

ERGÄNZUNGSBLÄTTER VON Dr. GRAU
zum Skriptum
"ELEKTRODYNAMIK UND RELATIVITÄTSTHEORIE"
von H. Nowotny

I.1.D* Vereinigung der fundamentalen Wechselwirkungen. Eichtheorien

vor 1831 (M. Faraday Induktionsgesetz) el. WW, magn. WW, Gravitation "getrennt" (schw. WW, starke WW noch unbekannt)

- 1862 J. C. Maxwell Klassische Elektrodynamik el. WW & magn. WW = elm. WW
- 1892 H. A. Lorentz
- 1905 A. Einstein 4dim. Raumzeit
- 1909 H. Minkowski
u.a.
- 1929 W. Heisenberg Quantenelektrodynamik Elektronen und Positronen [Fermionen]
W. Pauli 4dim. Raumzeit elm. WW
- 1946-49 S. Tomonaga Träger: γ (Photon) [Boson]
J. Schwinger
R. P. Feynman
F. J. Dyson
u.a.

- 1967 S. L. Glashow Elektroschwache Theorie elm. WW & schw. WW = elektroschw. WW
A. Salam 4dim. Raumzeit Träger: γ W^\pm, Z^0 [Bosonen]
S. Weinberg

Suche nach GUTs (Grand Unified Theories), welche elektroschw. WW und starke WW "vereinigen".

- 1974 H. Georgi Standardmodell Leptonen (6 Arten) und Quarks (6 Arten)
S. L. Glashow (Standardtheorie) [Fermionen]
A. Salam 4dim. Raumzeit elm. WW & schw. WW & starke WW
S. Weinberg
u.a.
Träger: γ W^\pm, Z^0 Glukonen (8 Arten)
masselos [Bosonen] ~100 Protonmassen masselos

Suche nach TOEs (Theories of Everything), welche zusätzlich die Gravitation "einbeziehen".

1982	M. B. Green J. H. Schwarz u. a.	Superstringtheorien (5 "Stück") 10dim. Raumzeit	Fermionen und Bosonen = Eigenschwingungen von Strings (Saiten) bzw. von Membranen
seit 1996	J. H. Schwarz E. Witten C. Vafa A. Sen u. a.	M-Theory = "letzte Inkarnation" der Superstringtheorien, vereint die 5 Stringtheorien in einem kohärenten Rahmen (<u>M</u> other of all Theories, <u>M</u> astertheory) 11dim. Raumzeit	Träger: γ W^\pm, Z^0 Gluonen Graviton (hypothetisch)

M. Kaku 1999: "Very little is known about M-Theory..."

Möglicherweise muß man auf die "Mathematik des nächsten Jahrhunderts" warten ...

Experimentell erfolgt die Vereinigung der WW bei Energien von 10^{19} GeV = 10^{28} eV (entsprechend Abständen von 10^{-33} cm).

LHC (Large Hadron Collider) [CERN]: Energien bis 1 TeV = 10^3 GeV.

M. Kaku 1999: "Thus, to experimentally verify superstring theory means recreating creation in the laboratory."

Zu Abschnitt I, 4, Azur Formel zwischen den Gln. (16b) und (17):

1) Zeige selbst, dass $\operatorname{div} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = 0$ für $\vec{r} \neq \vec{r}'$.

2) Damit folgt:

a) liegt \vec{r}' nicht im Volumen V , dessen Oberfläche $F \equiv F(V)$ ist, so gilt

$$\oint_{F(V)} d^2\vec{f} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \int_V d^3r \operatorname{div} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = 0 \quad \checkmark$$

b) liegt \vec{r}' im Volumen V , so kann man statt über $F(V)$ über eine beliebige Kugelfläche mit Mittelpunkt in \vec{r}' integrieren, was bei Verschiebung des Ursprungs in den Kugelmittelpunkt

$$\oint_{\text{Kugelfläche}} d^2\vec{f} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \int_{[4\pi]} d\Omega \underbrace{r^2 \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}}_1 = 4\pi \quad \checkmark$$

gibt.

Zu Abschnitt I.5.A: Erläuterungen zum Selbstdurcharbeiten als

F1.1 Ungleiche Formeln (Mechanik)

Ergänzung zum Skriptum.
Die Tabellen stammen von

H. Nowotny.

Größe	CGS-System	SI-System	RE-System
Länge	l [cm]	l [m]	l [cm]
Zeit	t [s]	t [s]	t [s]
Geschwindigkeit	v [cm/s]	v [m/s]	$v^{[RE]}$ [1]
Formel:	$v = \frac{l}{t}$		$v^{[RE]} = \frac{1}{c} \frac{l}{t}$ mit $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s
Umrechnung:	$l = 600$ cm	$= 6$ m	$= 600$ cm
	$t = 2$ s	$= 2$ s	$= 2$ s
	$v = 300$ cm/s	$= 3$ m/s	$v^{[RE]} = 10^{-8}$

Berechnung von t :	$t = \frac{l}{v}$		$t = \frac{1}{c} \frac{l}{v^{[RE]}}$
gegeben:	$l = 600$ cm	$v = 3$ m/s	
umrechnen	$v = 300$ cm/s	$l = 6$ m	
berechnen	$t = \frac{600}{300}$ s	$= \frac{6}{3}$ s	
gegeben:		$l = 6$ m	$v^{[RE]} = 10^{-8}$
umrechnen		$v = 3$ m/s	$l = 600$ cm
berechnen		$t = \frac{6}{3}$ s	$t = \frac{1}{3 \cdot 10^{10}} \frac{600}{10^{-8}}$ s
FALSCH			
gegeben:		$l = 6$ m	$v^{[RE]} = 10^{-8}$
umrechnen			$l = 600$ cm
berechnen		$t = \frac{600}{10^{-8}}$ s	
gegeben:		$l = 6$ m	$v^{[RE]} = 10^{-8}$
umrechnen		$v = 3$ m/s	
berechnen			$t = \frac{1}{3 \cdot 10^{10}} \frac{6}{3}$ s

F1.2 Ungleiche Formeln (Elektrodynamik)

Größe	CGS-System Gaußsche Einheiten	SI-System
Länge	l [cm]	l [m]
Kraft	F [dyn] = [g cm s ⁻²]	F [N] = [kg m s ⁻²]
elektrische Ladung	Q [GE] = [g ^{1/2} cm ^{3/2} s ⁻¹]	Q [SI] [C] = [s A]
Formel:	$F = \frac{Q_1 Q_2}{l^2}$	$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{l^2}$ mit $\epsilon_0 = 8,86 \cdot 10^{-12}$ As/Vm
Umrechnung:	$l = 6$ cm $F = 1$ dyn $Q = 6$ GE	$= 0,06$ m $= 10^{-5}$ N Q [SI] = $2 \cdot 10^{-9}$ C
Berechnung von F :	$F = \frac{Q_1 Q_2}{l^2}$	$F = \frac{1}{4\pi \cdot 8,86 \cdot 10^{-12}} \frac{Q_1 Q_2}{l^2}$
RICHTIG		
gegeben:	$Q_1 = Q_2 = 6$ GE	$l = 0,06$ m
umrechnen	$l = 6$ cm	Q_1 [SI] = Q_2 [SI] = $2 \cdot 10^{-9}$ C
berechnen	$F = \frac{6 \cdot 6}{6^2}$ dyn	$F = \frac{1}{4\pi \cdot 8,86 \cdot 10^{-12}} \frac{2 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{0,06^2}$ N
FALSCH		
gegeben:	$Q_1 = Q_2 = 6$ GE	$l = 0,06$ m
umrechnen	$l = 6$ cm	
berechnen		$F = \frac{1}{4\pi \cdot 8,86 \cdot 10^{-12}} \frac{6 \cdot 6}{6^2}$? (N, dyn) ?
gegeben:	$Q_1 = Q_2 = 6$ GE	$l = 0,06$ m
umrechnen		Q_1 [SI] = Q_2 [SI] = $2 \cdot 10^{-9}$ C
berechnen	$F = \frac{2 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{0,06^2}$?	

F1.3 (Formal) gleiche Formeln (Mechanik)

Größe	CGS-System	SI-System	RE-System
Länge	l [cm]	l [m]	$l^{[RE]}$ [s]
Zeit	t [s]	t [s]	t [s]
Geschwindigkeit	v [cm/s]	v [m/s]	$v^{[RE]}$ [1]
Formel:	$v = \frac{l}{t}$		$l^{[RE]} = \frac{l}{c}$ $v^{[RE]} = \frac{1}{c} \frac{l}{t}$ mit $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s
Umrechnung:	$l = 600$ cm = 6 m $t = 2$ s = 2 s $v = 300$ cm/s = 3 m/s		$l^{[RE]} = 2 \cdot 10^{-8}$ s = 2 s $v^{[RE]} = 10^{-8}$
Berechnung von t : RICHTIG ???		$t = \frac{l}{v}$	$t = \frac{l^{[RE]}}{v^{[RE]}}$
gegeben:		$l = 6$ m	$v^{[RE]} = 10^{-8}$
umrechnen			$l^{[RE]} = 2 \cdot 10^{-8}$ s
berechnen		$t = \frac{2 \cdot 10^{-8}}{10^{-8}}$ s	
gegeben:		$l = 6$ m	$v^{[RE]} = 10^{-8}$
umrechnen		$v = 3$ m/s	
berechnen			$t = \frac{6}{3}$ s

F1.4 (Formal) gleiche Formeln (Elektrodynamik)

Größe	CGS-System Gaußsche Einheiten	SI-System
Kraft	F [dyn] = [g cm s ⁻²]	F [N] = [kg m s ⁻²]
elektrische Ladung	Q [GE] = [g ^{1/2} cm ^{3/2} s ⁻¹]	$Q^{[SI]}$ [C] = [s A]
el. Feldstärke	E [GE] = [g ^{1/2} cm ^{-1/2} s ⁻¹]	$E^{[SI]}$ [V/m] = [kg m s ⁻³ A ⁻¹]
Formel:	$F = Q \cdot E$	$F = Q^{[SI]} \cdot E^{[SI]}$
Umrechnung:	$F = 1$ dyn $Q = 6$ GE $E = 0,1666$ GE	$= 10^{-5}$ N $Q^{[SI]} = 2 \cdot 10^{-9}$ C $E^{[SI]} = 5 \cdot 10^3$ V/m
Berechnung von F :	$F = Q \cdot E$	$F = Q^{[SI]} \cdot E^{[SI]}$
RICHTIG ???		
gegeben:	$Q = 6$ GE	$E^{[SI]} = 5 \cdot 10^3$ V/m
umrechnen	$E = 0,1666$ GE	
berechnen		$F = 6 \cdot 0,1666$ N(?) dyn(!)
gegeben:	$Q = 6$ GE	$E^{[SI]} = 5 \cdot 10^3$ V/m
umrechnen		$Q^{[SI]} = 2 \cdot 10^{-9}$ C
berechnen	$F = 5 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-9}$ dyn(?) N(!)	

Zu den Gln. (33):

1. Schritt: k_1, k_3, k_4 betrachtet

In Kapitel IV werden wir sehen, daß die Maxwellgleichungen mit $\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -k_4 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{k_3}{k_1} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

die Ausbreitung elm. Wellen beschreiben.

\vec{E}, \vec{B} genügen dann homogenen Wellengln.

welche die experimentell als c bestimmte Lichtgeschwindigkeit als Wellenausbreitungsgeschwindigkeit enthalten müssen:

$$\text{rot rot } \vec{E} = -k_4 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B}$$

$$\text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = \frac{k_3}{k_1} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{k_3 k_4}{k_1} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \vec{0}$$

(analog Gl. für $\vec{B}(\vec{r}, t)$)

\Rightarrow
$$Es \text{ mu\ss } \frac{k_1}{k_3 k_4} = c^2 \text{ gelten.}$$
 (33)

2. Schritt: k_{2a}, k_{2b} einbezogen

Wir stellen Dimensionsbetrachtungen an und wählen für die elektrische Ladung und das magnetische Dipolmoment dabei beliebige Einheiten $[Q_0], [M_0]$.

Ziel: Zu zeigen, daß

$$\left[\frac{k_1 k_{2b}}{k_3 k_{2a}} \right] = L^2 T^{-2} = \text{Quadrat einer Geschwindigkeit}$$

(unabh. von der Wahl der elm. Einheiten)

Weg:

1) $F = k_1 \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \Rightarrow [F] = [k_1] \frac{[Q_0^2]}{L^2} \quad | \cdot L$

Gl. (19):

$$\vec{N} = k_{2a} \vec{m} \times \vec{B} \quad [F]L = [k_{2a} k_{2b}] \frac{[M_0^2]}{L^3}$$

Gl. (21):

$$\vec{B}_m = k_{2b} \frac{2\vec{m}}{r^3}$$

$$\Rightarrow [k_1] \frac{[Q_0^2]}{L} = [k_{2a} k_{2b}] \frac{[M_0^2]}{L^3}$$

$$\left[\frac{k_1}{k_{2a} k_{2b}} \right] = \left[\frac{M_0^2}{Q_0^2} \right] \frac{1}{L^2}$$

$$2) [I] = \frac{[Q_0]}{T} \Rightarrow [j] = \frac{[Q_0]}{L^2 T}$$

$$\text{rot } \vec{B} = k_3 \text{ rot } \vec{j} + \dots \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{[B]}{L} &= [k_3] \frac{[Q_0]}{L^2 T} \\ \text{von 1):} & \\ [B] &= [k_{2b}] \frac{[M_0]}{L^3} \end{aligned} \right\} \left[\frac{k_{2b}}{k_3} \right] = \left[\frac{Q_0}{M_0} \right] \frac{L^2}{T}$$

1) + 2):

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{k_1}{k_{2a} k_{2b}} \right] &= \left[\frac{M_0^2}{Q_0^2} \right] \frac{1}{L^2} \\ \left[\frac{k_{2b}}{k_3^2} \right] &= \left[\frac{Q_0^2}{M_0^2} \right] \frac{L^4}{T^2} \end{aligned} \right\} \left[\frac{k_1 k_{2b}}{k_3^2 k_{2a}} \right] = \frac{L^2}{T^2} \checkmark$$

unabhängig von
Wahl der elm.
Einheiten!

