

FOLIEN VON D. GRAU ZUR
VORLESUNG "ELEKTRODYNAMIK
UND RELATIVITÄTSTHEORIE"
nach dem Skriptum von H. Nowotny

Kapitel 1

I. EINLEITUNG

I.1. Historische Entwicklung der Elektrodynamik ^{†)}

I.1.A. Elektrizität

400 v.Chr. Reibungselektrizität (Kräfte, die von geriebenem Bernstein ausgehen).

1660 Elektrysiermaschine (Otto von Guericke, 1602-1686).

1733 Charles-Francois de Cisternay Dufay (1698-1739) postuliert die Existenz von zwei Arten der Elektrizität: positive (glaselektrisch) und negative (harzelektrisch).

Elektrostatik

Influenz

1745 Pieter van Musschenbroek (1692-1761), Professor in Leyden, entdeckt die Möglichkeit der Akkumulierung von Ladung: Leydener Flasche.

1747 Benjamin Franklin (1706-1790): Gesetz von der Erhaltung der Ladung.

1767 Joseph Priestley (1733-1804) schließt aus dem Fehlen einer elektrostatischen Kraftwirkung im Innern eines Leiters auf ein Kraftgesetz, welches proportional $\frac{1}{r^2}$ ist (gleiches Abstandsverhalten wie bei dem Gravitationsgesetz).

1785 Charles Augustin Coulomb (1736-1806, französischer Physiker) weist dieses Gesetz mittels einer Drehwaage experimentell nach.

Coulomb'sches Gesetz: $\vec{F} = k_1 \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$

1785 Pierre Simon Laplace (1749-1827) stellt einen Zusammenhang zwischen der Gleichung $\Delta V = 0$ im materiefreien Raum und der Kraft her: $\vec{F} = \text{grad } V$.

1813 Simeon Denis Poisson (1781-1840) erweitert Laplacegleichung zu $\Delta V = -4\pi\rho$.

^{†)} Siehe W. Greiner, *Klassische Elektrodynamik*

1828 George Green (1793-1841) führt für V den Namen Potential ein.

1853 Georg Riemann (1826-1866) macht den Vorschlag, die Poissongleichung $\Delta\phi + 4\pi\rho = 0$ folgendermaßen zu ändern: $\Delta\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 4\pi\rho = 0$ (dieser Vorschlag wurde 1867 veröffentlicht, ist aber zu wenig für eine Theorie).

1857 Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) entdeckt, daß die Ausbreitung von elektrischen Störungen entlang eines Drahtleiters mit Lichtgeschwindigkeit erfolgt.

1862 James Clark Maxwell (1831-1879) führt den "Verschiebungsstrom" ein, d.h. er betrachtet in der Gleichung $\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{s}$ den gesamten Strom \vec{s} als die Summe von Leitungsstrom und Verschiebungsstrom: $\vec{s} = \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$. Maxwellgln., Möglichkeit

Elektromagne-
tismus

1867 Ludwig Lorenz (1829-1891) entwirft eine elektromagnetische Theorie des Lichtes elm. Wellen

Übergang von $\phi(\vec{r}) = \int d\vec{r}' \frac{q(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ auf $\phi(\vec{r}, t) = \int d\vec{r}' \frac{q(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

(dies ist eine zur Maxwell-Theorie äquivalente Theorie).

I-1

I-2

I.1.B. Magnetismus, elektrische Ströme

400 v. Chr. Kenntnis der Kräfte von Magnetstein.

300 v. Chr. Ausnutzung des Erdmagnetfeldes zur Richtungsbestimmung (China): Kompaß

1600 William Gilbert (1544–1603) verwendet in seinem Buch über Magnetismus und Elektrizität erstmals die Namen elektrische Kraft und magnetische Kraft. Er stellt fest, daß positive und negative Magnetpole nicht getrennt werden können. Er deutet das Erdmagnetfeld als Feld einer magnetischen Kugel.

Experimente,
Messungen
Magnetostatik

1780 Luigi Galvani (1737–1798) stellt fest, daß Froschschenkel unter bestimmten Bedingungen zucken: 'tierische Elektrizität'.

1794 Alessandro Volta (1745–1827) stellt 'metallische Elektrizität' fest. Aus 'galvanischen Elementen' aufgebaute 'Voltasche Säulen' erlauben die Erzeugung von Dauerströmen.

Stationäre
Ströme

1820 Im Juli 1820 beobachtet Hans Christian Oersted (1777–1851) die Ablenkung einer Magnetnadel in der Nähe eines stromdurchflossenen Leiters. Hiemit wird erstmalig eine Verbindung zwischen elektrischen und magnetischen Erscheinungen hergestellt (aber vorest nur in qualitativer Form).

E & M
hängen
zusammen

1820 Im Oktober 1820 geben Jean-Baptiste Biot (1774–1862) und Félix Savart (1791–1841) einen quantitativen Ausdruck für das von einem Leiterstück $d\vec{s}$, in dem ein Strom I fließt, an der Stelle \vec{r} erzeugte Magnetfeld an:
$$d\vec{B} = k_3 \frac{I d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

1825 Andrè-Marie Ampère (1775–1836) führt den Namen 'Elektrodynamik' ein.

Quantitativer Ausdruck für die Kraft, die ein Magnetfeld \vec{B} auf ein von einem Strom I durchflossenes Leiterstück $d\vec{s}$ ausübt:
$$d\vec{F} = k_4 I d\vec{s} \times \vec{B}$$

Er zeigt, daß zwei parallele Leiter im Abstand d , die von den Strömen I_1 und I_2 durchflossen werden, sich anziehen:
$$\frac{F}{l} = k_3 k_4 \frac{2 I_1 I_2}{d}$$

1826 Georg Simon Ohm (1787–1854) findet die Proportionalität zwischen Spannung und Strom:
$$U = RI$$
 (Ohmsches Gesetz).

1831 Michael Faraday (1791–1867) findet das elektromagnetische Induktionsgesetz:
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -k_4 \frac{\partial}{\partial t} \int d^2\vec{f} \cdot \vec{B}$$
 Er prägt den Begriff des magnetischen und des elektrischen Kraftfeldes sowie der Feldlinien.

Elektro-
dynamik

In Analogie zur Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$ einer Flüssigkeit der Dichte ρ und der Geschwindigkeit \vec{v} erfolgt die Aufstellung der elektrischen Kontinuitätsgleichung:
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0 \quad (1843).$$

Ab nun erfolgt die Entwicklung gemeinsam mit der Elektrizitätslehre.

1862 Maxwell

I.1.C. Optik

300 v.Chr. Reflexion: Einfallswinkel = Ausfallswinkel †)

1621 Willebrord Snellius (1580-1626) findet das Brechungsgesetz $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$ experimentell und informiert einige Personen (keine Publikation).

1637 René Descartes gibt eine Ableitung des Brechungsgesetzes im Teilchenbild an, wobei die Lichtteilchen im optisch dichteren Medium schneller sind, damit die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit bei der Brechung ungeändert bleibt (typisches Beispiel, wie mit falschen Voraussetzungen ein richtiges Ergebnis erhalten werden kann).

1665 Pierre de Fermat (1601-1665) erhält das Brechungsgesetz aus einem Extremalprinzip: der optische Weg bzw. die Zeit zum Durchlaufen zwischen zwei Punkten soll ein Minimum sein (Teilchengeschwindigkeit im dichteren Medium ist langsamer).

1666 Nach Isaak Newton (1642-1727) besteht das weiße Licht aus allen Farben. Er weist darauf hin, daß das Licht ein periodischer Vorgang ist, wobei verschiedene Perioden verschiedenen Farben entsprechen (Newtonsche Ringe), aber Teilchenvorstellung! ("Anwendungen")

1675 Olaus Roemer (1644-1710) stellt fest, daß die Umlaufdauer der Jupitermonde verschieden ist bei der Bewegung der Erde zum Jupiter hin oder vom Jupiter weg. Er schließt hieraus auf eine endliche Lichtgeschwindigkeit (die Entfernung Sonne - Erde wird in 11 Minuten zurückgelegt, später auf 7 Minuten verkürzt).

1678 Christiaan Huygens (1629-1695) entwirft eine Wellentheorie des Lichtes und gibt systematische Erklärungen für die geradlinige Ausbreitung, die Reflexion und die Brechung aus der Wellenvorstellung, aber noch keine Interferenzerscheinungen!

