$

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \longrightarrow (i\vec{k})^2 - \frac{(-i\omega)^2}{c^2} = -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\underline{\Box D(|\vec{r}-\vec{r}'|, t-t') = -4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta(t-t')} \longrightarrow$$

$$\underline{\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) D(\vec{k},\omega) = 4\pi} \quad \Longrightarrow \quad D(\vec{k},\omega) = \frac{4\pi}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \qquad (36)$$

algebraische Gl. (!)

Bemerkung: Da die Lsg. für $D(\vec{k},\omega)$ eindeutig bestimmt ist, könnte man meinen, daß es auch die Lsg. $D(|\vec{r}-\vec{r}'|, t-t')$ ist. Diese ist aber nur bis auf ein $D_{hom}(|\vec{r}-\vec{r}'|, t-t')$ mit $\Box D_{hom} = 0$ bestimmt!

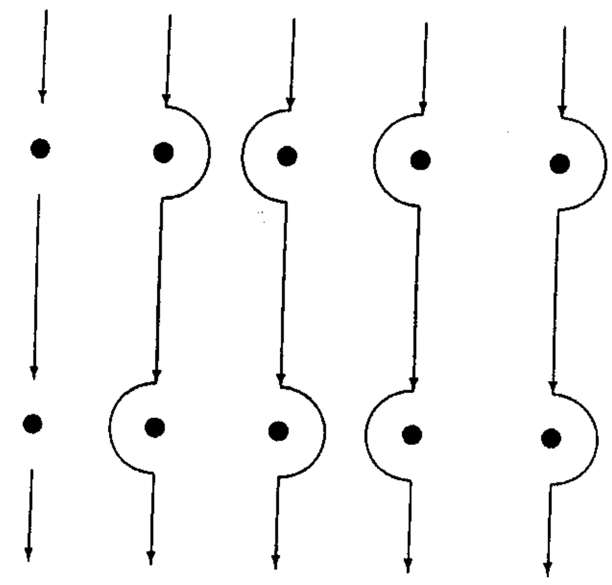
Woher kommt die scheinbare Diskrepanz?

$$D(|\vec{r}-\vec{r}'|, t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{-i\omega(t-t')}\, \frac{4\pi}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}}$$

Pole des Integranden bei $\omega = \pm ck = \pm c|\vec{k}|$!

Da der Integrand des ω-Integrals als Funktion einer komplexen Variablen ω bis auf diese Pole auf der reellen Achse im Endlichen überall regulär ist, kann man durch Deformation des Integrationsweges von der reellen Achse weg in die komplexe ω-Ebene ein eindeutiges Ergebnis erhalten, das nur von der Topologie der Deformation abhängt (Cauchyscher Integralsatz).

Mögliche Integrationswege für ω-Integration:



$\boxed{D_{ret}}$

D_{av}

D_c

D_{ac}

D_p

Wir berechnen hier nur $\underline{D_{ret}\,(|\vec r-\vec r'|,t-t')}$.

Grund: Im Rahmen der Lorenzeichung wird $D_{ret}(|\vec r-\vec r'|,t-t')$ gerade jene Lsg. für die elm. Potentiale liefern (sog. retardierte Potentiale $\phi_{ret}(\vec r,t), \vec A_{ret}(\vec r,t)$), welche die physikalisch richtige Lösung für die gestellte Grundaufgabe (elm. Feld vorgegebener Quellen) ergibt.

Bemerkungen:

1) Die Differenz zweier der oben angegebenen Greenschen Funktionen, z.B. $D_{ret}-D_{av}$, ist Lsg. der homogenen Wellengleichung.

   $D_{ret}-D_{av}$ spielt bei der Berechnung der korrekten Selbstkraft eine Rolle, weshalb auch D_{av} für die Elektrodynamik interessant ist!