Experiment:

$$\boxed{\frac{k_1 k_{2b}}{k_3^2 k_{2a}} = c^2}$$

(33')

(33) / (33'):

Von den 5 Konstanten $k_1, k_{2a}, k_{2b}, k_3, k_4$ können (und müssen) 3 Konstanten willkürlich gewählt werden, um ein Maßsystem festzulegen.

zu Abschnitt II.2.Azu Gl. (13b):

$$\text{In } \underline{\text{rot rot } \vec{a}(\vec{r}) = \text{grad div } \vec{a}(\vec{r}) - \Delta \vec{a}(\vec{r})}$$

Stellt Δ den sog. "Vektorlaplaceoperator" dar, manchmal \star geschrieben, um Verwechslungen zu vermeiden. Vereinfacht man aber — und diese Vereinbarung gilt für das gesamte Skriptum —, dass man $\star \vec{a}(\vec{r})$ nur nach kartesischen Komponenten zerlegt, so kann man wegen $(\star \vec{a}(\vec{r}))_x = \Delta a_x(\vec{r}), \dots$ (Δ hier "gewöhnlicher" Laplaceoperator) $\Delta \vec{a}(\vec{r})$ schreiben, ohne das "etwas passieren kann". (Beachte: $(\star \vec{a}(\vec{r}))_\vartheta$ ist beispielsweise ungleich $\Delta a_\vartheta(\vec{r})$; ϑ Kugelkoordinat.)

zu Abschnitt II.3.B

zu Gl. (31): Hier muß es noch $D(\vec{r}, t; \vec{r}', t')$ heißen. Nur wenn keine AB und keine RB im Endlichen vorgegeben sind, können die Lsgn. von $\square D(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t')$ nur von $|\vec{r} - \vec{r}'|, t - t'$ abhängen (Homogenität und Isotropie des Raumes und Homogenität der Zeit in bezug auf ein Inertialsystem).

zu Abschnitt II.3.C: zu Gl. (39)

$$D_{\text{ret}}(|\vec{r}-\vec{r}'|, t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} \int d\omega e^{-i\omega(t-t')} \frac{4\pi}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (38)$$

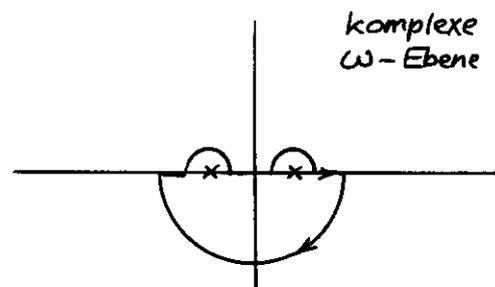
$$D_{\text{ret}}(r, t) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \int d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

$$\omega = \omega_r + i\omega_i$$

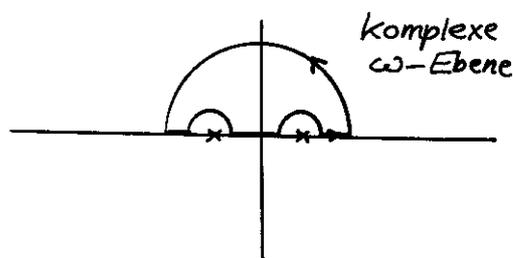
komplexe Variable

$$e^{-i\omega t} = e^{-i\omega_r t} e^{\omega_i t} =: F(k, t)$$

t > 0: strebt in der unteren Halbebene im Unendlichen gegen null
($\omega_i \rightarrow -\infty$)

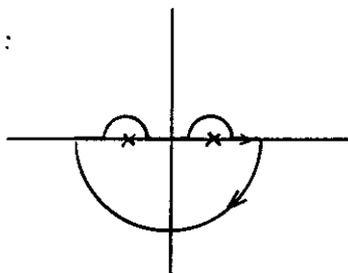


t < 0: strebt in der oberen Halbebene im Unendlichen gegen null
($\omega_i \rightarrow +\infty$)



$$F(k, t) = \int d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} =: f(k, t, \omega) \equiv f(\omega)$$

t > 0:



$$\oint d\omega f(\omega) = \int d\omega f(\omega)$$

$$= -2\pi i [\text{Res } f(\omega)_{\omega=-ck} + \text{Res } f(\omega)_{\omega=+ck}]$$

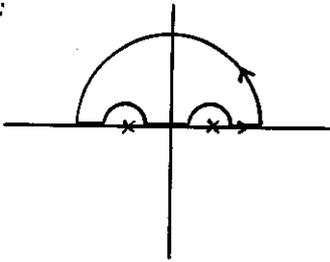
Residuensatz

$$\text{Res } f(\omega)_{\omega=-ck} = \lim_{\omega \rightarrow -ck} [(\omega+ck) \frac{e^{-i\omega t}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}] = \frac{c}{2k} e^{ickt}$$

$$\text{Res } f(\omega)_{\omega=+ck} = -\frac{c}{2k} e^{-ickt}$$

$$\int d\omega f(\omega) = -2\pi i \frac{c}{2k} [e^{ickt} - e^{-ickt}] \quad \text{für } t > 0$$

t < 0:



$$\oint_{\text{nn}} d\omega f(\omega) = \int_{\text{nn}} d\omega f(\omega) = 0$$

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad (40)$$

Somit:

$$F(k, t) = \int_{\text{nn}} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = -2\pi i \frac{c}{2k} \underbrace{[e^{ickt} - e^{-ickt}]}_{\text{...}} \Theta(t)$$

$$D_{\text{ret}}(r, t) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} F(k, t) = -\frac{i}{(2\pi)^2} c \Theta(t) \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \frac{1}{k} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} [\dots]$$

\vec{k} -Integration: Polarachse in Richtung von \vec{r} gelegt:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = kr \cos \vartheta, \quad d^3k = 2\pi k^2 dk \underbrace{\sin \vartheta d\vartheta}_{-d(\cos \vartheta)}$$

$$D_{\text{ret}}(r, t) = -\frac{i}{2\pi} c \Theta(t) \int_0^{+\infty} dk k [\dots] \int_{-1}^{+1} d\xi e^{i k r \xi} \frac{e^{i k r} - e^{-i k r}}{i k r}$$

$$D_{\text{ret}}(r, t) = -\frac{1}{2\pi} \frac{c}{r} \Theta(t) \int_0^{+\infty} dk [e^{ickt} - e^{-ickt}] [e^{i k r} - e^{-i k r}]$$

$$\int_0^{+\infty} dk [e^{i k (r+ct)} - e^{i k (r-ct)}]$$

$$+ \int_0^{+\infty} dk [e^{-i k (r+ct)} - e^{-i k (r-ct)}]$$

2. Term: $\int_{-\infty}^0 dk [e^{i k (r+ct)} - e^{i k (r-ct)}]$

$$D_{\text{ret}}(r, t) = -\frac{c}{r} \Theta(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk [e^{i k (r+ct)} - e^{i k (r-ct)}]$$

$$\delta(r+ct) - \delta(r-ct)$$

$$D_{\text{ret}}(r, t) = -\frac{c}{r} \Theta(t) \delta(r+ct) + \frac{c}{r} \Theta(t) \delta(r-ct)$$

$$D_{\text{ret}}(r, t) = \frac{\delta(t - \frac{r}{c})}{r} \quad \delta(r-ct) = \frac{\delta(t - \frac{r}{c})}{c}$$

zu Gl. (42a,b): Setzt man diese Ausdrücke in

die $\vec{A}(\vec{r},t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi(\vec{r},t)}{\partial t}$ ein, so erhält man nach

geeigneten Umformungen, einer partiellen Integration bzw.

Anwendung des Gaußschen Satzes sowie ^{Benützung} der zeitlich

und räumlich asymptotischen Eigenschaften von D_{ret}

schließlich

$$\text{div } \vec{A}_{ret}(\vec{r},t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi_{ret}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

$$= \int d^3r' \int dt' D_{ret}(\vec{r}-\vec{r}', t-t') \left[\text{div}' \vec{j}(\vec{r}',t') + \frac{\partial \rho(\vec{r}',t')}{\partial t'} \right] = 0$$

$$0, \forall \vec{r}', t'$$

(Kontinuitätsgleichung)

Da \vec{A}_{ret} , ϕ_{ret} also neben den Dgl. (16a,b) auch

die Nebenbedingung (15) erfüllen, stellen sie ^{in Lorenzgleichung}

Partikulärlösungen der FG für die Potentiale dar.

zu den Abschnitten II.4.A und II.4.B

Umformungen zur Berechnung von $\vec{j} \cdot \vec{E}$ (siehe oberhalb von Gl. (45))

bzw. von $\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$ Gl. (51)

$$\begin{array}{l}
 \vec{E} \cdot \left. \begin{array}{l} \vec{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{0} = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{E} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right\} \vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{c}{4\pi} \underbrace{(\vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{B})}_{\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{B})} \\
 \\
 \vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)}_{=: \omega_{em}} - \operatorname{div} \underbrace{\frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})}_{=: \vec{S}} \quad -\frac{1}{4\pi} \underbrace{(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t})}_{\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)}
 \end{array}$$

Zusammenfassung:

elm. Energiedichte (Feldenergiedichte) im Vakuum

$$\omega_{em}(\vec{r}, t) := \frac{1}{8\pi} [\vec{E}^2(\vec{r}, t) + \vec{B}^2(\vec{r}, t)] \quad (46)$$

elm. Energiestromdichte (Poyntingvektor[†]) im Vakuum

$$\vec{S}(\vec{r}, t) := \frac{c}{4\pi} [\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)] \quad (45)$$

[†]) eigentlich Vektorfeld

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E} \\ \vec{B} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \vec{E} \\ 0 = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \vec{B} \end{array} \right\} \rho \vec{E} = \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + \vec{B} \operatorname{div} \vec{B})$$

Maxwellgl. (4c), (4d):

$$\left. \begin{array}{l} \vec{J} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{0} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right\} \vec{J} \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi} (\operatorname{rot} \vec{E} \times \vec{E} + \operatorname{rot} \vec{B} \times \vec{B}) - \frac{1}{4\pi c} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \times \vec{E} \right)$$

$$\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$$

$$= \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + \operatorname{rot} \vec{E} \times \vec{E} + \vec{B} \operatorname{div} \vec{B} + \operatorname{rot} \vec{B} \times \vec{B})$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} + \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B})$$

$$- \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi c} (\vec{E} \times \vec{B})$$

Formel (Beweis später):

$$(\vec{a} \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{rot} \vec{a} \times \vec{a})_k$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i a_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} a^2)$$

$$(\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B})_k = - \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\frac{1}{4\pi c} (\vec{E} \times \vec{B})_k}_{=: g_k} + \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\frac{1}{4\pi} [E_i E_k + B_i B_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)]}_{=: T_{ik}} \quad (51)$$

Zusammenfassung:

elm. Impulsdichte (Feldimpulsdichte) im Vakuum

$$\vec{g}_{em}(\vec{r}, t) := \frac{1}{4\pi c} [\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)] = \frac{\vec{S}(\vec{r}, t)}{c^2} \quad (53)$$

Maxwellscher Spannungstensor (= - elm. Impulsstromdichte) im Vakuum

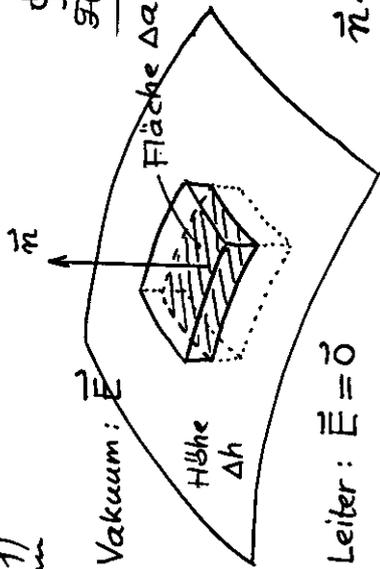
$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{T}(\vec{r}, t) &:= \frac{1}{4\pi} [\vec{E}(\vec{r}, t) \circ \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{B}(\vec{r}, t) \circ \vec{B}(\vec{r}, t) \\ &\quad - \frac{1}{2} \vec{1} (\vec{E}^2(\vec{r}, t) + \vec{B}^2(\vec{r}, t))] \\ &= \frac{1}{4\pi} [\vec{E}(\vec{r}, t) \circ \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{B}(\vec{r}, t) \circ \vec{B}(\vec{r}, t)] - \vec{1} \omega_{em}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

Fehlender Beweisschritt:

$$\begin{aligned}
 & (\vec{a} \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{rot} \vec{a} \times \vec{a})_k \\
 &= a_k \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \epsilon_{kij} \underbrace{(\operatorname{rot} \vec{a})_i}_{\epsilon_{ilm} \frac{\partial a_m}{\partial x_l}} a_j \\
 &= a_k \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \underbrace{(\delta_{je} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{ke})}_{a_j \frac{\partial a_k}{\partial x_j} - a_j \frac{\partial a_j}{\partial x_k}} \frac{\partial a_m}{\partial x_e} a_j
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\vec{a} \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{rot} \vec{a} \times \vec{a})_k \\
 &= a_k \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \underbrace{a_j \frac{\partial a_k}{\partial x_j}}_{a_i \frac{\partial a_k}{\partial x_i}} - \underbrace{a_j \frac{\partial a_j}{\partial x_k}}_{\delta_{ik} a_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i}} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i a_k) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} \delta_{ik} \vec{a}^2 \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_i a_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \vec{a}^2 \right) \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$\oint_{S(\sigma)} d\vec{f} \cdot \vec{E} = 4\pi \int_V d^3r \rho$$



Bis auf höhere Ordnungen in $\Delta a, \Delta h$ gilt:

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot (\vec{E} - \vec{0}) \Delta a \\ + \frac{\Delta h}{2} \\ = 4\pi \int_{-\frac{\Delta h}{2}}^{+\frac{\Delta h}{2}} \rho dh \cdot \Delta a \end{aligned}$$

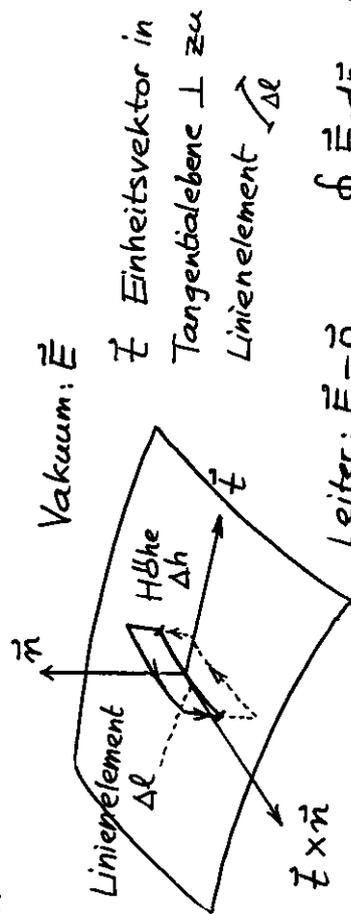
$\Delta a \rightarrow 0, \Delta h \rightarrow 0$:

$$\vec{n} \cdot \vec{E} \equiv E_n = 4\pi\sigma + \frac{\Delta h}{2}$$

mit
$$\sigma = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{-\frac{\Delta h}{2}}^{+\frac{\Delta h}{2}} \rho dh$$

(Physikalisch: $\int \rho dh$ über dünne Oberflächenschicht)

2)