†) 100 n. Chr. Ptolemäus tabelliert Brechungswinkel in Abhängigkeit vom Einfallswinkel

•) ~1600 Galilei: "Laternenversuch"

1801 Thomas Young (1773-1829) entdeckt das Interferenzprinzip.

1808 Etienne-Louis Malus (1775-1812) beobachtet, daß das unter einem Winkel von $52^{\circ}45'$ an Wasser reflektierte Licht alle Eigenschaften eines der beiden Strahlen der Doppelbrechung zeigt. Diese Eigenschaften besitzen teilweise alle reflektierten Strahlen. Malus bezeichnet diese Eigenschaft mit Polarisation.

1815 David Brewster (1781-1868) findet, daß totale Polarisation immer dann vorliegt, wenn gebrochener und reflektierter Strahl zueinander normal sind.

1823 Augustin Fresnel (1788-1827) gibt eine Theorie der Brechung und der Reflexion an und findet die Fresnelschen Formeln. Fresnel behandelte auch das Problem der Brechung an bewegten Körpern und nahm eine teilweise Mitführung des Äthers an.

1851 Armand Hippolyte Louis Fizeau (1819-1896) verifizierte eine solche Mitführung, indem er Licht durch fließendes Wasser leitete und Interferenz mit dem ungestörten Normalstrahl beobachtete.

1888 Durch die Versuche von Heinrich Hertz (1857-1894) wurde gezeigt, daß Lichtwellen elektromagnetische Wellen sind.

1862 Maxwell

I.1.D* Vereinigung der fundamentalen Wechselwirkungen. Eichtheorien

vor 1831 (M. Faraday Induktionsgesetz) el. WW, magn. WW, Gravitation "getrennt"
(schw. WW, starke WW noch unbekannt)

1862 J. C. Maxwell Klassische Elektrodynamik el. WW & magn. WW = elm. WW
1892 H. A. Lorentz
1905 A. Einstein 4dim. Raumzeit
1909 H. Minkowski
u.a.
1929 W. Heisenberg Quantenelektrodynamik Elektronen und Positronen [Fermionen]
W. Pauli 4dim. Raumzeit elm. WW
1946-49 S. Tomonaga Träger: γ (Photon) [Boson]
J. Schwinger
R. P. Feynman
F. J. Dyson
u.a.

I-6'

1967 S. L. Glashow Elektroschwache Theorie elm. WW & schw. WW = elektroschw. WW
A. Salam 4dim. Raumzeit Träger: γ W^\pm, Z^0 [Bosonen]
S. Weinberg

Suche nach GUTs (Grand Unified Theories), welche elektroschw. WW und starke WW "vereinigen".

1974 H. Georgi Standardmodell Leptonen (6 Arten) und Quarks (6 Arten)
S. L. Glashow (Standardtheorie) [Fermionen]
A. Salam 4dim. Raumzeit elm. WW & schw. WW & starke WW
S. Weinberg
u.a.
Träger: γ W^\pm, Z^0 Gluonen (8 Arten)
masselos [Bosonen] ~100 Protonmassen masselos

Suche nach TOEs (Theories of Everything), welche zusätzlich die Gravitation "einbeziehen".

I-6'

1982 M.B. Green Superstringtheorien Fermionen und Bosonen =
 J.H. Schwarz (5 "Stück") Eigenschwingungen von Strings (Saiten)
 u.a. 10dim. Raumzeit bzw. von Membranen

seit 1996 Träger: elm. WW & schw. WW & starke WW & Gravitation
 γ W^\pm, Z^0 Gluonen Graviton
 (hypothetisch)

J.H. Schwarz M-Theory = "letzte Inkarnation" der Superstringtheorien,
 E. Witten vereinigt die 5 Stringtheorien in einem kohärenten Rahmen
 C. Vafa (Mother of all Theories, Mastertheory)
 A. Sen 11dim. Raumzeit
 u.a.

M. Kaku 1999: "Very little is known about M-Theory..."

Möglicherweise muß man auf die "Mathematik des nächsten Jahrhunderts" warten ...

Experimentell erfolgt die Vereinigung der WW bei Energien von 10^{19} GeV = 10^{28} eV (entsprechend Abständen von 10^{-33} cm).

LHC (Large Hadron Collider) [CERN]: Energien bis 1 TeV = 10^3 GeV.

M. Kaku 1999: "Thus, to experimentally verify superstring theory means recreating creation in the laboratory."

I.2, I.3 Vektor- und Tensorrechnung im dreidimensionalen Euklidischen Raum

Aus Mathematik und Methoden der theoretischen Physik bekannt.

ZUR WIEDERHOLUNG ABSCHNITTE IM SKRIPTUM
DURCHLESEN!

I.4 Grundlegende Experimente der Elektrodynamik

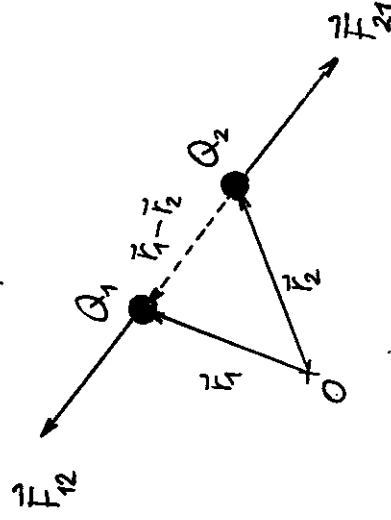
I.4. A. Coulombsches Gesetz (Vakuum)

Kraft zwischen zwei ruhenden Punktladungen Q_1, Q_2 an den Stellen \vec{r}_1, \vec{r}_2 : Coulombkraft

$$\vec{F}_{12} = k_1 \frac{Q_1 Q_2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = -\vec{F}_{21} \quad (13)$$

k_1 maßsystemspezifische positive
Konstante

Zeichnung für $\text{sign } Q_2 = \text{sign } Q_1$



Bemerkungen:

- 1) Index 1 bei k_1 hat nichts mit Ladung Q_1 zu tun (unglückliche Bezeichnung)

2) $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ ("actio = reactio") gilt nur in der Statik!

3) $\vec{F}_1 = \vec{F}_{12}$, $\vec{F}_2 = \vec{F}_{21}$ (keine Selbstkraft) gilt ebenfalls nur in der Statik!

- I-9
- 4) Experimenteller Stand um 1980 (s. D. Jackson, 1997) Klassische Elektrodynamik 1981: 10^{-16} cm bis 10^9 cm
- a) $\frac{1}{r^2}$ -Gesetz für Abstände von 10^{-15} cm bis 10^9 cm (24 Größenordnungen) gesichert

b) $\frac{1}{r^{2+\epsilon}}$, $\epsilon < 10^{-15}$

Superpositionsprinzip:

N ruhende Punktladungen Q_i an den Stellen \vec{r}_i

$$\vec{F}_1 = \sum_{i=2}^N \vec{F}_i = k_1 Q_1 \sum_{i=2}^N Q_i \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_1|^3} \quad (14)$$

Summe von Zweikörperkräften (keine Drei-, Vier-, ... Körperkräfte)

Feldbegriff

Q_1, Q_2, \dots, Q_N an den Stellen $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$
 ruhende Systemladungen (Quellen des betrachteten Systems)

Q Testladung zur Ausmessung des Systems an die Stelle \vec{r} gebracht, $\vec{F}(\vec{r})$ Kraft auf die Testladung

$$\vec{E}(\vec{r}) := \frac{\vec{F}(\vec{r})}{Q} \quad (15)$$

von den Systemladungen
 am Ort \vec{r} verursachte
elektrische Feldstärke

I-10

$$\vec{F}(\vec{r}) = k_1 Q \sum_{j=1}^N Q_j \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} \Rightarrow$$

elektrisches Feld von N an den Stellen \vec{r}_j ruhenden Punktladungen Q_j

$$\vec{E}(\vec{r}) = k_1 \sum_{j=1}^N Q_j \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} \quad (16a)$$

ANALOG:
 elektrisches Feld einer vorgegebenen lokalisierten statischen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$

$$\vec{E}(\vec{r}) = k_1 \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (16b)$$

Coulombfeld

Bemerkungen:

- 1) In der Dynamik muss man von der Testladung Q verlangen, dass sie gegen die "felderzeugenden" Ladungen "klein" ist; formal $\lim_{Q \rightarrow 0}$ (formal, da $|Q| \geq e$).
- 2) Die Forderung, dass $\rho(\vec{r}')$ lokalisiert ist, bedeutet $\rho(\vec{r}') = 0$ für $r' > R_0$. Ist $\rho(\vec{r}')$ lokalisiert, so ist die Existenz des Integrals in (16b) gesichert. Ist $\rho(\vec{r}')$ nicht lokalisiert, so gilt die Formel (16b) ebenfalls, wofeme nur $\rho(\vec{r}')$ im Unendlichen hinreichend rasch verschwindet. ●

$$\vec{E}(\vec{r}) = k_1 \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Mit Hilfe der Formel (Beweis folgt)

$$\oint_{F(V)} d^2\vec{f} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \begin{cases} 4\pi & \text{falls } \vec{r}' \text{ im Volumen } V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (*)$$

ergibt sich daraus: elektrischer Fluss durch $F(V)$

$$\oint_{F(V)} d^2\vec{f} \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

$$= k_1 \int d^3r' \underbrace{\rho(\vec{r}') \oint_{F(V)} d^2\vec{f} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}_{\text{Ladung in } V} = k_1 4\pi \int_V d^3r' \rho(\vec{r}')$$

Coulombsches Gesetz

Integralform

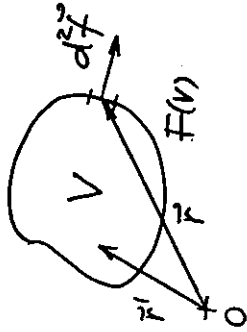
$$\oint_{F(V)} d^2\vec{f} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = k_1 4\pi \int_V d^3r' \rho(\vec{r}') \quad \forall V \quad (17)$$

differentielle Form^{†)}

$$\text{div } \vec{E}(\vec{r}) = k_1 4\pi \rho(\vec{r})$$

^{†)} Gaußscher Integralsatz

I-11



I-12

Ferner:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k_1 \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \Rightarrow (16b)$$

(Selbst zeigen^{†)})

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$$

Bemerkungen:

1) Die erhaltenen FG der Elektrostatik (Maxwellgh. der Elektrostatik)

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E}(\vec{r}) &= k_1 4\pi \rho(\vec{r}) \\ \text{rot } \vec{E}(\vec{r}) &= \vec{0} \end{aligned}$$

lineare partielle
Dgh. 1. Ordnung

gelten auch

a) Wenn die Quellverteilung im Unendlichen nicht überall oder nicht hinreichend stark verschwindet und daher die Formel (16b) nicht anwendbar ist (z.B. unendlich langer homogener geladener Stab);

b) Wenn Formel (16b) nicht gilt, weil RB im Endlichen vorgegeben sind (z.B. lokalisierte Quellverteilung außerhalb einer Leiterkugel).

^{†)} s. Jackson oder Greiner

Zusammenfassung:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k_1 \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

stellt die Lösung der FG $\text{div } \vec{E}(\vec{r}) = k_1 4\pi \rho(\vec{r})$,

$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = 0$ für "natürliche RB" dar

(keine Quellen im Unendlichen, keine RB im Endlichen)

2) In der Dynamik bleibt die FG $\text{div } \vec{E} = k_1 4\pi \rho$ *)

"erhalten" (natürlich mit $\rho(\vec{r}, t)$, $\vec{E}(\vec{r}, t)$), hingegen

wird die FG $\text{rot } \vec{E} = 0$ durch das Faradaysche

Induktionsgesetz $\text{rot } \vec{E} = -k_4 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ "abgelöst".

Nachträglicher Beweis von (*) I-11:

1) Zeige selbst: $\text{div } \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = 0$ für $\vec{r} \neq \vec{r}'$

2) Damit folgt:

a) liegt \vec{r}' nicht im Volumen V , so gilt

$$\oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \int_V d^3r \text{div} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = 0 \quad \checkmark$$

*) Im Skriptum 1. Maxwellgl. genannt.

+1) Im Skriptum 4. Maxwellgl. genannt.

b) liegt \vec{r}' im Volumen V , so kann man

statt über $F(V)$ über eine beliebige Kugelfläche mit Mittelpunkt in \vec{r}' integrieren, was bei

"Verlegung" des Ursprungs in den Kugelmittelpunkt

$$\oint_{\text{Kugelfläche}} d^2f \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \int_{[4\pi]} d\Omega r^2 \underbrace{\frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}}_1 = 4\pi \quad \checkmark$$

gibt. •

I.4.B. Gaußsche Methode zur Ausmessung von statischen Magnetfeldern

Ausmessung statischer elektrischer Felder "einfach":

1) Bestimmung der Ladung Q des feldaussendenden Teilchens (Testladung) mit Hilfe des Coulomb-Kraftgesetzes.

2) Ausmessung des elektrischen Feldes durch Bestimmung der Kraft $\vec{F} = Q\vec{E}$ auf die Testladung.

Ausmessung statischer Magnetfelder "komplizierter":

Grund: Es gibt keine magnetischen Ladungen (Monopole).

⇒ Quellenfreiheit des Magnetfeldes

Integralform

$$\oint d^2f \cdot \vec{B}(F) = 0 \quad \forall V$$

differentielle Form

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B}(F) = 0} \quad (23)$$

Bemerkung: Die FG $\operatorname{div} \vec{B} = 0^{+)}$ gilt auch in der Dynamik (natürlich mit $\vec{B}(\vec{r}, t)$). •

Feldaussmessung: Einfachstes Testobjekt:

magnetischer Punktdipol, im Experiment "kleine"

Magnethadel. Das Kraftgesetz zwischen magnetischen

(Punkt-)Dipolen ist aber sehr kompliziert!

Ausweg von Gauss (historisch: Erdmagnetfeldmessung):

Benützung des auf einen magnetischen Dipol mit

Moment \vec{m} in einem Magnetfeld \vec{B}_0 wirkenden

Drehmomentes (Richtung von $\vec{m} =$ Richtung der

Magnethadel, $m = |\vec{m}|$ "Stärke" des Dipols)

$$\vec{N} = k_{2a} \vec{m} \times \vec{B}_0 \quad k_{2a} \text{ Maßsystem} = (19)$$

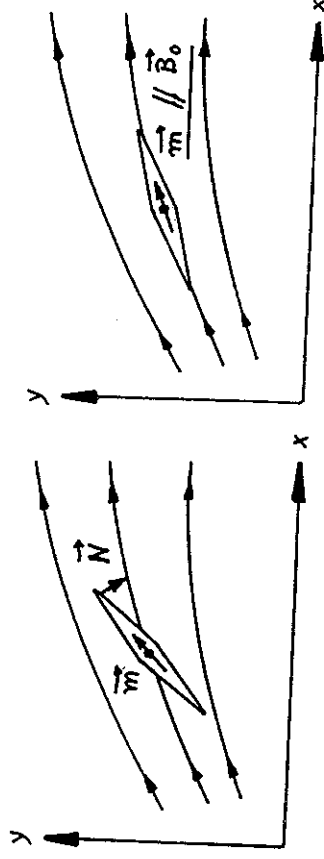
spezifische positive Konstante

+1) Im Skriptum als 2. Maxwellgleichung bezeichnet.

Bemerkung: Index "0" bei \vec{B}_0 soll nicht bedeuten, daß es sich um ein homogenes Feld handeln muß. \vec{B}_0 soll die Feldstärke des auszumessenden Feldes am Ort des Dipols

sein. •

Ist der Dipol drehbar gelagert, so wird er vom Drehmoment \vec{N} in Richtung von \vec{B}_0 ausgerichtet, womit die Richtung von \vec{B}_0 bestimmt ist.



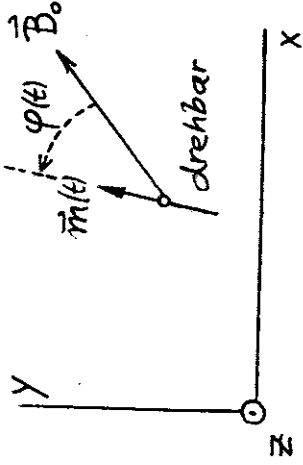
Zu bestimmen bleiben noch $m = |\vec{m}|$, $B_0 = |\vec{B}_0|$.