2) Linearkombinationen der Form $\alpha D_{ret}+(1-\alpha)D_{av}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, stellen ebenfalls Greensche Funktionen $D(|\vec r-\vec r'|,t-t')$ dar, womit man nicht abzählbar unendlich viele derartige Greensche Funktionen erhält. ●

Retardierte Greenfunktion

$$D_{ret}(|\vec r-\vec r\,'|, t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{\mathbb{R}^3} d^3k\, e^{i\vec k\cdot(\vec r-\vec r\,')} \int_{\frown\frown\to} d\omega\, e^{-i\omega(t-t')}\,\frac{4\pi}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}} \qquad (38)$$

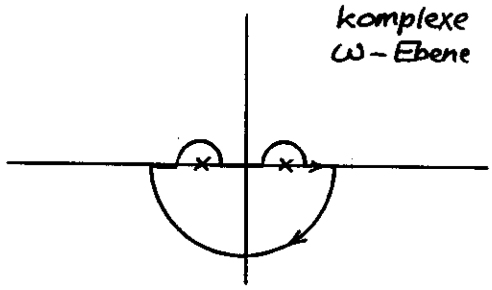
$$D_{ret}(r,t) = \frac{2}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} d^3k\, e^{i\vec k\cdot\vec r}\, \underbrace{\int_{\frown\frown\to} d\omega\, \frac{e^{-i\omega t}}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}}}_{=:\,F(k,t)}$$

$\omega = \omega_r + i\omega_i$

komplexe Variable

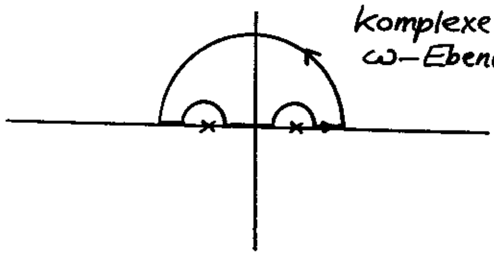
$$e^{-i\omega t} = e^{-i\omega_r}\, \underbrace{e^{\omega_i t}}$$

$t>0$: strebt in der unteren Halbebene im Unendlichen gegen null ($\omega_i \to -\infty$)



komplexe ω-Ebene

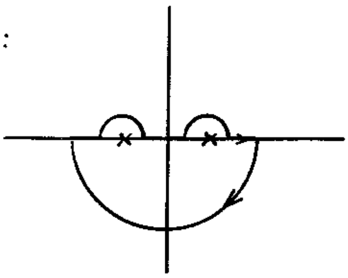
$t<0$: strebt in der oberen Halbebene im Unendlichen gegen null ($\omega_i \to +\infty$)



komplexe ω-Ebene

$$F(k,t) = \int_{\frown\frown\to} d\omega\, \underbrace{\frac{e^{-i\omega t}}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}}}_{=:\, f(k,t,\omega)\,\equiv\, f(\omega)}$$

$t>0$:



$$\oint d\omega\, f(\omega) = \int_{\frown\frown\to} d\omega\, f(\omega)$$

$$= -2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{\omega=-ck} f(\omega) + \operatorname*{Res}_{\omega=+ck} f(\omega)\right]$$

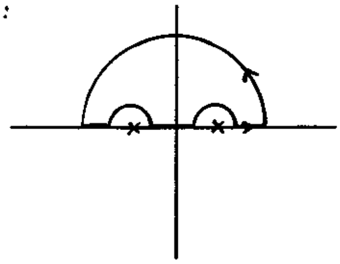
Residuensatz

$$\operatorname*{Res}_{\omega=-ck} f(\omega) = \lim_{\omega\to -ck}\left[(\omega+ck)\frac{e^{-i\omega t}}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}}\right] = \frac{c}{2k}\, e^{ickt}$$

$$\operatorname*{Res}_{\omega=+ck} f(\omega) = -\frac{c}{2k}\, e^{-ickt}$$

$$\int_{\frown\frown\to} d\omega\, f(\omega) = -2\pi i\,\frac{c}{2k}\left[e^{ickt} - e^{-ickt}\right] \qquad \text{für } t>0$$