Bis auf höhere Ordnungen in $\Delta l, \Delta h$ gilt:
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{f} = 0$$

$$(\vec{E} \times \vec{n}) \cdot (\vec{E} - \vec{0}) \Delta l = 0$$

$$(\vec{E} \times \vec{n}) \cdot \vec{E} = (\vec{n} \times \vec{E}) \cdot \vec{E} = 0$$

muss für beliebige Linienelemente durch den Flächenpunkt, also für beliebiges \vec{E} , gelten

$$\Rightarrow \vec{n} \times \vec{E} = \vec{n} \times \vec{E}_{tg} = \vec{0}$$

bzw.
$$\vec{E}_{tg} = \vec{0}$$
 •

zu Abschnitt III.2.C

zu Gl. (40):

Beweis von

$$\vec{I}(\vec{r}') \equiv \frac{3}{4\pi R^3} \oint_{r=R} d^2\vec{f} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \begin{cases} \frac{r'}{r'^3} & \text{für } r' \geq R \\ \frac{r'}{R^3} & \text{für } r' \leq R \end{cases}$$

\vec{r}' ist für die Integration fest, für Integration wird $\frac{\vec{r}'}{r'} = \vec{e}_z$ gewählt (Wahl der z-Achse):

$$\vec{I}(\vec{r}') = \frac{3}{4\pi R^3} R^2 \int_{[4\pi]} d\Omega (\cancel{\sin\vartheta \cos\varphi \vec{e}_x} + \cancel{\sin\vartheta \sin\varphi \vec{e}_y} + \overbrace{\cos\vartheta}^{P_1(\cos\vartheta)} \vec{e}_z) \underbrace{\frac{1}{|\vec{r}-r'\vec{e}_z|}}_{\frac{r'}{r'}}$$

φ -Integral null

$$\vec{I}(\vec{r}') = \frac{3}{2R} \frac{r'}{r'} \sum_{\ell} \int_{-1}^{+1} d\vartheta P_{\ell}(\vartheta) P_{\ell}(\vartheta) \cdot \begin{cases} \frac{R^{\ell}}{r'^{\ell+1}}, & r' > R \\ \frac{r'^{\ell}}{R^{\ell+1}}, & r' < R \end{cases}$$

$$\sum_{\ell} P_{\ell}(\cos\vartheta) \cdot \begin{cases} \frac{R^{\ell}}{r'^{\ell+1}}, & r' > R \\ \frac{r'^{\ell}}{R^{\ell+1}}, & r' < R \end{cases}$$

$$\vec{I}(\vec{r}') = \begin{cases} \frac{1}{R} \frac{r'}{r'} \frac{R}{r'^2}, & r' \geq R \\ \frac{1}{R} \frac{r'}{R} \frac{R}{R^2}, & r' \leq R \quad \checkmark \end{cases} \quad \frac{2}{3} \delta_{\ell 1}$$

zu Abschnitt III.3.B

zu Gl. (55):

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(C_{mn})} \begin{pmatrix} C_{22} & -C_{12} \\ -C_{21} & C_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow für $Q_1 = -Q_2 = Q$ folgt

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{1}{\det(C_{mn})} (C_{22} + C_{12} + C_{21} + C_{11}) Q \Rightarrow \text{Gl. (55)}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{1}{C}}$

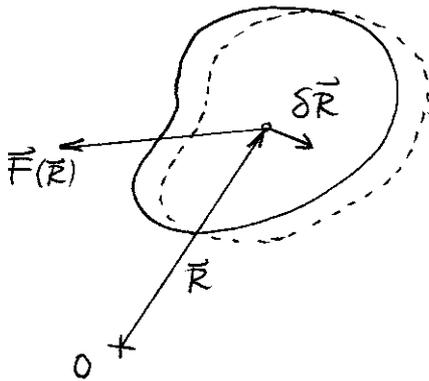
zu Abschnitt III.4. A

zu Gl. (67):

Energiebilanz bei Verschiebung einer statischen Ladungsverteilung:

$$W(\vec{R}) = W^{WW}(\vec{R})$$

potentielle Energie der Ladungsverteilung
(mit Zentrum am Ort \vec{R}) = als Feldenergie
gespeicherte WW-Energie mit dem äußeren
Feld



$\vec{F}(\vec{R})$ Kraft auf diese Ladungsverteilung
im äußeren Feld

$$W(\vec{R}) + (-\vec{F}(\vec{R}) \cdot \delta\vec{R}) = W(\vec{R} + \delta\vec{R})$$

$$W(\vec{R}) - \vec{F}(\vec{R}) \cdot \delta\vec{R} = W(\vec{R}) + \delta\vec{R} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}} W(\vec{R})$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{F}(\vec{R}) = -\vec{\nabla}_{\vec{R}} W(\vec{R})}}$$

zu Abschnitt III.4. B

zu Gl. (70) bis (72):

$$\text{Mit } \vec{E} = |\vec{E}| \begin{pmatrix} \sin\vartheta \\ 0 \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \text{ folgt}$$

$$E_x^2 - \frac{1}{2} \vec{E}^2 = \vec{E}^2 \frac{1}{2} (2 \sin^2 \vartheta - 1)$$

$$E_y^2 - \frac{1}{2} \vec{E}^2 = -\frac{1}{2} \vec{E}^2 \quad -\cos 2\vartheta$$

$$E_z^2 - \frac{1}{2} \vec{E}^2 = \vec{E}^2 \frac{1}{2} (2 \cos^2 \vartheta - 1)$$

$\cos 2\vartheta$

$$E_x E_z = \vec{E}^2 \frac{1}{2} \sin 2\vartheta$$

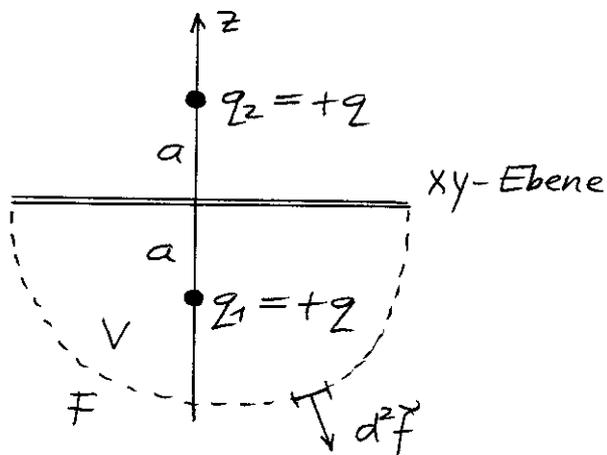
$$\vec{T} = \frac{\vec{E}^2}{8\pi} \begin{pmatrix} -\cos 2\vartheta & 0 & \sin 2\vartheta \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin 2\vartheta & 0 & \cos 2\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\vec{T} = \vec{e}_z \cdot \vec{T} = \frac{\vec{E}^2}{8\pi} \begin{pmatrix} -\cos 2\vartheta & 0 & \sin 2\vartheta \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin 2\vartheta & 0 & \cos 2\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

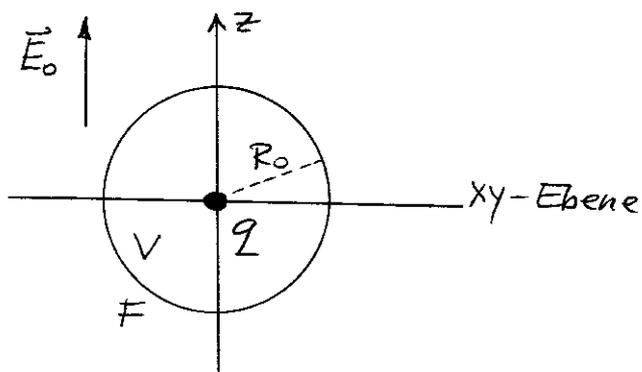
$$\vec{T} = \frac{\vec{E}^2}{8\pi} \begin{pmatrix} \sin 2\vartheta \\ 0 \\ \cos 2\vartheta \end{pmatrix}$$

Beispiele zum Selbstrechnen:

- 1) Kraft einer Punktladung q_2 auf eine Punktladung q_1
für den Fall $q_1 = q_2 = +q$



- 2) Kraft auf eine Punktladung im homogenen Feld \vec{E}_0



zu Abschnitt IV.1.A

zu Gl. (3) :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}) &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) = \operatorname{grad} \underbrace{\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r})}_{0 \text{ gew\u00e4hlt}} - \underbrace{\Delta \vec{A}(\vec{r})}_{\text{Eichung (2)}} \\ &= \underline{\underline{\frac{4\pi}{\epsilon} \vec{j}(\vec{r})}} \end{aligned}$$

zu Gl. (4) : (4) erf\u00fcllt die Eichbedingung, da

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r})}} &= \frac{1}{\epsilon} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{-\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}} \\ &= -\frac{1}{\epsilon} \int d^3r' \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) + \frac{1}{\epsilon} \int d^3r' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \underbrace{\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}')}_{\text{(II.5): } 0} \\ &= \text{(Gau\u00df)} = -\frac{1}{\epsilon} \oint d^2\vec{f}' \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \underline{\underline{0}} \text{ gilt.} \end{aligned}$$

zu Gl. (6), (7) :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\vec{B}(\vec{r})}} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon} \int d^3r' \vec{\nabla} \times \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\ &= -\frac{1}{\epsilon} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \times \underbrace{\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{-\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}} = \underline{\underline{\frac{1}{\epsilon} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}}} \end{aligned}$$

Zu Abschnitt IV. 1. B

Zu Gl. (11a):

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} (j_i(\vec{r}') x'_k) = \underbrace{\frac{\partial j_i(\vec{r}')}{\partial x'_i}}_0 x'_k + j_i(\vec{r}') \delta_{ik} = \underline{j_k(\vec{r}')}$$

0 (Kontinuitätsgl. (10))

zu Gl. (11b):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'_i} (j_i(\vec{r}') x'_l x'_l x'_k) &= \underbrace{\frac{\partial j_i(\vec{r}')}{\partial x'_i}}_0 x'_l x'_l x'_k + j_i(\vec{r}') x'_l \delta_{il} x'_k \\ &\quad + j_i(\vec{r}') x'_l x'_l \delta_{ik} \\ &= \underline{(\vec{r}' \cdot \vec{j}(\vec{r}')) x'_k + (\vec{r}' \cdot \vec{r}') j_k(\vec{r}')} \end{aligned}$$

zu Gl. (17):

$$\vec{\nabla} \times (\vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3}) = \vec{m} (\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}) - (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{r}}{r^3}$$

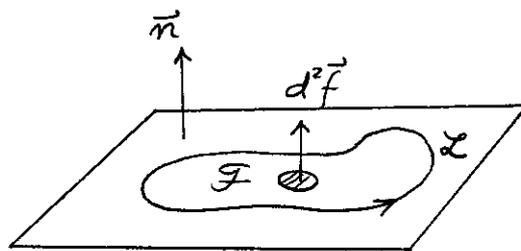
$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{x_i}{r^3} = \frac{1}{r^3} \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_i}}_3 + x_i \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r^3}}_{-3 \frac{x_i}{r^5}} = 0$$

$$\begin{aligned} [(\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{r}}{r^3}]_i &= m_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_i}{r^3} = m_j \frac{\delta_{ij}}{r^3} - m_j x_i \frac{3x_j}{r^5} \\ &= \frac{m_i}{r^3} - \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r}) x_i}{r^5} \end{aligned}$$

$$\underline{\vec{\nabla} \times (\vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3}) = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{m}}{r^5}}$$

Zu Gl. (18a,b): Zu zeigen ist

$$\frac{1}{2} \oint_{\mathcal{L}} (\vec{F} \times d\vec{r}) = \int_{\mathcal{F}} d^2\vec{f} = F\vec{n}$$



Beweis:

\mathcal{L} ebene Kurve = Rand von \mathcal{F} (\mathcal{F} Inhalt von \mathcal{F})

$$\frac{1}{2} \oint_{\mathcal{L}} (\vec{F} \times d\vec{r})_{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{L}} \varepsilon_{lmk} x_m dx_k$$

$$= \oint_{\mathcal{L}} dx_k \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{lmk} x_m \right) = (\text{Stokes; (I.11b)})$$

$$= \int_{\mathcal{F}} d^2f_i \varepsilon_{ijk} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{lmk} x_m \right)}_{\frac{1}{2} \varepsilon_{lmk} \delta_{jm}} = \int_{\mathcal{F}} d^2f_i \underbrace{\frac{1}{2} \varepsilon_{imk} \varepsilon_{lmk}}_{(\text{A.6a}): \delta_{il}}$$

$$= \int_{\mathcal{F}} d^2f_i$$

zu Abschnitt IV.2.A

zu Gl. (28):

$$\begin{aligned} \Delta (\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r})) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (x_k B_k) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(B_i + x_k \frac{\partial B_k}{\partial x_i} \right) \\ &= \underbrace{\frac{\partial B_i}{\partial x_i}}_0 + \underbrace{\frac{\partial B_i}{\partial x_i}}_0 + x_k \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} B_k = \vec{r} \cdot \Delta \vec{B}(\vec{r}) \\ &\quad (\text{div } \vec{B} = 0) \end{aligned}$$

$$\underline{\Delta \vec{B}(\vec{r}) = \underbrace{\text{grad div } \vec{B}(\vec{r})}_0 - \underbrace{\text{rot rot } \vec{B}(\vec{r})}_{\frac{4\pi}{\epsilon} \vec{j}(\vec{r})} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \text{rot } \vec{j}(\vec{r})}$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta (\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r})) = -\frac{4\pi}{\epsilon} \vec{r} \cdot \text{rot } \vec{j}(\vec{r})}$$

$$\begin{aligned} \underline{\vec{\nabla} \cdot (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}))} &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\epsilon_{ikl} x_k j_l) \\ &= \underbrace{\epsilon_{ikl} \delta_{ik} j_l}_0 + \underbrace{\epsilon_{ikl} x_k}_{-\epsilon_{kil}} \frac{\partial j_l}{\partial x_i} \\ &= -x_k \epsilon_{kil} \frac{\partial j_l}{\partial x_i} = \underline{-\vec{r} \cdot \text{rot } \vec{j}(\vec{r})} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta (\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r})) = \frac{4\pi}{\epsilon} \vec{\nabla} \cdot (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}))}$$

zu Abschnitt IV. 2. C

$$\begin{aligned} (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) \cdot \vec{\nabla} u(\vec{r}) &= -\vec{j}(\vec{r}) \cdot (\vec{r} \times \vec{\nabla}) u(\vec{r}) \\ &= -i \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{L} u(\vec{r}) \quad (= +i \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{L}^* u(\vec{r})) \end{aligned}$$

$$\text{mit } \vec{L} := -i(\vec{r} \times \vec{\nabla}), \quad \vec{L}^* = i(\vec{r} \times \vec{\nabla})$$

zu Abschnitt IV. 3. C

zu Gl. (53):

$$\text{Gl. (13) mit } \vec{r}' \rightarrow \vec{r}, \quad \vec{\nabla}' \rightarrow \vec{\nabla}, \quad \vec{r} \rightarrow \vec{a}$$

gibt die folgende Formel:

$$\underline{(\vec{r} \cdot \vec{a}) \vec{j}(\vec{r}) = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) \times \vec{a} + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r})) (\vec{r} \cdot \vec{a}) \vec{r}} \quad (F)$$

Dabei steht \vec{a} für einen beliebigen von \vec{r} unabhängigen Vektor oder Vektoroperator.