1. Schritt: Bestimmung von $m B_0$ aus

mechanischen Größen durch Untersuchung

der Schwingungen der frei drehbar

gelagerten Testmagnethadel



Θ mechan. Trägheitsmoment der Magnethöhle

$$\Theta \ddot{\varphi}(t) = N_z(t) = k_{2a} (\vec{m}(t) \times \vec{B}_0)_z$$

$$= -k_{2a} m B_0 \sin \varphi(t)$$

(20a)

Schwingungen um kleine Winkel untersucht:

$$\sin \varphi(t) \approx \varphi(t), \forall t$$

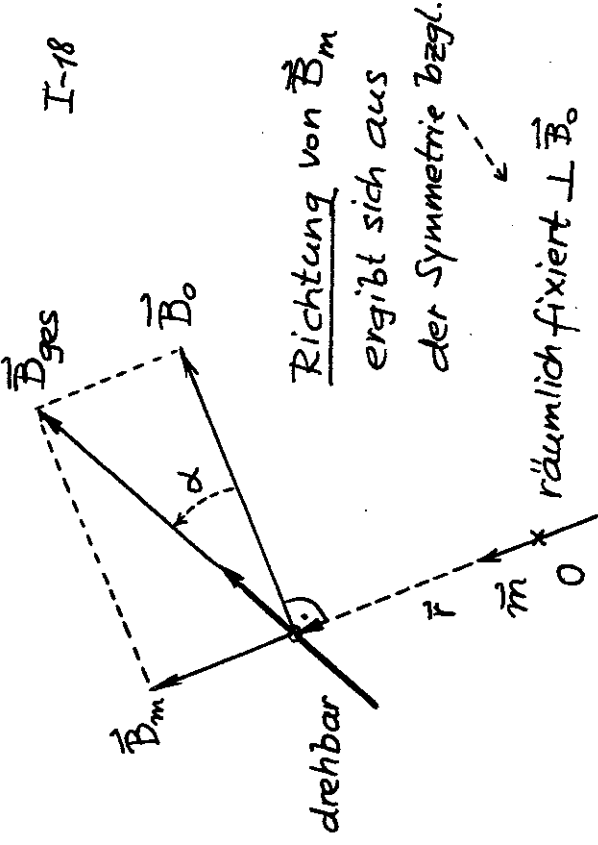
$$\ddot{\varphi}(t) + \omega^2 \varphi(t) = 0 \text{ mit } \omega^2 = k_{2a} \frac{m B_0}{\Theta}$$

(20b)

Θ bekannt, ω gemessen
 $\Rightarrow m B_0$ bestimmt

2. Schritt: Bestimmung von $\frac{m}{B_0}$ durch

Beobachtung der Einstellung der Richtung einer frei drehbaren weiteren Magnethöhle im Gesamtfeld $\vec{B}_{ges} = \vec{B}_0 + \text{Dipolfeld } \vec{B}_m$ der räumlich fixierten Testmagnethöhle



Richtung von \vec{B}_m ergibt sich aus der Symmetrie bzgl. räumlich fixiert $\perp \vec{B}_0$

a) α für verschiedene Werte von r bestimmt; zeigt

$$\vec{B}_m = k_{2b} \frac{2\vec{m}}{r^3} \text{ Dipolfeld für } \vec{r} \parallel \vec{m} \quad (21)$$

Bemerkung: In Abschnitt IV.1.D wenden wir für einen Punktdipol im Ursprung

$$\vec{B}_m(r) = k_{2b} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{m}}{r^5}, \quad r > 0$$

finden. •

b) Messung von α für gegebenes r und Verwendung von (21):

$$\tan \alpha = \frac{B_m}{B_0} = k_{2b} \frac{2}{r^3} \frac{m}{B_0} \quad (22)$$

$\Rightarrow \frac{m}{B_0}$ bestimmt

I, 4. C. Magnetfeld und Ströme

Experimente von Biot und Savart, Oersted und Ampère mit stromdurchflossenen Leitern, Spulen und drehbar aufgehängten Magnetnadeln.

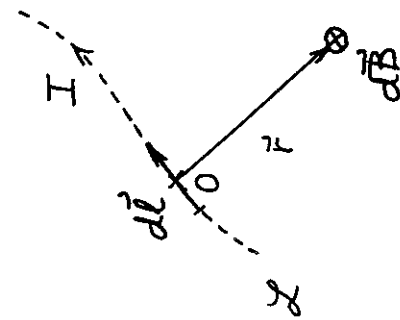
Ergebnisse in zwei Gesetzen zusammengefasst: 1. Gesetz

Biot-Savartsches Gesetz: Magnetfeld (beitrag)
eines von einem Strom I durchflossenen
Leiterelementes $d\vec{l}$ im vektoriellen Abstand \vec{r}

Vom Leiterelement:

$$d\vec{B} = k_3 \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (24)$$

k_3 maßsystemspezifische positive
Konstante
I zeitlich konstant

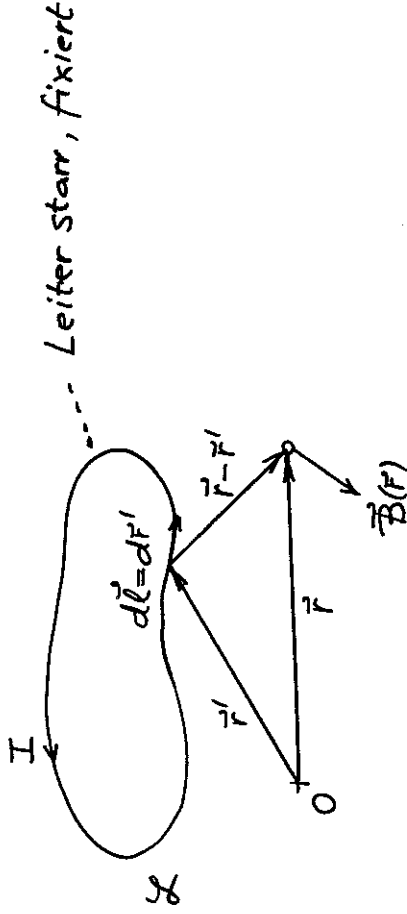


Bemerkung: Gedankliche "Anleihe"
beim Coulombgesetz durch
gedankliches "Zerlegen" des
Leiters in "Elemente".
Physikalisch tatsächlich zugänglich
ist aber nur das vom Strom =
durchflossenen Leiter \mathcal{L}
verursachte Gesamtfeld \vec{B} .

Magnetfeld eines lokalisierten Strom =

durchflossenen Leiters \mathcal{L} (zeitlich konstanter Strom I)

$$\vec{B}(\vec{r}) = k_3 \oint_{\mathcal{L}} \frac{I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (24')$$



--- Leiter starr, fixiert

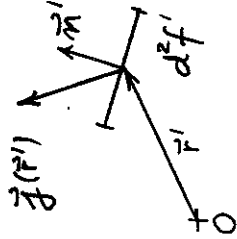
ANALOG:

Magnetfeld einer vorgegebenen lokalisierten

Stationären Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r}')$... elektrische
(Volumen) Strom-
dichte

$$\vec{B}(\vec{r}) = k_3 \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (24'')$$

Biot-Savart-Feld



$\vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{n}' d^2f'$... elektrische

Ladung, welche das Flächenelement d^2f' in der Zeiteinheit netto in der

Orientierung d^2f' durchsetzt
durch \vec{n}' gegeben; durchsetzt

$$\vec{B}(\vec{r}) = k_3 \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

⇒ (s. Bemerkungen)

Oerstedtsches Gesetz (2. Ampèresches Gesetz)

Integralform ... magnetische Zirkulation längs $\mathcal{C}(\mathcal{F})$

$$\oint_{\mathcal{C}(\mathcal{F})} d\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = k_3 4\pi \int_{\mathcal{F}} d^2\vec{f} \cdot \vec{j}(\vec{r}) \quad \forall \mathcal{F} \quad (25)$$

differentielle Form^{†)}

$$\text{rot } \vec{B}(\vec{r}) = k_3 4\pi \vec{j}(\vec{r}) \quad (26)$$

Der Beweis des Schrittes von (24'') zu (25) bzw. zu

(26) wird hier nicht vorgeführt. Er kann im Prinzip

Wie in der Elektrostatik beim Coulombgesetz durchgeführt werden, ist aber mathematisch verwickelter.