$\underset{\sim\sim}{t<0}$:



$$\oint d\omega f(\omega) = \underline{\int_{\Omega\Omega} d\omega f(\omega)} = \underline{\underline{0}}$$

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t>0 \\ 0 & \text{für } t<0 \end{cases} \quad (4c$$

Somit:

$$F(k,t) = \int_{\Omega\Omega} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = -2\pi i \frac{c}{2k} \underbrace{\left[e^{ickt} - e^{-ickt}\right]}\Theta(t)$$

$$\underline{\underline{D_{ret}(r,t) = \frac{2}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} d^3k\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, F(k,t)}} = -\frac{i}{(2\pi)^2}\, c\,\Theta(t) \int_{\mathbb{R}^3} d^3k\, \frac{1}{k}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} [\ldots]$$

$\vec{k}$ – Integration: Polarachse in Richtung von $\vec{r}$ gelegt:

$$\vec{k}\cdot\vec{r} = kr\underbrace{\cos\vartheta}_{\xi}\ , \quad d^3k = 2\pi k^2 dk \underbrace{\sin\vartheta\, d\vartheta}_{-d(\cos\vartheta)}$$

$$D_{ret}(r,t) = -\frac{\cancel{i}}{2\pi}\, c\,\Theta(t) \int_0^{+\infty} dk\, \cancel{k}\, [\ldots] \int_{-1}^{+1} d\xi\, e^{ikr\xi} \quad \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{\cancel{i}\cancel{k}r}$$

$$D_{ret}(r,t) = -\frac{1}{2\pi}\frac{c}{r}\Theta(t) \underbrace{\int_0^{+\infty} dk \left[e^{ickt} - e^{-ickt}\right]\left[e^{ikr} - e^{-ikr}\right]}$$

$$\underline{\int_0^{+\infty} dk \left[e^{ik(r+ct)} - e^{ik(r-ct)}\right]}$$

$$\underline{+\int_0^{+\infty} dk \left[e^{-ik(r+ct)} - e^{-ik(r-ct)}\right]} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}$$

$$\underline{\text{2. Term:}} \quad \int_{-\infty}^{0} dk \left[e^{ik(r+ct)} - e^{ik(r-ct)}\right]$$

$$D_{ret}(r,t) = -\frac{c}{r}\Theta(t) \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk \left[e^{ik(r+ct)} - e^{ik(r-ct)}\right]}_{\delta(r+ct) - \delta(r-ct)}$$

Formel:

$$\delta(a\xi) = \frac{\delta(\xi)}{|a|}$$

$$D_{ret}(r,t) = -\frac{c}{r}\underbrace{\Theta(t)\,\delta(r+ct)}_{0} + \frac{\cancel{c}}{r}\underbrace{\Theta(t)\,\delta(r-ct)}_{\delta(r-ct)} \qquad \delta(r-ct) = \frac{\delta(t-\frac{r}{c})}{\cancel{c}}$$

$$D_{ret}(r,t) = \frac{\delta(t-\frac{r}{c})}{r}$$

II-31

II-32

Retardierte Greenfunktion:

$$D_{ret}(|\vec r-\vec r'|, t-t') = \frac{\delta\left(t-t'-\frac{|\vec r-\vec r'|}{c}\right)}{|\vec r-\vec r'|} \qquad (39)$$

III.3.C. Die retardierten Potentiale

(16a,b), (15): Feldgln. für die elm. Potentiale in Lorenzeichung (Index L weggelassen)

$$\Box\,\phi(\vec r,t) = -4\pi\rho(\vec r,t) \qquad (16a)$$

$$\Box\,\vec A(\vec r,t) = -\frac{4\pi}{c}\vec j(\vec r,t) \qquad (16b)$$

$$\operatorname{div}\vec A(\vec r,t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi(\vec r,t)}{\partial t} = 0 \qquad (15)$$