Setzt man in (F) $\vec{a} \rightarrow \vec{\nabla}_R$, so erhält man Gl. (53).

zu Gl. (54):

$$\begin{aligned} \underline{[(\vec{r} \times \vec{j}(F)) \times \vec{\nabla}_R] \cdot \vec{A}(\vec{R})} &= \underbrace{\varepsilon_{ikl}}_{\varepsilon_{kli}} (\vec{r} \times \vec{j}(F))_k \frac{\partial A_i(\vec{R})}{\partial R_l} \\ &= (\vec{r} \times \vec{j}(F))_k \varepsilon_{kli} \frac{\partial A_i(\vec{R})}{\partial R_l} \\ &= (\vec{r} \times \vec{j}(F)) \cdot (\vec{\nabla}_R \times \vec{A}(\vec{R})) = (\vec{r} \times \vec{j}(F)) \cdot \vec{B}(\vec{R}) \end{aligned}$$

zu Abschnitt IV.4.A

Zur Rechnung zwischen Gl. (60) und Gl. (61):

1) $\int d^3r (\vec{r} \cdot \vec{j}(F)) = 0$, da

$$\begin{aligned} \underline{(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(F)) \frac{1}{2} r^2} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} r^2 j_i(F) \right) \\ &= \cancel{\frac{x_i}{r}} j_i + \frac{1}{2} r^2 \underbrace{\frac{\partial j_i}{\partial x_i}}_{(10): 0} = \underline{\vec{r} \cdot \vec{j}(F)} \end{aligned}$$

2) Formel (F) von Seite IV-4 mit $\vec{a} \rightarrow \vec{B}(\vec{R})$ angewendet.

zu Abschnitt V.3.A

$$\underline{\omega_{em}(\vec{r}, t) = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2(\vec{r}, t) + \vec{B}^2(\vec{r}, t)) = \frac{\vec{E}^2(\vec{r}, t)}{4\pi}}$$

$$\underline{\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{c}{4\pi} (\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)) = \frac{\vec{E}^2(\vec{r}, t)}{4\pi} c \vec{n} = \omega_{em}(\vec{r}, t) c \vec{n}}$$

$\vec{n} \times \vec{E}(\vec{r}, t), \vec{n} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$

mit

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{E}_0^* e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{E}^2(\vec{r}, t) = \vec{E}_0^2 e^{2i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \underbrace{\vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0}_{\equiv |\vec{E}_0|^2 \text{ bezeichnet}} + \text{c.c.}$$

$$\underline{\vec{E}^2(\vec{r}, t) = |\vec{E}_0|^2 + \vec{E}_0^2 e^{2i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.}}$$

zu Abschnitt V.3.B

Beachte, dass alle für $\vec{n} \cdot \vec{r} = d$ genommenen Feldgrößen für die ebene Welle mit Ausbreitungsrichtung \vec{n} nur mehr von t abhängen!

zu Gl. (32):

$$\begin{aligned}\vec{E}_{(1)}(\vec{r}, t) &= E_{(1)} \vec{e}_{(1)} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.} \\ &= |E_{(1)}| \vec{e}_{(1)} \underbrace{\left(e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_{(1)})} + \text{c.c.} \right)}_{2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_{(1)})}\end{aligned}$$

$$\underline{\vec{E}_{(1)}^2(\vec{r}, t) = 4 |E_{(1)}|^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_{(1)})}$$

zu Gl. (33):

$$\begin{aligned}\vec{E}_{(+)}(\vec{r}, t) &= E_{(+)} \vec{e}_{(+)} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.} \\ &= |E_{(+)}| \left(e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_{(+)})} \vec{e}_{(+)} + \text{c.c.} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} |E_{(+)}| \left[e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_{(+)})} (\vec{e}_{(1)} + i \vec{e}_{(2)}) \right. \\ &\quad \left. + e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_{(+)})} (\vec{e}_{(1)} - i \vec{e}_{(2)}) \right] \\ &= \sqrt{2} |E_{(+)}| \left[\cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_{(+)}) \vec{e}_{(1)} \right. \\ &\quad \left. - \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_{(+)}) \vec{e}_{(2)} \right]\end{aligned}$$

$$\underline{\vec{E}_{(+)}^2(\vec{r}, t) = 2 |E_{(+)}|^2}$$

zu Abschnitt V.4.C

zum letzten Teil des Abschnittes unterhalb von Gl. (47):

Aus den Gln. (35) bis (37) folgt mit $\vec{E}_e \equiv \vec{0}$, $\vec{B}_e \equiv \vec{0}$
und $k = \frac{\omega}{c}$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_t \cdot \vec{E}_t(x,y) &= 0 \\ \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t(x,y) &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$\text{RB: } \vec{E}_{tg} = \vec{0} \text{ auf } C$$

$$\vec{B}_t(x,y) = \vec{e}_z \times \vec{E}_t(x,y)$$

$$\vec{\nabla}_t \cdot \vec{B}_t(x,y) = 0$$

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{B}_t(x,y) = \vec{0}$$

$$\text{RB: } B_n = 0 \text{ auf } C$$

$$-\vec{E}_t(x,y) = \vec{e}_z \times \vec{B}_t(x,y)$$

Es ist offensichtlich, daß die nicht "gerahmten" Gln. (inkl. RB) erfüllt sind, wenn die "gerahmten" erfüllt sind.

Aus den FG für $\vec{E}_t(x,y)$ und der zugehörigen RB folgt:

TEM-Wellen können nur bei mehrfach zusammenhängenden Querschnitten existieren.

$$\text{Beweis: } \vec{E}_t(x,y) = -\vec{\nabla}_t \phi(x,y) \text{ in } F$$

$$\Delta_t \phi(x,y) = 0 \text{ in } F$$

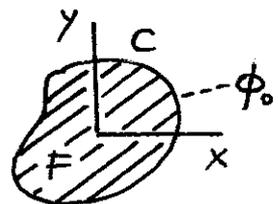
ϕ regulär in F

$$\phi(x,y) = \text{konstant auf } C$$

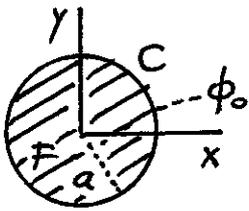
Querschnitt F einfach zusammenhängend:

$$\phi(x,y) = \phi_0 \text{ in } F \Rightarrow \vec{E}_t(x,y) \equiv \vec{0} \text{ in } F$$

(damit auch $\vec{B}_t \equiv \vec{0}$)



z.B. Kreisquerschnitt



Lösungsbasis für die Entwicklung von

$\phi(\rho, \varphi)$ (ρ, φ Polarkoordinaten):

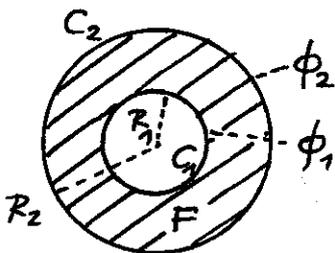
Konstante, $\ln \rho$

$\rho^m \cos m\varphi, \rho^m \sin m\varphi$ $m=1,2,3,\dots$

$\frac{1}{\rho^m} \cos m\varphi, \frac{1}{\rho^m} \sin m\varphi$

Wegen der RB $\phi(a, \varphi) = \phi_0, \forall \varphi$, und der Regularitätsforderung für $\rho < a$ "bleibt" nur die Konstante, also folgt $\phi(\rho, \varphi) = \phi_0$ in F.

Dagegen: Kreisringquerschnitt (Koaxial-Wellenleiter)



Hier $\ln \rho$ "zulässig"!

$$\phi(\rho, \varphi) = A \ln \rho + B$$

$$A = \frac{\phi_2 - \phi_1}{\ln R_2 - \ln R_1}, \quad B = \frac{\phi_1 \ln R_2 - \phi_2 \ln R_1}{\ln R_2 - \ln R_1}$$

(A, B durch RB $\phi(R_j, \varphi) = \phi_j, j=1,2$, bestimmt)

$\Rightarrow \vec{E}_t(x, y) \neq 0$ (selbst ausrechnen...)

Feldamplitude proportional zu $\phi_2 - \phi_1$ (B bedeutungslos).

zu Abschnitt V.4.D

zu den TM-Wellen:

Hat man die longitudinale Komponente $E_z^{(n)}(x, y)$

zur Mode n gefunden, so findet man die

zugehörigen transversalen Komponenten $\vec{E}_t^{(n)}(x, y)$,

$\vec{B}_t^{(n)}(x, y)$ aus den Gln. (43a, b):

$$\vec{E}_t^{(n)}(x,y) = \frac{ik^{(n)} \vec{\nabla}_t E_z^{(n)}(x,y)}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^{(n)2}}$$

$$\vec{B}_t^{(n)}(x,y) = -i \frac{\omega}{c} \frac{\vec{\nabla}_t E_z^{(n)}(x,y) \times \vec{e}_z}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^{(n)2}}$$

Man setzt dann

$$\vec{E}^{(n)}(x,y) = \vec{E}_t^{(n)}(x,y) + E_z^{(n)}(x,y) \vec{e}_z$$

$$\vec{B}^{(n)}(x,y) = \vec{B}_t^{(n)}(x,y)$$

Zusammen mit $k = k^{(n)}$ in Gl. (42a,b) ein und erhält $\vec{E}^{(n)}(\vec{r},t)$, $\vec{B}^{(n)}(\vec{r},t)$ für die Mode n .

zu Abschnitt VI.1.C

Ergänzung: Berechnung des Magnetfeldes *)

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \underbrace{(\vec{\beta}_0 \phi(\vec{r}, t))}_{\vec{A}(\vec{r}, t)} \\ &= \vec{\beta}_0 \times (-\text{grad} \phi(\vec{r}, t))\end{aligned}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\text{grad} \phi(\vec{r}, t) - \underbrace{\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}}_{\propto \vec{\beta}_0}$$

$$\Rightarrow \vec{\beta}_0 \times \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{\beta}_0 \times (-\text{grad} \phi(\vec{r}, t))$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\beta}_0 \times \vec{E}(\vec{r}, t)}$$

zu Abschnitt VI.2.A

zu Gl. (34):

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \left(\vec{\nabla} \times \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \\ &= -\frac{1}{c} \int d^3r' \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times \dot{\vec{j}}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{c |\vec{r} - \vec{r}'|^2} \\ &= -\frac{1}{c} \int d^3r' \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\end{aligned}$$

$$\text{mit } \dot{\vec{a}}(\vec{r}, t) := \frac{\partial \vec{a}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

*) Im Skriptum ist die konstante Teilchengeschwindigkeit mit \vec{v} bezeichnet ($\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$), hier heißt sie \vec{v}_0 ($\vec{\beta}_0 = \frac{\vec{v}_0}{c}$).

Mit
$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r} + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

folgt

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = -\frac{\vec{r}}{c^2 r^2} \times \int d^3 r' \dot{\vec{j}}(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{cr}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$=: \vec{B}_s(\vec{r}, t)$

Zur Berechnung von \vec{E}_s gl. (38) (Beachte: $\vec{q}(\vec{r}, t) = \vec{q}(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r})$.)

$$(\text{rot } \vec{B}_s)_i = \left[\vec{\nabla} \times \frac{\ddot{\vec{q}}(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}) \times \vec{r}}{c^2 r^2} \right]_i$$

$$= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varepsilon_{klm} \frac{\ddot{q}_l(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}) x_m}{c^2 r^2} \right)$$

\downarrow Ableitung gibt $\frac{1}{r}$ -Term
 \downarrow Ableitung gibt $\frac{1}{r^2}$ -Term

$$= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \frac{x_m}{c^2 r^2} \frac{\partial}{\partial x_j} \ddot{q}_l(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\ddot{q}_l(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}) \left(-\frac{x_j}{cr}\right) + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$= \varepsilon_{ikj} \underbrace{\varepsilon_{klm} \ddot{q}_l x_m}_{(\ddot{\vec{q}} \times \vec{r})_k} \frac{x_j}{c^3 r^3} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$= \left(\frac{[\ddot{\vec{q}}(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}) \times \vec{r}] \times \vec{r}}{c^3 r^3} \right)_i + O\left(\frac{1}{r^2}\right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_s}{\partial t} \right)_i + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E}_s(\vec{r}, t) = \frac{[\ddot{\vec{q}}(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}) \times \vec{r}] \times \vec{r}}{c^2 r^3} = \vec{B}_s(\vec{r}, t) \times \frac{\vec{r}}{r}$$

zu Abschnitt VI.2.C

zu Gl. (47a): Analog wie bei Gl. (IV.11a)⁺⁾ , allerdings kommt ein Term mit $\dot{\rho}$ dazu, da in der Dynamik $\text{div } \vec{j}$ nicht null, sondern $-\dot{\rho}$ ist.

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} (j_i(\vec{r}', t_r) x'_k) = \underbrace{\frac{\partial j_i(\vec{r}', t_r)}{\partial x'_i}}_{-\dot{\rho}(\vec{r}', t_r) \text{ (Kontinuitätsgl.)}} x'_k + j_i(\vec{r}', t_r) \delta_{ik}$$

symbolisch:

$$\underline{\vec{j}(\vec{r}', t_r) = \dot{\rho}(\vec{r}', t_r) \vec{r} + (\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t_r)) \vec{r}'}$$

zu Gl. (47b): Analog wie bei Gl. (IV.13)⁺⁾ .

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\partial}{\partial x'_i} (j_i(\vec{r}', t_r) x'_l x'_e x'_k) &= \underbrace{\frac{\partial j_i(\vec{r}', t_r)}{\partial x'_i}}_{-\dot{\rho}(\vec{r}', t_r)} x'_l x'_e x'_k \\ &+ j_i(\vec{r}', t_r) x'_l \delta_{ie} x'_k + j_i(\vec{r}', t_r) x'_l x'_e \delta_{ik} \end{aligned}$$

symbolisch:

$$\underline{(\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}', t_r) = -(\vec{r} \cdot \vec{j}(\vec{r}', t_r)) \vec{r}' + \dot{\rho}(\vec{r}', t_r) (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{r}' + (\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t_r)) (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{r}'}$$

$$\underline{b) \quad (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}', t_r) = (\vec{r} \cdot \vec{j}(\vec{r}', t_r)) \vec{r}' + (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}', t_r)) \times \vec{r}}$$

a) + b)

$$\underline{(\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}', t_r) = \frac{1}{2} (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}', t_r)) \times \vec{r} + \frac{1}{2} \dot{\rho}(\vec{r}', t_r) (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{r}' + \frac{1}{2} (\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t_r)) (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{r}'}$$

Ableitung nach t gibt dann Gl. (47b).