Bemerkungen:

1) Der Übergang von (24'') zu (25) gemäß

$$\oint_{\mathcal{C}(\mathcal{F})} d\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = k_3 \int_{\mathcal{C}(\mathcal{F})} d^3r' \oint d\vec{r} \cdot \underbrace{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}_{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \dots$$

†) Stokescher Integralsatz $\left| \oint_{\mathcal{C}(\mathcal{F})} \vec{j}(\vec{r}') \cdot \underbrace{\oint_{\mathcal{C}(\mathcal{F})} \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times d\vec{r} \right]} \right|$

beinhaltet die Schwierigkeit, daß man über die Ausrechnung von

$$\oint_{\mathcal{C}(\mathcal{F})} \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times d\vec{r} \right]$$

von einem $\int d^3r'$ zu einem $\int_{\mathcal{F}} d^2\vec{r}'$ gelangen

muß (während man im analogen elektrostatischen

Fall nur von einem $\int d^3r'$ zu einem $\int_V d^3r$ gelangen mußte).

2) Der Übergang von (24'') zu (26) ist zwar elementarer, wird hier aber aus Zeitgründen nicht gebracht; selbst probieren! †)

3) Leicht kann man verifizieren, daß die Divergenz von $\vec{B}(\vec{r})$ Gl. (24'') verschwindet.

4) Bzgl. der Gültigkeit der erhaltenen FG der Magnetostatik (MaxwellGln. der Magnetostatik)

gelten analoge Bemerkungen wie in der Elektrostatik (s. I-12).

Der Ausdruck (24'') stellt die Lösung der FG der Magnetostatik für "natürliche RB" dar (keine Ströme im Unendlichen, keine RB im Endlichen).

†) s. Jackson oder Greiner

5) In der Dynamik bleibt die FG $\text{div } \vec{B} = 0$ "erhalten" (natürlich mit $\vec{B}(\vec{r}, t)$, hingegen wird das Oersted'sche Gesetz $\text{rot } \vec{B} = k_3 4\pi \vec{j}$ durch den Maxwellterm ergänzt, d.h. es wird \vec{j} durch $\vec{j} + \frac{1}{k_1} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ersetzt. Dies ist aus Gründen der mathematischen Konsistenz der Grundgl. nötig und eröffnet die Möglichkeit elm. Wellenfelder.

Abschnitt II.1.B: Ladungserhaltung:
Kontinuitätsgleichung

$$\text{div } \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0$$

Zusammen mit $\text{div } \vec{E}(\vec{r}, t) = k_1 4\pi \rho(\vec{r}, t)$ folgt

$$\text{div} \left[\vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{1}{k_1} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right] = 0 \quad (27)$$

und in der FG^{†)} (Oersted'sches Gesetz mit Mx-Term)

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{B}(\vec{r}, t) &= k_3 4\pi \left[\vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{1}{k_1} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right] \\ &= k_3 4\pi \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{k_3}{k_1} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

herrscht mathematische Konsistenz ($\text{div rot} \equiv 0$).

†) Im Skriptum 3. Maxwellgl. genannt.

2. Gesetz:

1. Ampèresches Gesetz: In einem statischen äußeren Magnetfeld \vec{B} wirkt auf ein von einem Strom I durchflossenes Leiterelement $d\vec{\ell}$ die Kraft

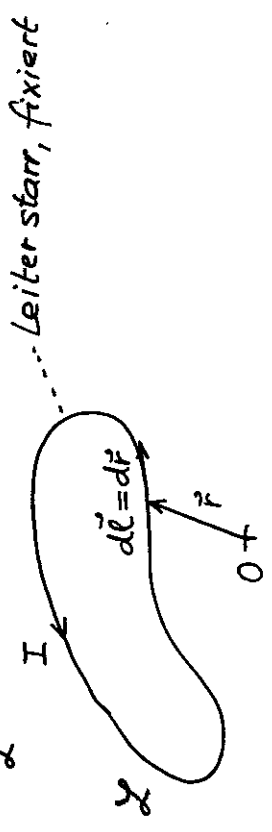
$$d\vec{F} = k_4 I d\vec{\ell} \times \vec{B} \quad (29)$$

k_4 maßsystemspezifische positive Konstante
 I zeitlich konstant

Bemerkung: Physikalisch zugänglich ist nur die Gesamtkraft \vec{F} auf den stromdurchflossenen Leiter \mathcal{L} .

Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter \mathcal{L}
(zeitlich konstanter Strom I)

$$\vec{F} = k_4 \oint_{\mathcal{L}} [I d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r})]$$



Kraft auf eine lokalisierte stationäre Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$

$$\vec{F} = k_4 \int d^3r [\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})]$$

Bemerkung: In der Elektrostatik hatten wir

$$\vec{F} = \int d^3r \rho(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}).$$

In der Elektrodynamik muß man diese Formeln lediglich übernehmen und die Kräfte addieren:

Kraft auf eine lokalisierte Quellverteilung in der Dynamik

$$\vec{F}(t) = \int d^3r [\underbrace{\rho(\vec{r},t) \vec{E}(\vec{r},t) + k_4 \vec{j}(\vec{r},t) \times \vec{B}(\vec{r},t)}_{=: \vec{f}(\vec{r},t)}] \quad (31)$$

Lorentzkraftdichte •

I.4.C'. Faradaysches Induktionsgesetz

Experiment: Zeitliche Änderung des magnetischen Flusses durch eine Leiterschleife induziert in dieser einen elektrischen Strom.

Mathematische Formulierung als FG!

Faradaysches Induktionsgesetz

Integralform elektrische Zirkulation längs $\mathcal{C}(\mathcal{F})$

$$\oint_{\mathcal{C}(\mathcal{F})} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r},t) = -k_4 \frac{d}{dt} \underbrace{\int_{\mathcal{F}} d^2\vec{f} \cdot \vec{B}(\vec{r},t)}_{=: \Phi_m(t)} \quad (28a)$$

Extrapolation von Erfahrung!
differentielle Form

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r},t) = -k_4 \frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t} \quad (28b)$$

k_4 gleiche Konstante wie im 1. Ampèreschen Gesetz

I.4.D. Versuche zur Feststellung des

Äthers bzw. zur Mitführung des

Äthers durch bewegte Materie

Ätherhypothese: Elm. Felder, insbesondere

elm. Wellenfelder haben eine Trägersubstanz, den Äther. Licht breitet sich im Äther außerhalb von Materie nach allen Richtungen mit der

+1) Im Skriptum als 4. Maxwellgl. bezeichnet.

Geschwindigkeit c aus. In einem materiellen Körper, der im Äther ruht, breitet sich Licht mit der Geschwindigkeit $\frac{c}{n}$ aus (n Brechungsindex der Materie). Bewegt sich ein materieller Körper im Äther mit der Geschwindigkeit v , so hängt die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes in Bewegungsrichtung der Materie davon ab, ob der materielle Körper den Äther in seinem Inneren nicht, teilweise oder total

"mitführt":

$$\frac{c}{n} + \eta v, \quad \eta \text{ Mitführungskoeffizient}$$

$\eta = 0$ keine Mitführung

$\eta = 1$ totale Mitführung

$0 < \eta < 1$ teilweise Mitführung

Fizeauscher Mitführungsversuch

Wird in Abschnitt XVI.3.B ausführlich behandelt (s. Abb. 16.2).

Ergebnis: für ein transparentes Medium gilt

$$\eta = 1 - \frac{1}{n^2} + \frac{c \omega}{n} \frac{dn}{d\omega}$$

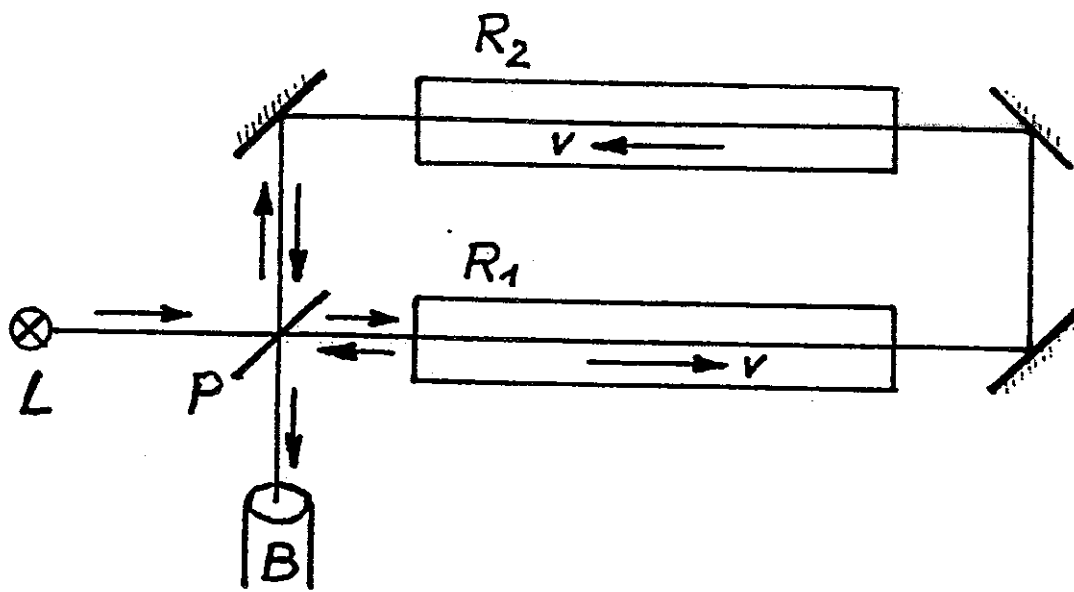


Fig. 16.2 Schematische Versuchsanordnung zur Messung des Mitführungskoeffizienten

$$\eta = 1 - \frac{1}{n^2} + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega} = \eta(\omega)$$

für Medium mit
Dispersion!