$$\phi_{ret}(\vec r,t) = \int_{\mathbb{R}^4} d^3r'\,dt'\,D_{ret}(|\vec r-\vec r'|, t-t')\,\rho(\vec r',t') \qquad (32)$$

$$\vec A_{ret}(\vec r,t) = \frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^4} d^3r'\,dt'\,D_{ret}(|\vec r-\vec r'|, t-t')\,\vec j(\vec r',t') \qquad (33)$$

sind Partikulärintegrale der inh. Wellengln. (16a,b).
Wie man durch Einsetzen verifizieren kann, erfüllen ϕ_{ret}, $\vec A_{ret}$ auch die Lorenzbedingung (15), sind also Partikulärlösungen der Feldgleichungen für die Potentiale in Lorenzeichung.

Bemerkung: Beweis selbst probieren!
Nach Einsetzen, geeigneten Umformungen, partieller Integration bzw. Gaußschem Satz und Benützen des räumlichen und zeitlichen asymptotischen Verhaltens von D_{ret} ergibt sich schließlich

$$\operatorname{div}\vec A_{ret}(\vec r,t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi_{ret}(\vec r,t)}{\partial t} = \dots$$

$$= \frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^4} d^3r'\,dt'\,D_{ret}(|\vec r-\vec r'|, t-t')\underbrace{\left[\operatorname{div}'\vec j(\vec r',t') + \frac{\partial\rho(\vec r',t')}{\partial t'}\right]}_{0 \text{ wegen KG}} = 0$$

Einsetzen von D_{ret} in die Gln. für ϕ_{ret}, $\vec A_{ret}$:

$$\phi_{ret}(\vec r,t) = \int d^3r'\int dt'\,\frac{\delta\left(t-t'-\frac{|\vec r-\vec r'|}{c}\right)}{|\vec r-\vec r'|}\,\rho(\vec r',t') \qquad (41a)$$

$$= \int d^3r'\,\frac{\rho\left(\vec r', t-\frac{|\vec r-\vec r'|}{c}\right)}{|\vec r-\vec r'|}$$

Analog $\vec A_{ret}$.

Retardierte Potentiale:

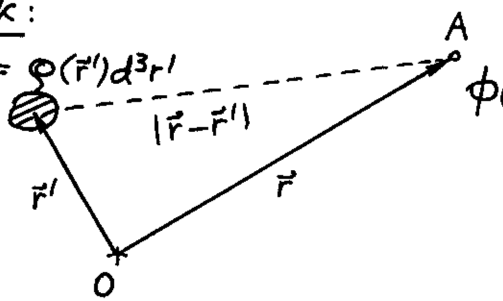
$$\phi_{ret}(\vec{r},t) = \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad (42a)$$

$$\vec{A}_{ret}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int d^3r' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad (42b)$$

Die "Intuition" sagt uns, daß diese Partikulärlösung die Lösung der am Kapitelanfang formulierten Grundaufgabe (elm. Feld einer vorgegebenen lokalisierten Quellverteilung) darstellt.

Elektrostatik:

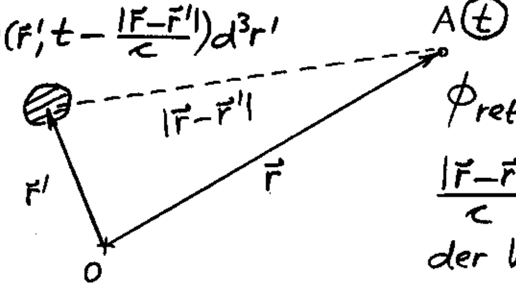
$dQ = \rho(\vec{r}')d^3r'$



$$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Elektrodynamik:

$$dQ_{ret} = \rho(\vec{r}', \underbrace{t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}}_{\text{Zeitargument "retardiert"}})d^3r'$$



$\phi_{ret}(\vec{r},t)$ Gl. (42a)

$\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$ Laufzeit der Wirkung von $\vec{r}'$ nach $\vec{r}$

Bemerkungen:

1) Während die Felder statischer lokalisierter Quellen im Unendlichen wie $\frac{1}{r^2}$ verschwinden, verschwinden die Felder zeitabhängiger lokalisierter Quellen im Unendlichen nur wie $\frac{1}{r}$, wie man aus

$$\int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (\rho \to \vec{j})$$

sieht.
Diese $\frac{1}{r}$-Anteile beschreiben – wie im Kapitel VI gezeigt wird – die Abstrahlung elm. Wellen.
Wie wir im Kapitel VI sehen werden, liefert die retardierte Lösung tatsächlich asymptotisch auslaufende Wellen.

2) Mit der avancierten Greenfunktion würde man als weitere Partikulärlösung der FG (16a,b), (15) für die elm. Potentiale die avancierten Potentiale erhalten, welche sich von den retardierten Potentialen dadurch unterscheiden, daß anstelle des retardierten das avancierte Zeitargument

$$t + \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$$

auftritt.

Randbedingungen im Endlichen

(z.B. durch Anwesenheit idealer Leiter ; s. Kapitel XV)

erfüllbar durch

Ansatz:

$$\phi(\vec{r},t) = \phi_{ret}(\vec{r},t) + \phi_{hom}(\vec{r},t)$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_{ret}(\vec{r},t) + \vec{A}_{hom}(\vec{r},t)$$

mit

$$\Box \phi_{hom}(\vec{r},t) = 0$$

$$\Box \vec{A}_{hom}(\vec{r},t) = \vec{0} \qquad (43)$$

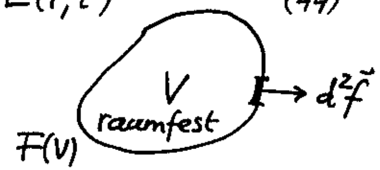
$$\operatorname{div} \vec{A}_{hom}(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi_{hom}(\vec{r},t)}{\partial t} = 0$$

II.4 Energie- und Impulsbilanz

II.4.A. Energiesatz der (mikroskopischen) Elektrodynamik

Vom Feld im Volumen V an den Quellen (Ladungen) zum Zeitpunkt t in der Zeiteinheit geleistete Arbeit

$$\frac{dA_V^{mech}(t)}{dt} = \int_V d^3r\, \vec{j}(\vec{r},t)\cdot\vec{E}(\vec{r},t) \qquad (44)$$



Bemerkungen:

1) Damit man die Bedeutung dieser Größe nicht "vergißt", ist es besser statt $A^{mech}(t)$ $A_V^{mech}(t)$ zu schreiben.

2) Das Magnetfeld leistet an den Quellen keine Arbeit.

3) Da man sich beliebige (mikroskopische) Ladungs- und Stromverteilungen additiv aus den Beiträgen von Punktladungen zusammengesetzt denken kann, genügt es zu zeigen, daß Gl. (44) für eine einzelne im Volumen V befindliche Punktladung richtig ist.

Punktladung:

$$\vec{F}(t) = q\left[\vec{E}(\vec{r}(t),t) + \frac{\vec{v}(t)}{c} \times \vec{B}(\vec{r}(t),t)\right]$$

$$dA^{mech}(t) = \vec{F}(t)\cdot d\vec{r}(t) = \vec{F}(t)\cdot\vec{v}(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\frac{dA^{mech}(t)}{dt}} = \vec{F}(t)\cdot\vec{v}(t) = \underline{q\vec{v}(t)\cdot\vec{E}(\vec{r}(t),t)}$$

Andrerseits:

$$\vec{j}(\vec{r},t) = q\vec{v}(t)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}(t)) \;, \quad \vec{r}(t) \text{ im Volumen } V$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_V d^3r\, \vec{j}(\vec{r},t)\cdot\vec{E}(\vec{r},t)} = q\vec{v}(t)\cdot\int_V d^3r\, \vec{E}(\vec{r},t)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}(t))$$

$$\underline{= q\vec{v}(t)\cdot\vec{E}(\vec{r}(t),t)} \; \bullet \quad \checkmark$$