Ergänzung zu Abschnitt VI. 2. D

Auf Seite VI-1, VI-2 wurde bewiesen, daß aus

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}, t) = \text{rot } \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = -\frac{\vec{r}}{c^2 r^2} \times \underbrace{\int d^3r' \dot{\vec{j}}(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{cr})}_{\vec{B}_s(\vec{r}, t)} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

folgt. Hier haben wir analog

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{Z}(\vec{r}, t) = \text{rot } \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\dot{\vec{P}}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

woraus daher

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = -\frac{\vec{r}}{c^2 r^2} \times \underbrace{\int d^3r' \dot{\vec{P}}(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{cr})}_{\vec{B}_s(\vec{r}, t)} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

folgt.

$$\begin{aligned} \text{Mit } \vec{Z}(\vec{r}, t) &= \int d^3r' \frac{\vec{P}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{1}{r} \int d^3r' \vec{P}(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{cr}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \end{aligned}$$

ergibt sich dann

$$\vec{Z}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{q}\left(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}\right)}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Aus dem $\frac{1}{r}$ -Anteil von $\vec{Z}(\vec{r}, t)$ in der Entwicklung nach Potenzen von $\frac{1}{r}$ kann man daher $\vec{q}\left(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}\right)$ ablesen und damit \vec{B}_s, \vec{E}_s und $\frac{dP}{d\Omega}$ berechnen.

Zu Abschnitt VI. 2. E

zu Gl. (65):

$$\ddot{\vec{q}}\left(t_r, \frac{\vec{r}}{r}\right) = -qa\vec{e} + \dots, \quad 0 < t_r < T$$

Dipolnäherung)

$$\left(\ddot{\vec{q}}(t_r) \times \frac{\vec{r}}{r}\right)^2 = q^2 a^2 \sin^2 \mathcal{D}, \quad 0 < t_r < T$$

(\mathcal{D} Winkel zwischen \vec{e} und $\frac{\vec{r}}{r}$)

Wählt man für die Winkelintegration die Richtung von \vec{e} als z-Richtung, so folgt

$$\begin{aligned} P(t_r) &= \frac{1}{4\pi c^3} q^2 a^2 \int_{[4\pi]} d\Omega \sin^2 \mathcal{D} = \frac{2q^2 a^2}{3c^3}, \quad 0 < t_r < T. \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{2\pi \cdot 2\left(1 - \frac{1}{3}\right)} \\ &= \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

Zur Anwendung der elektrischen Dipolnäherung:

Zeige selbst: 1) $\ddot{\vec{m}}(t_r) = \vec{0}$, 2) $\frac{1}{6c} \ddot{\vec{Q}}(t_r, \frac{\vec{r}}{r})$ ist um die Ordnung $\frac{v_0}{c}$ kleiner als $\ddot{\vec{p}}(t_r)$.

zu Abschnitt VI.3.A

zu Gl. (75): Anstelle der im Skriptum angeschriebenen Beziehung gehört

$$\vec{q}(t_r, \frac{\vec{r}}{r}) = \ddot{\vec{p}}(t_r) + \ddot{\vec{m}}(t_r) \times \frac{\vec{r}}{r} + \frac{1}{6c} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \ddot{\vec{Q}}(t_r) + \dots$$

ODER

$$\vec{q}(t_r, \frac{\vec{r}}{r}) = e^{-i\omega t_r} \left[\ddot{\vec{p}} + \ddot{\vec{m}} \times \frac{\vec{r}}{r} - \frac{ik}{6} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \ddot{\vec{Q}} + \dots \right]$$

+ c.c.

mit $\ddot{\vec{p}}$, $\ddot{\vec{m}}$, $\ddot{\vec{Q}}$ gemäß Gl. (76), (83) und (90) oder (93).

(Gl. (90) bzw. (93) liefern zwar verschiedene $\ddot{\vec{q}}$, aber gleiches $\ddot{\vec{q}} \times \frac{\vec{r}}{r}$ und daher gleiches $\vec{B}_s, \vec{E}_s, \frac{dP}{d\Omega}$.)

zu Abschnitt VI.3.B

Für einen in der festen Raumrichtung \vec{e} "schwingenden" elektrischen Dipol gilt

$$\ddot{\vec{p}}(t) = p(t) \vec{e} = p_0 \cos(\omega t - \delta) \vec{e} = \vec{p} e^{-i\omega t} + c.c.,$$

$$|2\vec{p}|^2 = p_0^2.$$

Für Gl. (81) wurde speziell $\vec{e} = \vec{e}_z$ gewählt.

Die folgende Bemerkung 1 bezieht sich auf den allgemeinen schwingenden elektrischen Dipol (\vec{e} allgemein).

Bemerkung 1: Die Komponenten p_x, p_y, p_z des komplexen Vektors \vec{p} besitzen dann Phasendifferenzen 0 oder π .

Bemerkung 2: Ein Beispiel eines elektrischen Dipols, dessen Moment $\vec{p}(t)$ im Laufe der Zeit die Richtung ändert, wäre ein in der xy -Ebene rotierender Dipol. In diesem Fall wäre $p_z = 0$ und die Phasendifferenz von p_x, p_y wäre $\frac{\pi}{2}$. In diesem Fall gilt $\langle \frac{dP}{d\Omega} \rangle \propto (1 + \cos^2\vartheta)$.

Bemerkung 3: Die aus Gl. (81) durch Winkelintegration erhaltene Formel (82) für $\langle P \rangle$ gilt für beliebige elektrische Dipole, d.h. bei beliebigen Phasenbeziehungen zwischen p_x, p_y, p_z . (Gl. (82) lässt sich also aus Gl. (80) bei beliebigem \vec{p} ableiten.)

zu Abschnitt VI. 3. D

Rechnung zu Gl. (96):

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{Q} = \begin{pmatrix} Q_{xx} \frac{x}{r} \\ Q_{yy} \frac{y}{r} \\ Q_{zz} \frac{z}{r} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{Q} \times \frac{\vec{r}}{r} = \begin{pmatrix} (Q_{yy} - Q_{zz}) \frac{yz}{r^2} \\ (Q_{zz} - Q_{xx}) \frac{zx}{r^2} \\ (Q_{xx} - Q_{yy}) \frac{xy}{r^2} \end{pmatrix}$$

$$\left| \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{Q} \times \frac{\vec{r}}{r} \right|^2 = |Q_{yy} - Q_{zz}|^2 \frac{y^2 z^2}{r^4} + \text{zyklisch}$$

Zu Gl. (97):

Alle Winkelintegrale besitzen den Wert $\frac{4\pi}{15}$, somit

folgt

$$\langle P \rangle = \frac{ck^6}{360} \frac{4}{3} \left\{ |Q_{zz} - Q_{xx}|^2 + |Q_{yy} - Q_{zz}|^2 + |Q_{xx} - Q_{yy}|^2 \right\}$$

Diese Formel sowie Gl. (96) gelten unabhängig davon, ob man \vec{Q} gemäß Gl. (90) oder gemäß Gl. (93) definiert. Verwendet man die Definition von Gl. (93), so kann man den Ausdruck für $\langle P \rangle$ wegen $Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0$ noch umformen und Gl. (97) erhalten.

Bemerkung: Gl. (96) und (97) gelten nur für einen

"schwingenden" elektrischen Quadrupol (Hauptachsenrichtungen von $\vec{Q}(t)$ zeitunabhängig), für Gl. (96) ist außerdem vorausgesetzt, dass die Koordinatenachsen mit den Hauptachsenrichtungen zusammenfallen.

Für einen allgemeinen elektrischen Quadrupol muss man Gl. (95) verwenden, aus der (s. Jackson)

$$\langle P \rangle = \frac{ck^6}{360} \sum_{ij} |2Q_{ij}|^2$$

folgt, sofern die Definition von \vec{Q} gemäß Gl. (93) verwendet wird.

Beispiel zu Gl. (96):

Bzgl. der z-Achse rotations-symmetrischer "schwingender"
elektrischer Quadrupol (im Hauptachsensystem)

Definition von \hat{Q} mit $\text{Sp } \hat{Q} = 0$ verwendet:

Rotations-symmetrie $\Rightarrow Q_{xx} = Q_{yy} \Rightarrow$ mit

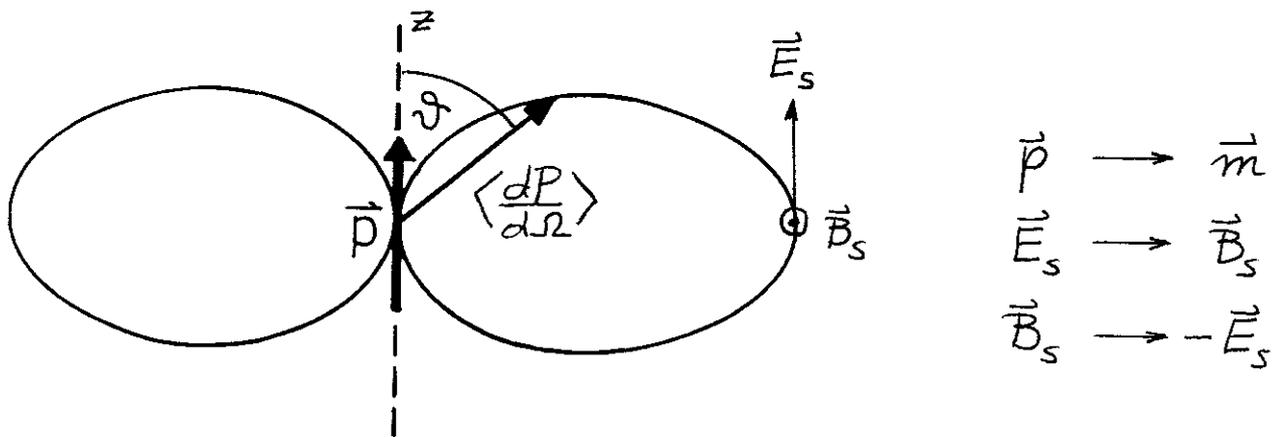
$$Q_{zz} =: Q \quad \text{folgt} \quad Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2}Q$$

und Gl. (96) ergibt

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle &= \frac{\kappa}{21\pi} \frac{k^6}{36} \left\{ \frac{9}{4} |Q|^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{4} |Q|^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi \right. \\ &\quad \left. + 0 \right\} \end{aligned}$$

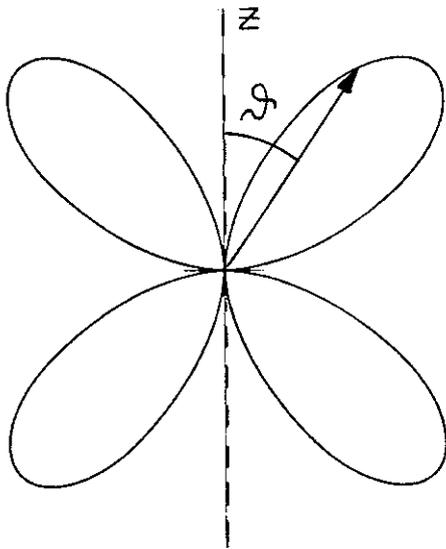
$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle(\vartheta) = \frac{\kappa k^6}{128\pi} |2Q|^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta$$

"Schwingender" elektrischer bzw. magnetischer Dipol



$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle \propto \sin^2 \vartheta$$

Rotationssymmetrischer "schwingender" elektrischer Quadrupol



$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle \propto \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta$$

zu Abschnitt VII.1. A

zu S. 104 letzter Absatz:

Da die Wellenfronten nicht ideal eben ^{sind} und die beim Fernrohr ankommenden Teilwellen nicht ganz parallel laufen, kommt es bei beliebigen Laufzeitdifferenzen (inkl. null) zur Ausbildung von Interferenzstreifen.

Da die Laufzeitdifferenz für verschiedene Stellungen der Apparatur aber verschieden groß ist, müßte es bei Drehung der Apparatur um 90° zu einer Verschiebung der Interferenzstreifen kommen. Eine solche Verschiebung wurde nicht beobachtet (s. Foto von Joos).

Rechnung dazu:

Laufzeitdifferenz für ursprüngl. Stellung der Apparatur (s. Gl. (2), (3)):

$$\Delta t_A = t_1 - t_2 = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Bei um 90° gedrehter Apparatur ($l_1 \leftrightarrow l_2$):

$$\Delta t_E = \bar{t}_1 - \bar{t}_2 = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{2l_2}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Mit $l_1 = l_2 \stackrel{=l}{}$ folgt, daß es zu einer Verschiebung um

$$n = \frac{c(\Delta t_A - \Delta t_E)}{\lambda} = \frac{4l}{\lambda} \left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \approx \frac{2l}{\lambda} \frac{v^2}{c^2} \quad \text{Streifen kommen müßte.}$$

G. Joos

Lehrbuch der Theoretischen Physik

Geest & Portig 1959

Das Resultat der Versuche von MICHELSON und MORLEY, die ungefähr unter den der obigen Rechnung zugrunde gelegten Bedingungen ausgeführt wurden, ergab das Fehlen einer solchen Streifenverschiebung. Als im Jahr 1925 D. MILLER von einem positiven Effekt, der einer Geschwindigkeit von 10 km/sec entsprach, berichtete, setzten an verschiedenen Orten Nachprüfungen ein. Im Zeiss-Werk zu Jena konnte Verf. mit sehr vollkommenen Hilfsmitteln nachweisen, daß ein positiver Effekt kleiner sein müßte als $\frac{1}{1000}$ Streifenbreite. Fig. 82a gibt die Registrierung des Interferenzstreifensystems wieder, die in der Weise erfolgte, daß senkrecht zu den Interferenzstreifen ein 0,2 mm breiter Spalt *Sp* angebracht war (vgl. Fig. 82b), vor dem während der Rotation des Apparates eine photographische Platte vorbeigeführt wurde. Würden die Interferenzstreifen sich bei der Drehung des Apparates verschieben, so müßte man beim Vorbeiführen der Platte eine Wellenlinie erhalten. Man sieht indes, daß die Streifen schnurgerade verlaufen. *Das Experiment hat also gegen unsere Analogie mit der Akustik, gegen die Existenz eines ruhenden Mediums der Lichtwellen, d. h. gegen die Existenz des Weltäthers oder absoluten Raums entschieden.*

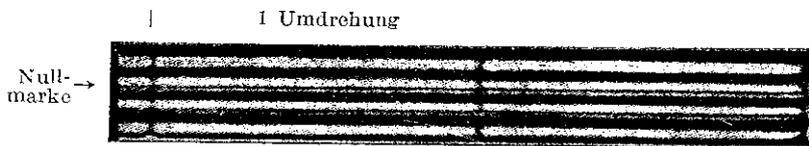


Fig. 82a. Registrierung von Interferenzstreifen während einer Rotation des MICHELSON-Apparates



Fig. 82b

TABLE 15-2

Theory		Light propagation experiments							Experiments from other fields					
		Aberration	Fizeau convection coefficient	Michelson-Morley	Kennedy-Thorndike	Moving sources and mirrors	De Sitter spectroscopic binaries	Michelson-Morley, using sunlight	Variation of mass with velocity	General mass-energy equivalence	Radiation from moving charges	Meson decay at high velocity	Trouton-Noble	Unipolar induction, using permanent magnet
Ether theories	Stationary ether, no contraction	A	A	D	D	A	A	D	D	N	A	N	D	D
	Stationary ether, Lorentz contraction	A	A	A	D	A	A	A	A	N	A	N	A	D
	Ether attached to ponderable bodies	D	D	A	A	A	A	A	D	N	N	N	A	N
Emission theories	Original source	A	A	A	A	A	D	D	N	N	D	N	N	N
	Ballistic	A	N	A	A	D	D	D	N	N	D	N	N	N
	New source	A	N	A	A	D	D	A	N	N	D	N	N	N
Special theory of relativity		A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A

Legend: A, the theory agrees with experimental results.
 D, the theory disagrees with experimental results.
 N, the theory is not applicable to the experiment.