"Der Äther müßte je nach der Farbe des Lichtes mit einer anderen Geschwindigkeit im materiellen Körper strömen. Es gäbe also so viele Äther wie Farben, und das ist doch unmöglich."
(M. Born: Die Relativitätstheorie Einsteins)

Michelson - Morley - Versuch

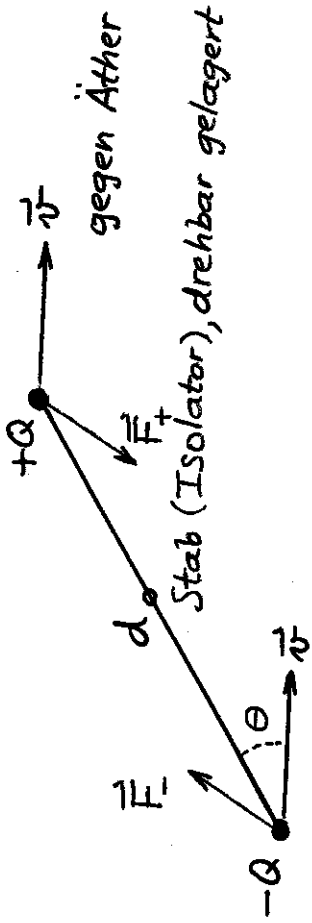
Wird in Abschnitt VIII.1.1.A ausführlich behandelt (s. Abb. 7.1).

Ergebnis (auf dem Boden der Ätherhypothesen und ohne ad-hoc-Lorentzkontraktionshypothese):

Erde "nimmt" den Äther in ihrer Umgebung total "mit".

Trouton-Noble-Versuch

Prinzip:



gegen Äther

(In realen Experiment Plattenkondensator.)

Annahmen: Grundgleichungen der Maxwelltheorie

gelten in der bekannten Form im

Äthersystem, daher auch Lorentzkraft. ABER:

"mechanische" (elastische)

Kräfte im (fast starren) Stab

transformieren sich gemäß GT.

s. Abschnitt VI.1.C !

Drehmoment \vec{N} vom Betrag

$$N \propto \frac{Q^2 v^2 \sin \theta \cos \theta}{d}$$

müßte wirken und die Anordnung in Dreh-
bewegung versetzen, falls $v \neq 0$ und $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}$.

Ergebnis des Versuches: Unabhängig von

Tages- und Jahreszeit keine Drehbewegung.

Folgerung wie bei Michelson-Morley.

I-30

ABER:

Aberration der Fixsterne: Auf dem Boden der
Ätherhypothese:

Könnte es nicht geben, wenn die Erde den

Äther in ihrer Umgebung "mitnimmt" !

EINSTEIN: ~~Äther~~ Vakuum (leerer Raum)

s. Spezielle Relativitätstheorie
Kapitel VII

I. 5 Maßsysteme in der Elektrodynamik (Vakuum)^{†)}

Ein Beispiel:

Coulombgesetz: Man findet in der Literatur

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \epsilon^2 \rho$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Grund für diese Diskrepanzen?

Die Diskrepanzen stammen nicht – wie oft gesagt wird – von der verschiedenen Wahl der Einheiten, sondern davon, daß man verschiedene physikalische Größen gleich bezeichnet (z.B. elektrische Feldstärke) und dafür das gleiche Symbol verwendet (z.B. \vec{E}).

^{†)} Medium: s. Anhang B des Skriptums

physikalische Größe = Zahl mal Einheit
gegebener Dimension

Beispiel:

Geschwindigkeit: Dimension Länge/Zeit (LT^{-1})

$$v = 300 \text{ cm/s} = 3 \text{ m/s} = 196,8482 \text{ yard/min} = \dots$$

ABER: andere die Geschwindigkeit charakterisierende

Größe: Geschwindigkeit als

Vielfaches der Lichtgeschwindigkeit

($3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}$) angegeben

andere Größe – andere Bezeichnung

anderes Symbol

"[RE]-Geschwindigkeit": dimensionslos

$$v = 300 \text{ cm/s} \text{ entspricht}$$

$$v_{[RE]} = 10^{-8}$$

physikalische Größengleichung
= Beziehung zwischen physikalischen Größen

Beispiel: gleichförmig geradlinige Bewegung

l Dimension Länge (L)

t Dimension Zeit (T)

$v, v^{[RE]}$ wie zuvor

$$v = \frac{l}{t} \quad \text{ABER: } v^{[RE]} = \frac{1}{c} \frac{l}{t}$$

Zahlenbeispiel: verschiedene Formeln

$$l = 600 \text{ cm} = 6 \text{ m} = 6,5616 \text{ yard}$$

$$t = 2 \text{ s} = 0,03 \text{ min}$$

$$v = \frac{l}{t} = \frac{600 \text{ cm}}{2 \text{ s}} = 300 \text{ cm/s}$$

$$= \frac{6 \text{ m}}{2 \text{ s}} = 3 \text{ m/s}$$

$$= \frac{6,5616 \text{ yard}}{0,03 \text{ min}} = 196,8482 \text{ yard/min}$$

$$v^{[RE]} = \frac{1}{c} \frac{l}{t} = \frac{600 \text{ cm}}{3 \cdot 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 2 \text{ s}} = 10^{-8}$$

s. die weiteren Beispiele auf den Ergänzungsbildern

Analog in der Elektrodynamik

Beispiel:

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi \rho \quad \text{"Gaußsche" bzw. "[S]-Größen"}$$

$$\text{div } \vec{E}^{[m]} = 4\pi c^2 \rho^{[m]} \quad \text{"[m]-Größen"}$$

$$\text{div } \vec{E}^{[SI]} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho^{[SI]} \quad \text{"[SI]-Größen"}$$

Verschiedene Größen – verschiedene Formeln

Wahl der Einheiten

Maxwellgleichungen mit noch nicht festgelegten

Konstanten k_1, k_3, k_4

$$\text{div } \vec{E} = k_1 4\pi \rho \quad (30a)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (30b)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -k_4 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (30c)$$

$$\text{rot } \vec{B} = k_3 4\pi \vec{j} + \frac{k_3}{k_1} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (30d)$$

Kraftgesetz: Lorentzkraftdichte

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + k_4 \vec{j} \times \vec{B} \quad (31)$$

Bei der Hinzunahme des Maxwellterms
im Oerstedtschen Gesetz wurde die

Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

benützt. Wegen

$$\int_V d^3r \operatorname{div} \vec{j} = - \frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho$$

$$\underbrace{\oint F(\vec{r}) \cdot \vec{j}}_{F(V)} = - \frac{d}{dt} \underbrace{\int_V d^3r \rho}_{\text{Ladung in } V}$$

Strom durch $F(V)$
(nach außen)

bedeutet dies, daß wir Strom und Ladung
bereits implizit durch die Großengleichung

$$\text{Strom} = \text{Ladung} / \text{Zeit} \quad (32)$$

(ohne zusätzliche Konstante) verknüpft haben.

Die Konstanten k_1, k_3, k_4 (sowie k_{2a}, k_{2b})
sind nicht völlig unabhängig wählbar.

Behauptung:

1. Schritt: k_1, k_3, k_4 betrachtet

In Kapitel V werden wir sehen, daß

die Maxwellgleichungen mit $\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -k_4 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{k_3}{k_1} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

die Ausbreitung elm. Wellen beschreiben.