Maxwellgln. (4c), (4d):

$$\left.\begin{array}{l|l} \vec{E}\cdot & \vec{j} = \frac{c}{4\pi}\,\mathrm{rot}\,\vec{B} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \\ \vec{B}\cdot & \vec{0} = -\frac{c}{4\pi}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \end{array}\right\} \quad \vec{j}\cdot\vec{E} = -\frac{c}{4\pi}\underbrace{\left(\vec{B}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{E} - \vec{E}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{B}\right)}_{\mathrm{div}\,(\vec{E}\times\vec{B})} - \frac{1}{4\pi}\underbrace{\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)}_{\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}(\vec{E}^2+\vec{B}^2)}$$

$$\vec{j}\cdot\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2+\vec{B}^2)}_{=:\,w_{em}} - \mathrm{div}\underbrace{\frac{c}{4\pi}(\vec{E}\times\vec{B})}_{=:\,\vec{S}}$$

Zusammenfassung:

elm. Energiedichte (Feldenergiedichte) im Vakuum

$$w_{em}(\vec{r},t) := \frac{1}{8\pi}\left[\vec{E}^2(\vec{r},t) + \vec{B}^2(\vec{r},t)\right] \tag{46}$$

elm. Energiestromdichte (Poyntingvektor+)) im Vakuum

$$\vec{S}(\vec{r},t) := \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{B}(\vec{r},t)\right] \tag{45}$$

+) eigentlich Vektor<u>feld</u>

lokale Energiebilanz:

$$\vec{j}\cdot\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}w_{em} - \mathrm{div}\,\vec{S}$$

$\int_V d^3r \ldots$:

Energiebilanz für das Volumen V:

$$-\frac{d}{dt}W_V^{feld}(t) = \frac{d}{dt}A_V^{mech}(t) + \oint_{F(V)} d^2\vec{f}\cdot\vec{S}(\vec{r},t)$$

Zeitpunkt t:

Abnahme der Feldenergie im Volumen V,

$$W_V^{feld}(t) = \int_V d^3r\, w_{em}(\vec{r},t) \quad , \qquad (48)$$

in der Zeiteinheit

= in der Zeiteinheit im Volumen V an den Quellen geleistete Arbeit

\+

durch die Oberfläche F(V) in der Zeiteinheit ausströmende Feldenergie

Falls die Ladungen das Volumen V nicht verlassen (und auch keine zusätzlichen Ladungen eintreten) wird keine mechanische Energie durch F(V) transportiert und es gilt

$$\frac{dA_V^{mech}(t)}{dt} = \frac{dW_V^{mech}(t)}{dt}$$

und somit

$$-\frac{d}{dt}\left[W_V^{mech}(t) + W_V^{feld}(t)\right] = \oint_{F(V)} d^2\vec{f}\cdot\vec{S} \qquad (49)$$

Abnahme der gesamten im Volumen V vorhandenen Energie (mechanische Energie + Feldenergie) in der Zeiteinheit

= durch die Oberfläche F(V) in der Zeiteinheit ausströmende Feldenergie

Bemerkung: $V \uparrow \mathbb{R}^3$, $F(V) \uparrow F_\infty$: Man könnte meinen, daß dann das Oberflächenintegral gegen null streben und

$$W^{mech}(t) + W^{feld}(t) = \text{zeitlich konstant}$$

gelten muß.

ABER:

Felder zeitabhängiger lokalisierter Quellen fallen nur wie $\frac{1}{r}$ ab $\Rightarrow \underbrace{\vec{S}}_{\sim\frac{1}{r^2}} \cdot \underbrace{d^2\vec{f}}_{\sim r^2}$ strebt nicht gegen null: **Abstrahlung**

Für nichtrelativistische Ladungen allerdings ist die Abstrahlung vernachlässigbar gering.