TABLE 15-3

	Emission theory	Classical ether theory	Special theory of relativity
Reference system	No special reference system	Stationary ether is special reference system	No special reference system
Velocity dependence	The velocity of light depends on the motion of the source	The velocity of light is independent of the motion of the source	The velocity of light is independent of the motion
Space-time connection	Space and time are independent	Space and time are independent	Space and time are interdependent
Transformation equations	Inertial frames in relative motion are connected by a Galilean transformation	Inertial frames in relative motion are connected by a Galilean transformation	Inertial frames in relative motion are connected by a Lorentz transformation

zu Abschnitt VII.1.D

zu S. 106 Punkt 2:

Beweis: $S: n_1x + n_2y + n_3z + p = 0$

$S' \rightarrow S$: lineare Transformation (s. Punkt 1):

$$x = a_1x' + b_1y' + c_1z' + d_1t' + e_1$$

$$y = a_2x' + b_2y' + c_2z' + d_2t' + e_2$$

$$z = a_3x' + b_3y' + c_3z' + d_3t' + e_3$$

\Rightarrow

$$S': (n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3)x'$$

$$+ (n_1b_1 + n_2b_2 + n_3b_3)y'$$

$$+ (n_1c_1 + n_2c_2 + n_3c_3)z'$$

$$+ \underbrace{(n_1d_1 + n_2d_2 + n_3d_3)}_0 t'$$

$$0, \text{ falls } \vec{n} \cdot \vec{d} = 0$$

$$+ (n_1e_1 + n_2e_2 + n_3e_3) + p = 0$$

$$\text{mit } \vec{d} = (d_1, d_2, d_3),$$

wobei offensichtlich $\vec{d} \parallel \vec{v}$ sein muss

zu S. 106 Punkt 3:

Für diesen Punkt wurden Koordinatenursprünge und Zeitnullpunkte bzgl. S und S' stillschweigend so gewählt, daß $x = y = z = 0, t = 0$ auf $x' = y' = z' = 0, t' = 0$ abgebildet wird. Es werden also nur mehr homogene lineare Transformationen zugelassen.

Dann gilt der Satz: Folgt für eine lineare homogene Transformation, daß $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$

impliziert, dass $c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0$ gilt (und umgekehrt), so folgt $c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$.

Beweis: lineare homogene Transformation gibt

$$\begin{aligned} c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 &= A c^2 t^2 + B x^2 + C y^2 + D z^2 \\ &\quad + I c t x + J c t y + K c t z \\ &\quad + L y z + M z x + N x y \equiv P \end{aligned}$$

a) Notwendige Bedingungen dafür, dass P für jene reellen $ct > 0$, x, y, z null ist, für die $s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ null ist:

$$(ct, x, y, z) = (1, \pm 1, 0, 0)$$

$$\Rightarrow A + B \pm I = 0, \quad \underline{B = -A}, \quad \underline{I = 0}$$

Analog:

$$\underline{C = -A}, \quad \underline{J = 0}$$

$$\underline{D = -A}, \quad \underline{K = 0}$$

Damit ist man bei

$$P = A (c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2) + L y z + M z x + N x y$$

angelangt.

$$(ct, x, y, z) = (\sqrt{2}, 0, 1, 1) \Rightarrow \underline{L = 0}$$

analog:

$$\underline{M = 0}$$

$$\underline{N = 0}$$

$$\Rightarrow s'^2 = P = A s^2$$

$$b) s'^2 = A(|\vec{v}|) s^2, \quad \text{"Reziprozität": } s^2 = A(|\vec{v}'|) s'^2$$

↑
Isotropie!

$$\Rightarrow A^2(|\vec{v}|) = 1, \quad A(|\vec{v}|) = \pm 1$$

Grenzfall $|\vec{v}| \downarrow 0$: - ausgeschlossen

zu Gl. (5):

$$c^2 t'^2 - x'^2 = c^2 (Bt - Dx)^2 - A^2 (x - vt)^2 = c^2 t^2 - x^2$$

$$\Rightarrow B^2 - \frac{v^2}{c^2} A^2 = 1, \quad A^2 - \frac{c^2}{v} BD = 0, \quad A^2 - c^2 D^2 = 1$$

bew. mit $\beta := \frac{v}{c}$

$$\beta A^2 = cBD, \quad B^2 = 1 + \beta^2 A^2, \quad c^2 D^2 = A^2 - 1$$

$$\beta^2 A^4 = c^2 D^2 B^2 = (A^2 - 1)(1 + \beta^2 A^2)$$

$$0 = A^2(1 - \beta^2) - 1, \quad A = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$B^2 = 1 + \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = \frac{1}{1 - \beta^2}, \quad B = A,$$

$$\beta A = cD, \quad D = \frac{v}{c^2} A$$

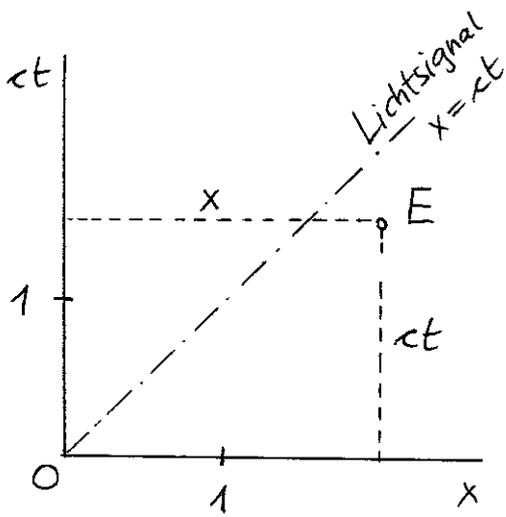
zu Abschnitt VII.2.A

zur geometrischen Veranschaulichung der Standard-LT
(Minkowskidiagramme)

Da der Begriff des Vierervektors im Skriptum erst in einem späteren Abschnitt eingeführt wird, wird hier eine zum Skriptum alternative Darstellung gegeben, bei der das Wort "Vektor" nicht vorkommt.

1. Schritt: ct- und x-Achse willkürlich senkrecht gezeichnet

Beachte: Solange wir im Minkowski-Raum keine Metrik eingeführt haben, sind Begriffe wie "senkrecht" im Minkowski-Raum noch nicht definiert! Senkrecht in unserer Zeichenebene muss daher auch nicht senkrecht im Minkowski-Raum bedeuten. Ferner eine Einheit der Länge (z.B. cm) gewählt.



$$E: S: (ct, x)$$

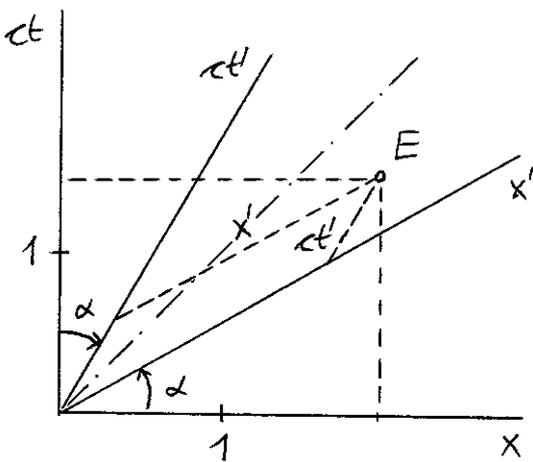
2. Schritt: Lage der ct' - und x' -Achse in diesem Diagramm

$$\underline{x'-Achse: ct' = 0}$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) = 0 \Rightarrow \underline{ct = \beta x} \quad \text{Gerade durch } 0 \text{ mit dem Anstieg } \beta$$

$$\underline{ct'-Achse: x' = 0}$$

$$x' = \gamma(x - vt) = 0 \Rightarrow \underline{ct = \frac{1}{\beta} x} \quad \text{Gerade durch } 0 \text{ mit dem Anstieg } \frac{1}{\beta}$$



$$E: S': (ct', x')$$

Man kann aber ct', x' erst angeben, wenn man die Einheiten auf der ct' - und x' -Achse kennt!

Beachte: Daß die ct' -Achse in der Zeichnung nicht auf der x' -Achse senkrecht steht, impliziert ebenfalls nichts bzgl. der Geometrie im Minkowski-Raum. ●

$$\alpha = \arctan \beta < \frac{\pi}{4}, \text{ da } \beta < 1$$

3. Schritt: Eichkurven für Ort und Zeit

(Einheiten auf x' - und ct' -Achse, aber auch auf allen entsprechenden Achsen beliebiger weiterer Inertialsysteme)

$$c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2$$

Einheit auf der positiven x' -Achse: $x' = 1, ct' = 0$

⇒ Schnitt des Hyperbelastes

$$\underline{x^2 - c^2t^2 = 1, x > 0} \quad \underline{\text{"Eichkurve für den Ort"}}$$

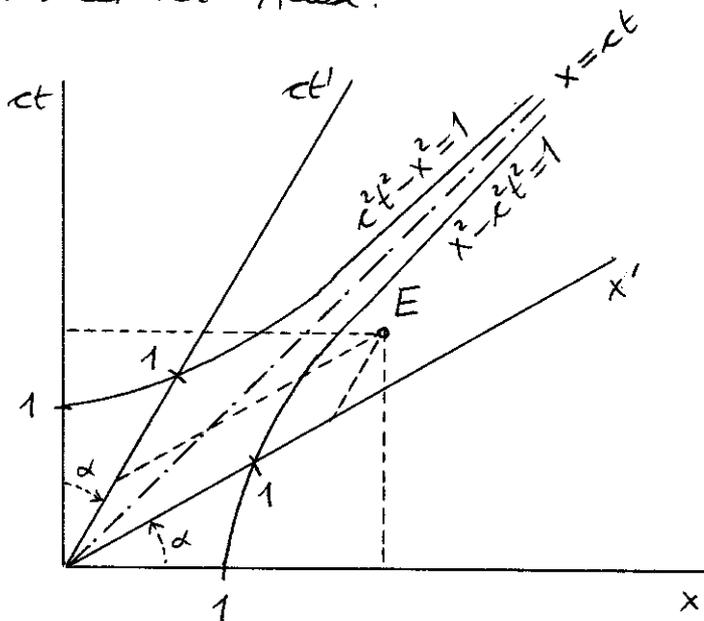
mit der x' -Achse.

Einheit auf der positiven ct' -Achse: $x' = 0, ct' = 1$

⇒ Schnitt des Hyperbelastes

$$\underline{c^2t^2 - x^2 = 1, ct > 0} \quad \underline{\text{"Eichkurve für die Zeit"}}$$

mit der ct' -Achse.



zu Abschnitt VII. 2.B

Ergänzungen, die das Verständnis erleichtern sollen.

Längendefinition (angewandt für Stab, sinngemäß für beliebiges Objekt)

Länge eines Stabes in einem Inertialsystem = räumlicher Abstand von Stabanfang und Stabende, und zwar einer bzgl. dieses Inertialsystems gleichzeitigen Lage von Anfang und Ende, gemessen in diesem Inertialsystem.

"Maßstab": Stab, welcher in seinem Ruhesystem seine Länge im Laufe der Zeit nur vernachlässigbar ändert.

Längenkontraktion von Maßstäben:

Fall 1: Maßstab ruht in S: $\Delta x = L_0$ Ruhlänge

$$\text{Länge in } S' : L' = \Delta x' \Big|_{\Delta t' = 0}$$

$$\text{Standard-LT: } \Delta x = \gamma(v) (\Delta x' + v \Delta t') \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{L' = \Delta x' \Big|_{\Delta t' = 0} = \frac{\Delta x}{\gamma(v)} = \frac{L_0}{\gamma(v)} < L_0}}$$

Fall 2: Maßstab ruht in S': $\Delta x' = L_0$ Ruhlänge

$$\text{Länge in } S : L = \Delta x \Big|_{\Delta t = 0}$$

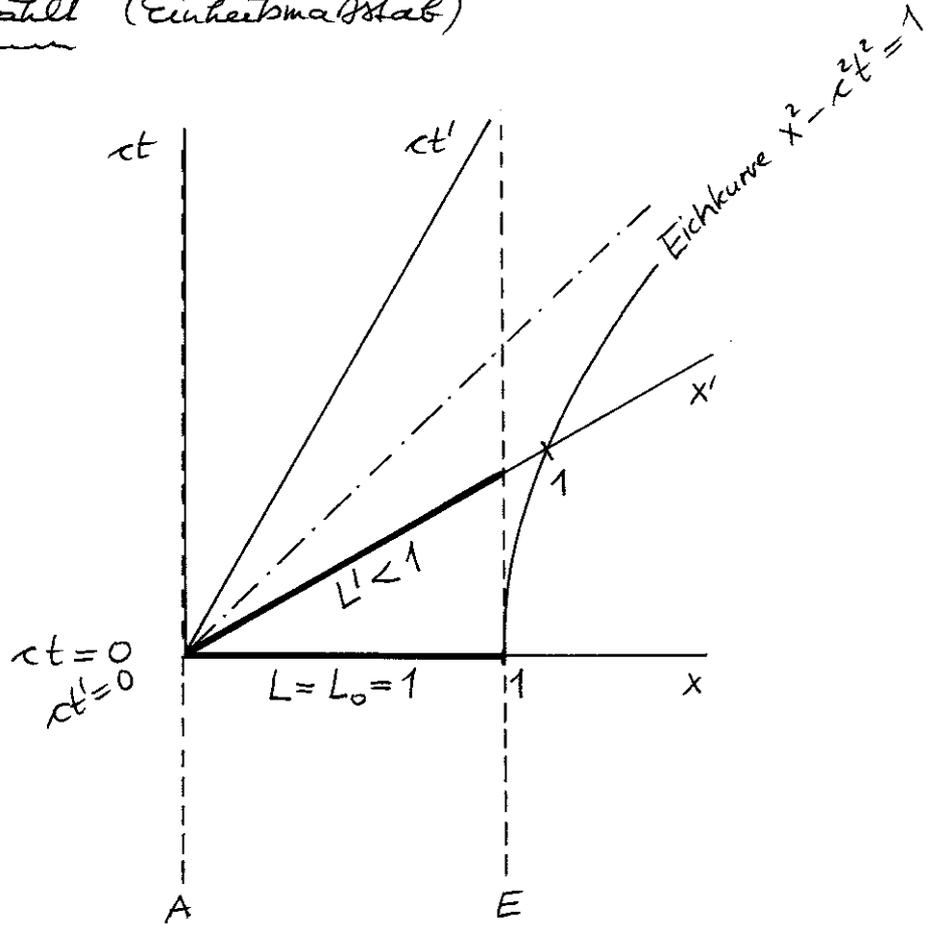
$$\text{Standard-LT: } \Delta x' = \gamma(v) (\Delta x - v \Delta t) \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{L = \Delta x \Big|_{\Delta t = 0} = \frac{\Delta x'}{\gamma(v)} = \frac{L_0}{\gamma(v)} < L_0}}$$