\vec{E}, \vec{B} genügen dann homogenen Wellengln.,
welche die experimentell als c bestimmte
Lichtgeschwindigkeit als Wellenausbreitungs-
geschwindigkeit enthalten müssen:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -k_4 \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B}}$$

$$\underbrace{\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}}_0 = \frac{k_3}{k_1} \underbrace{\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) - \left(\frac{k_3 k_4}{k_1} \right) \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \vec{0}$$

(analog Gl. für
 $\vec{B}(\vec{r}, t)$)
 $\frac{1}{c^2}$

⇒ Es muss $\frac{k_1}{k_3 k_4} = c^2$ gelten.

2. Schritt: k_{2a}, k_{2b} einbezogen

Wir stellen Dimensionsbetrachtungen an und wählen für die elektrische Ladung und das magnetische Dipolmoment dabei beliebige Einheiten Q_0, M_0

Ziel: Zu zeigen, dass

$$\left[\frac{k_1 k_{2b}}{k_3 k_{2a}} \right] = L^2 T^{-2} = \text{Quadrat einer Geschwindigkeit}$$

(unabh. von der Wahl der elm. Einheiten)

Weg:

1) $F = k_1 \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \Rightarrow [F] = [k_1] \frac{[Q_0^2]}{L^2} \cdot L$

Gl. (19):

$$\vec{N} = k_{2a} \vec{m} \times \vec{B} \quad [F]L = [k_{2a} k_{2b}] \frac{[M_0^2]}{L^3}$$

Gl. (21):

$$\vec{B} = k_{2b} \frac{2\vec{m}}{r^3} \Rightarrow [k_1] \frac{[Q_0^2]}{L} = [k_{2a} k_{2b}] \frac{[M_0^2]}{L^3}$$

$$\left[\frac{k_1}{k_{2a} k_{2b}} \right] = \left[\frac{M_0^2}{Q_0^2} \right] \frac{1}{L^2}$$

2) $[I] = \frac{[Q_0]}{T} \Rightarrow [j] = \frac{[Q_0]}{L^2 T}$

$\text{rot } \vec{B} = k_3 4\pi \vec{j} + \dots \Rightarrow$

$$\left. \begin{aligned} \frac{[B]}{L} &= [k_3] \frac{[Q_0]}{L^2 T} \\ \text{von 1):} & \\ [B] &= [k_{2b}] \frac{[M_0]}{L^3} \end{aligned} \right\} \left[\frac{k_{2b}}{k_3} \right] = \left[\frac{Q_0}{M_0} \right] \frac{L^2}{T}$$

1) + 2):

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{k_1}{k_{2a} k_{2b}} \right] &= \left[\frac{M_0^2}{Q_0^2} \right] \frac{1}{L^2} \\ \left[\frac{k_{2b}^2}{k_3^2} \right] &= \left[\frac{Q_0^2}{M_0^2} \right] \frac{L^4}{T^2} \end{aligned} \right\}$$

$$\left[\frac{k_1 k_{2b}}{k_3^2 k_{2a}} \right] = \frac{L^2}{T^2} \quad \checkmark$$

unabhängig von Wahl der elm. Einheiten!

"Experiment":

$$\frac{k_1 k_{2b}}{k_3^2 k_{2a}} = c^2$$

(33')

(33), (33'): Satz:

Von den 5 Konstanten $k_1, k_{2a}, k_{2b}, k_3, k_4$ können (und müssen) 3 Konstanten willkürlich gewählt werden, um ein Maßsystem festzulegen.

System der elektrostatischen Einheiten

(E.S.E.)

$$\begin{aligned} \text{Wahl: } k_1^{[s]} &= k_{2b}^{[s]} = k_4^{[s]} = 1 \Rightarrow \\ k_1^{[s]} &= c^2, \quad k_3^{[s]} = \frac{1}{c^2} \end{aligned}$$

(34)

 \Rightarrow Maxwellgleichungen

$$\text{div } \vec{E}^{[s]} = 4\pi \rho^{[s]} \quad (35a)$$

$$\text{div } \vec{B}^{[s]} = 0 \quad (35b)$$

$$\text{rot } \vec{E}^{[s]} = - \frac{\partial \vec{B}^{[s]}}{\partial t} \quad (35d)$$

$$\text{rot } \vec{B}^{[s]} = \frac{4\pi}{c^2} \vec{j}^{[s]} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}^{[s]}}{\partial t} \quad (35c)$$

Lorentzkraftdichte

$$\vec{f} = \rho^{[s]} \vec{E}^{[s]} + \vec{j}^{[s]} \times \vec{B}^{[s]} \quad (35e)$$

Ungebräuchliches Maßsystem, deshalb nicht näher diskutiert.

System der elektromagnetischen Einheiten

(E.M.E.)

$$\begin{aligned} \text{Wahl: } k_{2a}^{[m]} &= k_{2b}^{[m]} = k_4^{[m]} = 1 \Rightarrow \\ k_1^{[m]} &= c^2, \quad k_3^{[m]} = 1 \end{aligned}$$

(36)

 \Rightarrow Maxwellgleichungen

$$\text{div } \vec{E}^{[m]} = 4\pi c^2 \rho^{[m]} \quad (37a)$$

$$\text{div } \vec{B}^{[m]} = 0 \quad (37b)$$

$$\text{rot } \vec{E}^{[m]} = - \frac{\partial \vec{B}^{[m]}}{\partial t} \quad (37d)$$

$$\text{rot } \vec{B}^{[m]} = 4\pi \vec{j}^{[m]} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}^{[m]}}{\partial t} \quad (37c)$$

Lorentzkraftdichte

$$\vec{f} = \rho^{[m]} \vec{E}^{[m]} + \vec{j}^{[m]} \times \vec{B}^{[m]} \quad (37e)$$

*

Ebenfalls ungebräuchlich.

*1) Formal gleich wie im E.S.E.- (und SI-) System

Gaußsches System ("gemischte")

CGS-Einheiten

Elektrische Größen im E.S.E.-System und

magnetische Größen im E.M.E.-System

angegeben, d.h. *)

Wahl: $k_1 = k_{2a} = k_{2b} = 1 \Rightarrow$
 $k_3 = k_4 = \frac{1}{c}$

\Rightarrow

<u>Maxwellgleichungen</u>	sehr "symmetrisch", [E] = [B], Relativitätstheorie FELDTENSOR!
$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho$	(41a)
$\text{div } \vec{B} = 0$	(41b)
$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	(41d)
$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	(41c)
<u>Lorentzkraftdichte</u>	(41e)
$\vec{f} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B}$	

*) Keine eigene Kennzeichnung der Konstanten und physikalischen Größen, da "unser" System (System "des Theoretikers").

Internationales Einheitensystem (SI)

Neben den Grundeinheiten m, kg, s

(MKS-System) wird eine vierte Grundeinheit,

das Ampère (A) eingeführt, und zwar

als Einheit für den elektrischen Strom

(MKSA-System).

1 Ampère ist jene Strommenge, die beim Durchgang durch zwei unendlich lange, im Abstand von 1m parallel zueinander angeordnete, geradlinige Drähte vernachlässigbar dünnen Querschnittes zwischen den Leitern eine Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$ N je Meter der Doppelleitung hervorruft.