II.4.B. Impulssatz der (mikroskopischen) Elektrodynamik

Inhaltlich weitgehend analog (nur mathematisch komplizierter), deshalb nur kurz kommentiert.

Um zunächst eine lokale Impulsbilanz zu formulieren, gehen wir von der Lorentzkraftdichte

$$\vec{f}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{\vec{j}(\vec{r},t)}{c} \times \vec{B}(\vec{r},t)$$

aus.

Maxwellgln. (4a), (4b):

$$\left.\begin{array}{l|l} \vec{E} & \rho = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{div}\,\vec{E} \\ \vec{B} & 0 = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{div}\,\vec{B} \end{array}\right\} \quad \rho\vec{E} = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\,\mathrm{div}\,\vec{E} + \vec{B}\,\mathrm{div}\,\vec{B}\right)$$

Maxwellgln. (4c), (4d):

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\vec{j}}{c} = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{rot}\,\vec{B} - \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} & \big|\times\vec{B} \\ \vec{0} = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \big|\times\vec{E} \end{array}\right\} \quad \frac{\vec{j}}{c}\times\vec{B} = \frac{1}{4\pi}\left(\mathrm{rot}\,\vec{E}\times\vec{E} + \mathrm{rot}\,\vec{B}\times\vec{B}\right) - \frac{1}{4\pi c}\underbrace{\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B} - \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\times\vec{E}\right)}_{\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B} + \vec{E}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B})}$$

$$\rho\vec{E} + \frac{\vec{j}}{c}\times\vec{B}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\,\mathrm{div}\,\vec{E} + \mathrm{rot}\,\vec{E}\times\vec{E} + \vec{B}\,\mathrm{div}\,\vec{B} + \mathrm{rot}\,\vec{B}\times\vec{B}\right)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{4\pi c}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)$$

"gefällt uns schon"

Formel (Beweis später):

$$\left(\vec{a}\,\mathrm{div}\,\vec{a} + \mathrm{rot}\,\vec{a}\times\vec{a}\right)_k = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i a_k - \frac{1}{2}\delta_{ik}\,\vec{a}^2\right)$$

"gefällt uns auch"

$$\left(\rho\vec{E} + \frac{\vec{j}}{c}\times\vec{B}\right)_k = -\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\frac{1}{4\pi c}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)_k}_{=:\, g_{em,k}} + \frac{\partial}{\partial x_i}\underbrace{\frac{1}{4\pi}\left[E_i E_k + B_i B_k - \frac{1}{2}\delta_{ik}\left(\vec{E}^2+\vec{B}^2\right)\right]}_{=:\, T_{ik}} \qquad (51)$$

Zusammenfassung:

elm. Impulsdichte (Feldimpulsdichte) im Vakuum

$$\vec{g}_{em}(\vec{r},t) := \frac{1}{4\pi c}\left[\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{B}(\vec{r},t)\right] = \frac{\vec{S}(\vec{r},t)}{c^2} \qquad (53)$$

Maxwellscher Spannungstensor (= − elm. Impulsstromdichte) im Vakuum

$$\overleftrightarrow{T}(\vec{r},t) := \frac{1}{4\pi}\Big[\vec{E}(\vec{r},t)\circ\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{B}(\vec{r},t)\circ\vec{B}(\vec{r},t) - \frac{1}{2}\overleftrightarrow{1}\left(\vec{E}^2(\vec{r},t)+\vec{B}^2(\vec{r},t)\right)\Big]$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\vec{E}(\vec{r},t)\circ\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{B}(\vec{r},t)\circ\vec{B}(\vec{r},t)\right] - \overleftrightarrow{1}\,w_{em}(\vec{r},t) \qquad (52)$$

lokale Impulsbilanz:

$$\rho\vec{E} + \frac{\vec{j}}{c}\times\vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{g}_{em} - \vec{\nabla}\cdot\left(-\overleftrightarrow{T}\right) \qquad (51)$$

Vgle mit

$$\vec{j}\cdot\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}w_{em} - \vec{\nabla}\cdot\vec{S} \qquad !$$