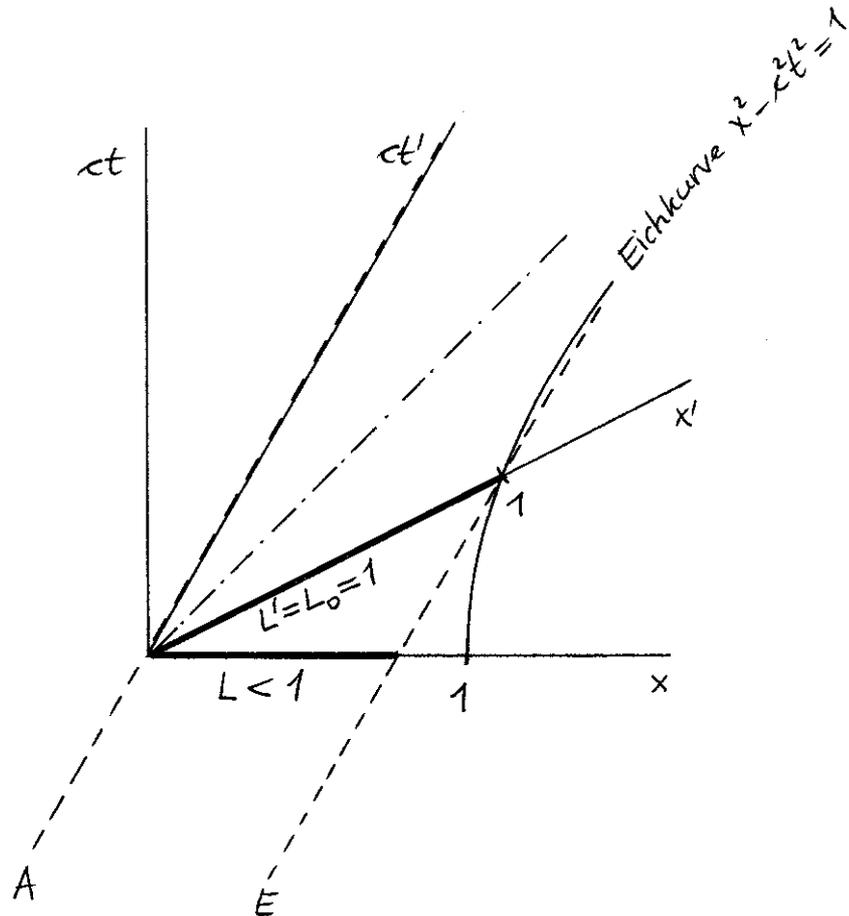
Minkowskidiagramme dazu:

$L_0 = 1$ gewählt (Einheitsmaßstab)

zu Fall 1:



zu Fall 2:



Zeitdilatation für Standarduhren

Fall 1: Uhr ruht in S : Δt = $\Delta \tau$ Eigenzeitintervall der Uhr

Zeitintervall $\Delta T'$, um das die (untereinander synchronisierten) Uhren von S' vorrücken, während die in S ruhende Uhr um $\Delta \tau$ vorrückt:

Standard-LT

$$\Delta t' = \gamma(v) \left(\Delta t - \frac{v \Delta x}{c} \right) \Rightarrow$$

$$\Delta T' = \Delta t' \Big|_{\Delta x=0} = \gamma(v) \Delta t = \gamma(v) \Delta \tau$$

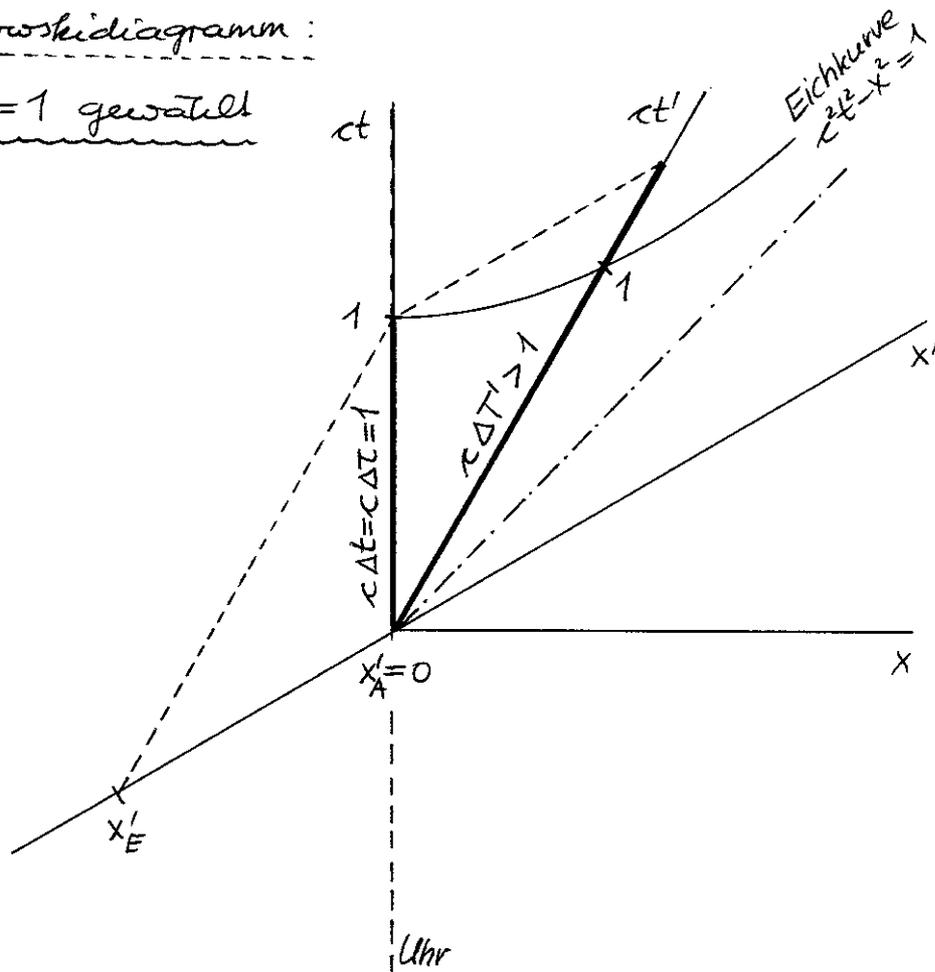
$$\underline{\underline{\Delta \tau = \frac{\Delta T'}{\gamma(v)} < \Delta T'}}$$

Beachte: $t_A = \tau_A$ und $t_E = \tau_E$, welche $\Delta t \Big|_{\Delta x=0} = \tau_E - \tau_A = \Delta \tau$ bestimmen, sind zwei aufeinanderfolgende Ablesungen an einer Uhr (der betrachteten, in S ruhenden Uhr).

$T'_A = t'_A$ und $T'_E = t'_E$, welche $\Delta t' \Big|_{\Delta x=0} = t'_E - t'_A = \Delta T'$ bestimmen, werden an zwei verschiedenen Uhren von S' abgelesen (welche allerdings untereinander synchronisiert sind); Orte dieser Uhren von S' : $x'_A, x'_E \neq x'_A$; s. Minkowskidiagramm). Messen der Zeitdilatation durch Vergleich von nur zwei Uhren ist nur möglich, wenn sich zumindest eine von ihnen beschleunigt bewegt, damit sich die Uhren trennen und wieder zusammenkommen können (s. später).

Minkowskidiagramm:

$c\Delta\tau = 1$ gewählt



Fall 2: Uhr ruht in S' : $\Delta t' = \Delta\tau$ Eigenzeitintervall der Uhr

Standard-LT

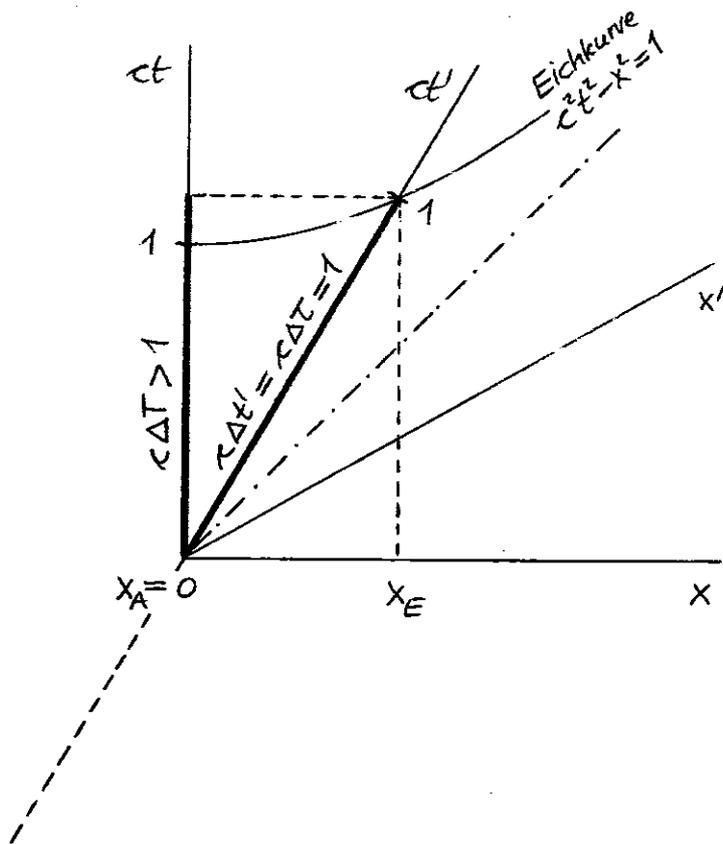
$$c\Delta t = \gamma(v) \left(c\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c} \right) \Rightarrow$$

$$\Delta T = \Delta t \Big|_{\Delta x' = 0} = \gamma(v) \Delta t' = \gamma(v) \Delta\tau$$

$$\underline{\underline{\Delta\tau = \frac{\Delta T}{\gamma(v)} < \Delta T}}$$

Minkowskidiagramm:

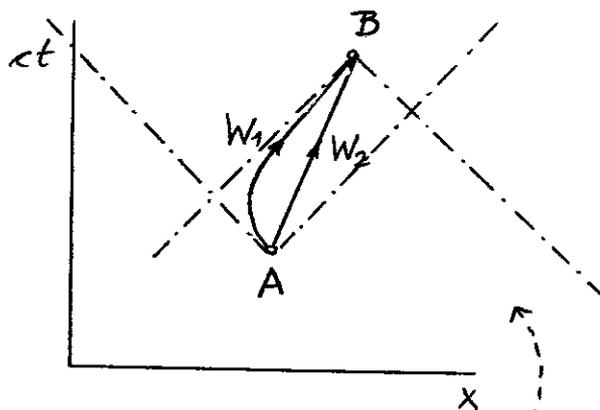
$c\Delta\tau = 1$ gewählt



Zu Abschnitt VIII.2.D

Ergänzung: Zeitdilatation zwischen zwei Standarduhren

(= beschleunigungsunempfindlichen Uhren), die sich an einem Ereignis A trennen und an einem Ereignis B wieder zusammenkommen ("Zwillingsproblem")



$$\Delta \tau_{AB}^{W_1} < \Delta \tau_{AB}^{W_2} \quad \text{im obigen Beispiel}$$

$$\Delta \tau_{AB}^{W_i} = \int_A^B dt = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{1 - \frac{u_i^2(t)}{c^2}} dt, \quad i=1,2$$

Ein Experiment dazu: "Maryland-Experiment"

Kopie aus H. Hänsel / W. Neumann, Physik,

Bd. Elektrizität, Optik, Raum und Zeit

Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 1993

U_1 , in einem Inertialsystem S ---, U_2

Beschreibt eine der Uhren eine geschlossene Bahn, d. h., kehrt diese Uhr nach einer endlichen Zeit zum Ort der anderen Uhr zurück, so muß sie gegenüber dieser nachgehen. Ein entsprechendes Experiment wurde 1976 von einer Forschungsgruppe der Universität Maryland durchgeführt (Maryland-Experiment). Dabei wurde der Gang einer Atomuhr auf der Erde mit dem Gang einer in einem Flugzeug mitfliegenden Atomuhr verglichen. Die Flughöhe betrug etwa 10 km, die Flugzeit ca. 15 h. Die Höhe und die Geschwindigkeit des Flugzeuges wurden ständig gemessen und der Gang der beiden Uhren mit Hilfe von Laserimpulsen von 0,1 ns Dauer laufend verglichen. Der Einfluß der Gravitationsrotverschiebung wurde eliminiert (vgl. Abschnitt 14.3.2.3.1 und Abb. 14.16). Zur Realisierung des Zeitvergleichs sendete die Bodenstation einen Laserimpuls zum Flugzeug, der von dort wieder zur Bodenstation reflektiert wurde. Der Zeitpunkt des Eintreffens wurde von den Borduhren direkt registriert. Von der Bodenstation wurde dieser Zeitpunkt aus der Sendezeit und der Empfangszeit am Boden ermittelt. Aufeinanderfolgende Zeitvergleiche lieferten eine stetig zunehmende Differenz $\Delta t'$, die in Abbildung 14.4 über der Flugzeit dargestellt ist. Innerhalb der Fehlergrenze bestätigt dieses Experiment die Beziehung (S 14.5).