Damit sowie mit den FG $\text{div } \vec{B}_2(\vec{r}) = 0$,

$\text{rot } \vec{B}_2(\vec{r}) = k_3 \frac{4\pi}{c} \vec{j}_2(\vec{r})$ und der entsprechen=

den asymptotischen Bdg. für $\vec{B}(\vec{r})$ und

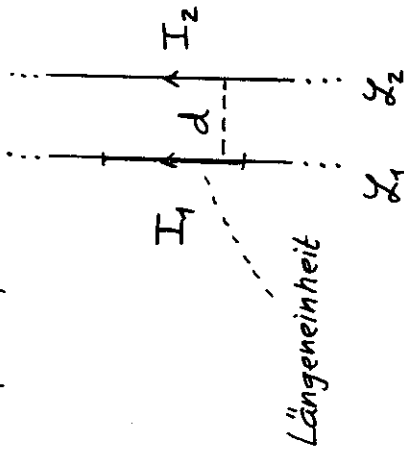
dem 1. Ampèreschen Gesetz

$\vec{F}_{12} = k_4 \oint_{-\vec{T} \dots \infty_1} [I_1 d\vec{r} \times \vec{B}_2(\vec{r})] \Rightarrow$

$k_3 \cdot k_4$
festgelegt

I-43

liefert für den Fall



(Übungsbeispiel; s. auch Greiner) für die Kraft pro Längeneinheit

$$k_3 k_4 \frac{2 I_1 I_2}{d} \quad (39)$$

$$I_1 = I_2 = 1 \text{ A}, d = 1 \text{ m}$$

Kraft pro Längeneinheit $2 \cdot 10^{-7} \text{ N/m}$

$$k_3 k_4 \frac{[SI]}{[SI]} = 10^{-7} \text{ N/A}^2$$

Definitionen:

$$\mu_0 := 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$$

$$\epsilon_0 := \frac{1}{c^2 \mu_0}$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

$$\Rightarrow k_3 k_4 \frac{[SI]}{[SI]} = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

I-44

Wahl: $k_{2b} \frac{[SI]}{[SI]} = \frac{1}{4\pi}$, $k_3 \frac{[SI]}{[SI]} = \frac{\mu_0}{4\pi}$, $k_4 \frac{[SI]}{[SI]} = 1 \Rightarrow$
 $k_1 \frac{[SI]}{[SI]} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0}$, $k_{2a} \frac{[SI]}{[SI]} = \frac{1}{\mu_0}$

(40)

Maxwellgleichungen

$$\text{div } \vec{E} \frac{[SI]}{[SI]} = \rho \frac{[SI]}{\epsilon_0} \quad (43a)$$

$$\text{div } \vec{B} \frac{[SI]}{[SI]} = 0 \quad (43b)$$

$$\text{rot } \vec{E} \frac{[SI]}{[SI]} = - \frac{\partial \vec{B} \frac{[SI]}{[SI]}}{\partial t} \quad (43d)$$

$$\text{rot } \vec{B} \frac{[SI]}{[SI]} = \mu_0 \vec{j} \frac{[SI]}{[SI]} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E} \frac{[SI]}{[SI]}}{\partial t} \quad (43c)$$

Lorentzkraftdichte

$$\vec{f} = \rho \frac{[SI]}{[SI]} \vec{E} \frac{[SI]}{[SI]} + \vec{j} \frac{[SI]}{[SI]} \times \vec{B} \frac{[SI]}{[SI]} \quad (43e)$$

Gesetzlich vorgeschriebenes Maßsystem in der Technik.

I.5.B. Das Gaußsche System: Größen, Einheiten, Bezeichnungen

Größe	Symbol	Gaußsche Einheit	Bezeichnung
Länge	l	cm	Zentimeter (Basiseinheit)
Masse	m	g	Gramm (Basiseinheit)
Zeit	t	s	Sekunde (Basiseinheit)
Frequenz	f, ν	s ⁻¹	Hertz (Hz)
Kraft	\vec{F}	g cm s ⁻²	dyn
Kraftdichte	\vec{f}	g cm ⁻² s ⁻²	dyn/cm ³
Arbeit, Energie	W, U	g cm ² s ⁻²	erg
Leistung	P	g cm ² s ⁻³	erg/s
Drehmoment	\vec{N}	g cm ² s ⁻²	dyn cm
elektrische Ladung	q, Q	g ^{1/2} cm ^{3/2} s ⁻¹	statcoulomb
elektrische Ladungsdichte	ρ	g ^{1/2} cm ^{-3/2} s ⁻¹	statcoulomb/cm ³
elektrische Feldstärke	\vec{E}	g ^{1/2} cm ^{-1/2} s ⁻¹	statvolt/cm = dyn/statcoulomb
elektrisches Potential	ϕ, V	g ^{1/2} cm ^{1/2} s ⁻¹	statvolt = statcoulomb/cm
elektrischer Strom	I	g ^{1/2} cm ^{3/2} s ⁻²	statampere
elektrische Stromdichte	\vec{j}	g ^{1/2} cm ^{-1/2} s ⁻²	statampere/cm ²
magnetische Feldstärke	\vec{B}	g ^{1/2} cm ^{-1/2} s ⁻¹	Gauß (G) = dyn/statcoulomb
magnetisches Moment	\vec{m}	g ^{1/2} cm ^{5/2} s ⁻¹	erg/Gauß
magnetischer Fluß	Φ_m	g ^{1/2} cm ^{3/2} s ⁻¹	Maxwell (Mx) = G cm ²

}

aus
Mechanik
bekannt

Coulombgesetz $F = \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$

I-45

Zusammenhang zwischen einigen wichtigen Größen im Gaußschen, E.S.E.- und E.M.E.-System

Der Zusammenhang mit den Größen des E.S.E.-Systems und des E.M.E.-Systems ist durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$Q = Q^{[s]} = c Q^{[m]}, \quad \rho = \rho^{[s]} = c \rho^{[m]}, \quad \vec{E} = \vec{E}^{[s]} = \frac{1}{c} \vec{E}^{[m]}, \quad (42a)$$

$$\phi = \phi^{[s]} = \frac{1}{c} \phi^{[m]}, \quad I = I^{[s]} = c I^{[m]}, \quad \vec{j} = \vec{j}^{[s]} = c \vec{j}^{[m]}, \quad (42b)$$

$$\vec{B} = c \vec{B}^{[s]} = \vec{B}^{[m]}, \quad \vec{m} = c \vec{m}^{[s]} = \vec{m}^{[m]}, \quad \Phi_m = c \Phi_m^{[s]} = \Phi_m^{[m]}. \quad (42c)$$

I-46

I.5.C. Das SI-System: Größen, Einheiten, Bezeichnungen

Größe	Symbol	SI Einheit	Bezeichnung
Länge	l	m	Meter (<u>Grundeinheit</u>)
Masse	m	kg	Kilogramm (<u>Grundeinheit</u>)
Zeit	t	s	Sekunde (<u>Grundeinheit</u>)
Frequenz	f, ν	s^{-1}	Hertz (Hz)
Kraft	\vec{F}	$kg\ m\ s^{-2}$	Newton (N)
Kraftdichte	\vec{f}	$kg\ m^{-2}\ s^{-2}$	N/m^3
Arbeit, Energie	W, U	$kg\ m^2\ s^{-2}$	Joule (J) = N m = W s
Leistung	P	$kg\ m^2\ s^{-3}$	Watt (W) = J/s = V A
Drehmoment	\vec{N}	$kg\ m^2\ s^{-2}$	N m
elektrische Ladung	$Q^{[SI]}, q^{[SI]}$	$s\ A$	Coulomb (C) = A s
elektrische Ladungsdichte	$\rho^{[SI]}$	$m^{-3}\ s\ A$	Coulomb/m ³
elektrische Feldstärke	$\vec{E}^{[SI]}$	$kg\ m\ s^{-3}\ A^{-1}$	V/m = N/C
elektrisches Potential	$\phi^{[SI]}, V$	$kg\ m^2\ s^{-3}\ A^{-1}$	Volt (V) = W/A
elektrischer Strom	$I^{[SI]}$	A	Ampère (<u>Grundeinheit</u>)
elektrische Stromdichte	$\vec{j}^{[SI]}$	$m^{-2}\ A$	Ampère/m ²
magnetische Feldstärke	$\vec{B}^{[SI]}$	$kg\ s^{-2}\ A^{-1}$	Tesla (T) = N A ⁻¹ m ⁻¹
magnetisches Moment	$\vec{m}^{[SI]}$	$m^2\ A$	J/T
magnetischer Fluß	$\Phi_m^{[SI]}$	$kg\ m^2\ s^{-2}\ A^{-1}$	Weber (Wb) = T m ² = V s

$[Q^{[SI]}] = [I^{[SI]}] s$

I-47

Dimension
ver=
scheiden

Zusammenhang zwischen einigen wichtigen Größen im Gaußschen und SI-System

Der Zusammenhang mit den Größen des Gaußschen Systems ist durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} Q^{[SI]}, \quad q = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} q^{[SI]}, \quad \vec{E} = \sqrt{4\pi\epsilon_0} \vec{E}^{[SI]}, \quad (44a)$$

$$\phi = \sqrt{4\pi\epsilon_0} \phi^{[SI]}, \quad I = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} I^{[SI]}, \quad \vec{j} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \vec{j}^{[SI]}, \quad (44b)$$

$$\vec{B} = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} \vec{B}^{[SI]}, \quad \vec{m} = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} \vec{m}^{[SI]}, \quad \Phi_m = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} \Phi_m^{[SI]}. \quad (44c)$$