Impulsbilanz für das Volumen V:

$$-\frac{d}{dt}\vec{P}_V^{feld}(t) = \int_V d^3r\left[\rho(\vec{r},t)\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{\vec{j}(\vec{r},t)}{c}\times\vec{B}(\vec{r},t)\right] + \oint_{F(V)} d^2\vec{f}\cdot\left(-\overleftrightarrow{T}(\vec{r},t)\right)$$

Zeitpunkt t:

Abnahme des Feldimpulses im Volumen V,

$$\vec{P}_V^{feld}(t) = \int_V d^3r\,\vec{g}_{em}(\vec{r},t),$$

in der Zeiteinheit

= Gesamtkraft auf im Volumen V vorhandenen Quellen (Ladungs- und Stromverteilung)

+

durch die Oberfläche F(V) in der Zeiteinheit ausströmender Feldimpuls

Falls die Ladungen das Volumen V nicht verlassen (und auch keine zusätzlichen Ladungen eintreten) wird kein mechanischer Impuls durch F(V) transportiert und es gilt

$$\int_V d^3r \left[\rho(\vec r,t)\vec E(\vec r,t) + \frac{\vec j(\vec r,t)}{c} \times \vec B(\vec r,t)\right] = \vec F_V^{mech}(t) = \frac{d}{dt}\vec P_V^{mech}(t) \tag{50}$$

und somit

$$-\frac{d}{dt}\left[\vec P_V^{mech}(t) + \vec P_V^{feld}(t)\right] = \oint_{F(V)} d^2\vec f \cdot \left(-\overleftrightarrow{T}(\vec r,t)\right)$$

Abnahme des gesamten im Volumen V vorhandenen Impulses (mechanischer Impuls + Feldimpuls) in der Zeiteinheit

= durch die Oberfläche F(V) in der Zeiteinheit ausströmender Feldimpuls

Warum heißt $\overleftrightarrow{T}$ Spannungstensor?

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left[\vec P_V^{mech}(t) + \vec P_V^{feld}(t)\right]}_{\vec P_V^{ges}(t)} = \oint_{F(V)} d^2\vec f \cdot \overleftrightarrow{T}(\vec r,t) \tag{56}$$

$$= \vec F_V^{ges}(t)$$

zeitliche Änderung des im Volumen V vorhandenen Gesamtimpulses

= Gesamtkraft auf das Volumen V,

berechnet als eine auf die Oberfläche F(V) "einwirkende" Kraft (= Fläche mal Spannung)

Fehlender Beweisschritt:

$$\left(\vec a \,\mathrm{div}\,\vec a + \mathrm{rot}\,\vec a \times \vec a\right)_k$$

$$= a_k \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \underset{\varepsilon_{ijk}}{\varepsilon_{kij}} \underbrace{(\mathrm{rot}\,\vec a)_i}_{\varepsilon_{ilm}\frac{\partial a_m}{\partial x_l}} a_j$$

$$= a_k \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \underbrace{\left(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}\right)\frac{\partial a_m}{\partial x_l} a_j}_{a_j\frac{\partial a_k}{\partial x_j} - a_j\frac{\partial a_j}{\partial x_k}}$$

$$(\vec{a}\,\mathrm{div}\,\vec{a} + \mathrm{rot}\,\vec{a} \times \vec{a})_k$$

$$= \underbrace{a_k \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \underbrace{a_j \frac{\partial a_k}{\partial x_j}}_{a_i \frac{\partial a_k}{\partial x_i}}}_{\frac{\partial}{\partial x_i}(a_i a_k)} - \underbrace{a_j \frac{\partial a_j}{\partial x_k}}_{\delta_{ik} a_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i}}$$

überall
i "benötigt"

$$\delta_{ik}\, a_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}\delta_{ik}\vec{a}^2\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i a_k - \frac{1}{2}\delta_{ik}\vec{a}^2\right)$$

✓