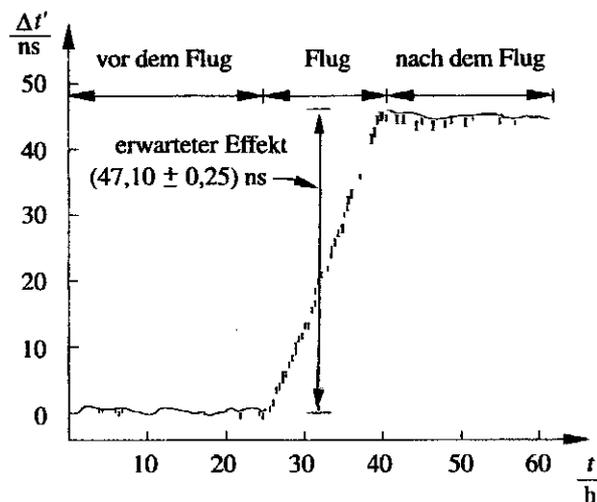


Abb. 14.4 Meßergebnis des Maryland-Experimentes

$\Delta t'$ bedeutet dabei die Differenz der Eigenzeiten der beiden Standarduhren (= Atomuhren) in Abhängigkeit von der Zeit im Inertialsystem S , also

$$\Delta t' = \tau_2(t) - \tau_1(t).$$

zu Abschnitt VII.3.B

Alternative, welche zweckmäßiger ist, da ja die Vierergeschwindigkeit bereits definiert wurde!

Transformation der Teilchengeschwindigkeit bei beliebiger Teilchenbewegung für Systeme in Standardkonfiguration mit Hilfe der Vierergeschwindigkeit

Standard-LT der Vierergeschwindigkeit

$$\underline{u'^{\mu}} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} u^{\alpha}, \quad (\Lambda^{\mu}_{\alpha} \equiv \text{st} \Lambda^{\mu}_{\alpha})$$

mit $(u^{\mu}) = f(u)(c, \vec{u})$ } Hierbei kann $\vec{u} = \vec{u}(t)$,
 $(u'^{\mu}) = f(u')(c, \vec{u}')$ } $\vec{u}' = \vec{u}'(t')$ sein.

$$\underline{0}: \quad u'^0 = f(v) (u^0 - \frac{v}{c} u^1)$$

$$\underline{1}: \quad u'^1 = f(v) (u^1 - \frac{v}{c} u^0)$$

$$\underline{2}: \quad u'^2 = u^2$$

$$\underline{3}: \quad u'^3 = u^3$$

lineare Transformation!

$$\underline{0} \Rightarrow f(u') c = f(v) f(u) (c - \frac{v}{c} u_x)$$

$$\underline{f(u')} = f(v) f(u) (1 - \frac{v u_x}{c^2}) \quad (*)$$

$$\underline{f(u)} = f(v) f(u') (1 + \frac{v u'_x}{c^2}) \quad (\text{"Reziprozität"}) \quad (49)$$

$$\underline{1} \Rightarrow f(u') u'_x = f(v) f(u) (u_x - v) \quad \text{und mit } (*)$$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}} \quad (\text{nichtlineare Transformation})$$

$$\text{bzw.} \quad \underline{u_x} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}} \quad (47a)$$

$\underline{2} \Rightarrow f(u') \mu'_y = f(u) \mu_y$ und mit (*)

$$\mu'_y = \frac{\mu_y}{\gamma(v) \left(1 - \frac{v \mu'_x}{c^2}\right)} \quad \text{bzw.} \quad \mu_y = \frac{\mu'_y}{\gamma(v) \left(1 + \frac{v \mu'_x}{c^2}\right)} \quad (47b)$$

Analog:

$$\mu'_z = \frac{\mu_z}{\gamma(v) \left(1 - \frac{v \mu'_x}{c^2}\right)} \quad \text{bzw.} \quad \mu_z = \frac{\mu'_z}{\gamma(v) \left(1 + \frac{v \mu'_x}{c^2}\right)} \quad (47c)$$

zu Abschnitt VIII.4

S. die folgenden Kopien der VO-Folien.

Als Zusatzinformation zu diesem Thema (nicht Prüfungstoff)

1. das Vorbereitungspraktikum von Meinrad Häfner.

VII. 4. Sichtbarkeit der Längenkontraktion?

Längenkontraktion in Bewegungsrichtung

Beispiel 1: Ruhssystem: Objekt ist Kugel

Vom Radius R_0

Bezugssystem, in dem sich das Objekt

mit v bewegt: Objekt ist Rotations-

ellipsoid mit Halbachsen $\frac{R_0}{\gamma(v)}$, R_0 , R_0

Beispiel 2: Ruhssystem: Objekt ist Würfel

mit Kantenlänge a_0

Bezugssystem, in dem sich das Objekt

parallel zu Kante mit v bewegt:

Objekt ist Quader mit Kantenlängen

$\frac{a_0}{\gamma(v)}$, a_0 , a_0

OBJEKT IST ... bezieht sich dabei auf die
entsprechende MESSVORSCHRIFT FÜR

LÄNGEN: Lineardimension eines Objekts
in S in einer Raumrichtung = räumlicher

Abstand von Objektanfang und

Objektende (in dieser Richtung) gleichzeitig

in S (Koordinatenabstände auf "world map" =
"Weltkarte" von S)

Was "sieht" man in den beiden Beispielen
mit freiem Auge oder auf einer Fotografie?

Beispiel 1: Penrose 1959 (s. Abschnitt IX. 4. C)

Man "sieht" - unabhängig von der Größe
der Geschwindigkeit und der Größe der
Entfernung zum Objekt einen kreisförmigen
Umriss.

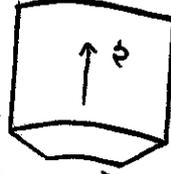
"Längenkontraktion"
nicht sichtbar

Beispiel 2: Terrell 1959 (s. Folien VII-52', VII-52")

Befindet sich das Objekt in so großer
Entfernung vom Auge bzw. vom Objektiv,
daß man die vom Objekt kommenden
Lichtstrahlen als parallel ansehen kann,
so "sieht" man einen gedrehten Würfel.

"Längenkontraktion"
nicht sichtbar
im naive Sinn w.o.

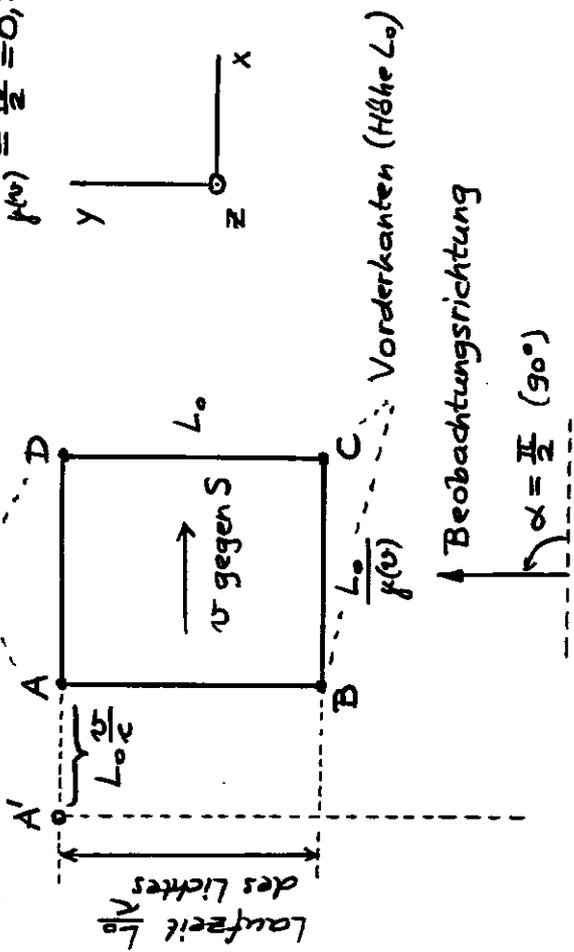
Ist diese Bedingung nicht erfüllt,
"sieht" man einen gedrehten,
verzerrten und kontrahierten "Würfel"



GRUND: Summeneffekt von Längenkontraktion
und Retardierung: Photonen, die gleichzeitig
im Auge (beim Objektiv) einlangen, stammen
von verschiedenen Lagen des Objekts
(Retardierungen auf "world picture" = "Weltbild")

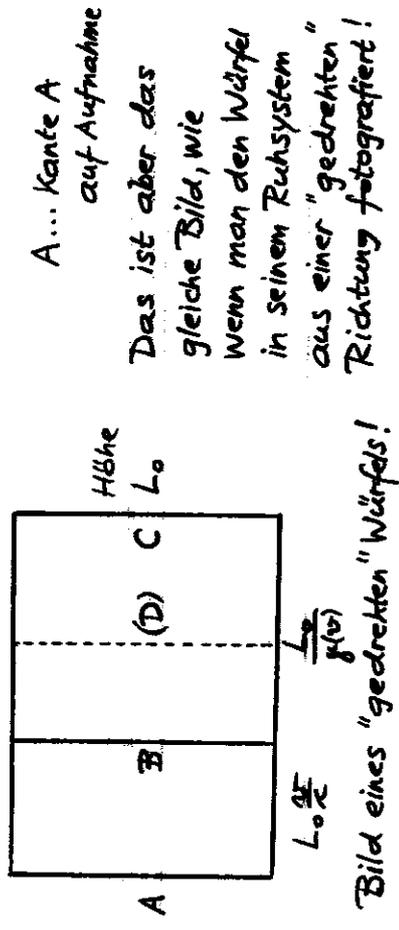
Würfel in großer Entfernung
(Parallelstrahlen)

S' Ruhssystem des Würfels; Abb. für $v = 0,5c$
 $\Rightarrow \gamma(v) = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,154$
 $\frac{1}{\gamma(v)} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$

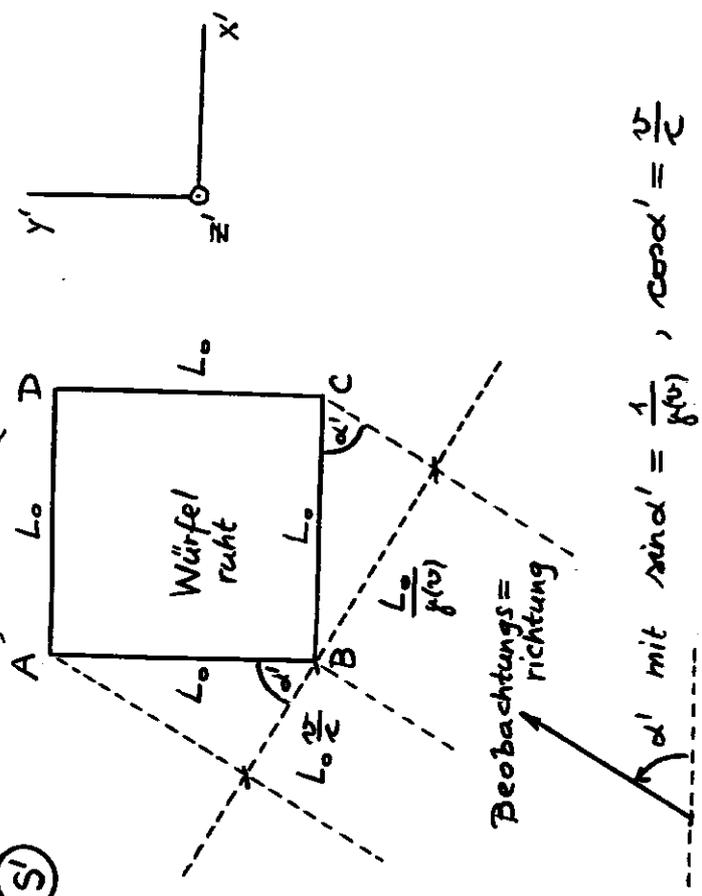


Kante A wird wegen Retardierung in Lage A' "gesehen" (fotografiert)!

Daher sieht die fotografische Aufnahme so aus:



Beweis:
(S')



α' mit $\sin \alpha' = \frac{1}{\gamma(v)}$, $\cos \alpha' = \frac{v}{c}$

$(\sin^2 \alpha' + \cos^2 \alpha' = 1 \quad \checkmark)$

Für $\frac{v}{c} = 0,5$ gilt $\alpha' = \frac{\pi}{3}$ (60°)

Bemerkung: Für ein beliebiges Objekt in großer Entfernung (Parallelstrahlen) gilt eine qualitativ gleiche Aussage (z.B. Kugel).

Ferner: Für ein solches Objekt gilt

Längenkontraktion + Retardierung = Aberration

Die Aberrationsformeln (IX.68) (s. Folie IX-35) liefern mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$ unmittelbar $\sin \alpha' = \frac{1}{\gamma}$, $\cos \alpha' = \beta$.

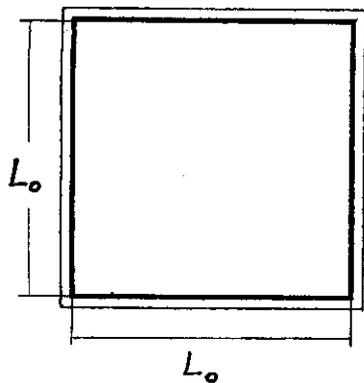


Abb. 5a: Würfel in Ruhe
(Zentralprojektion)

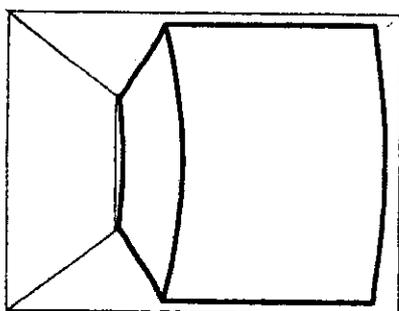


Abb. 5b: Würfel mit $v=0.5c$
aus geringer Entfernung
(Zentralprojektion)

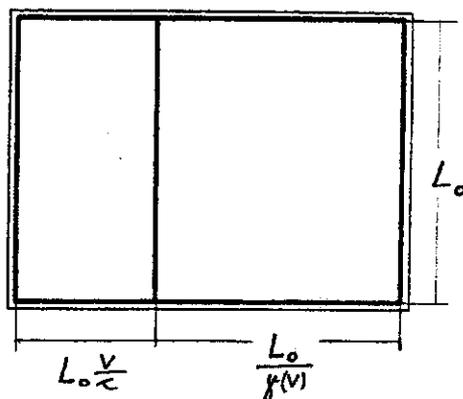


Abb. 5c: Würfel mit $v=0.5c$
aus großer Entfernung
(Parallelprojektion)

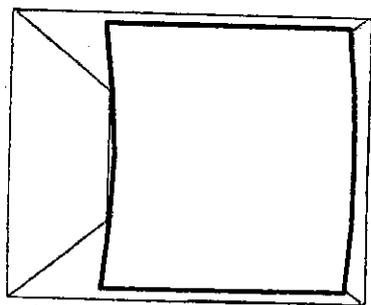


Abb. 7a: $v=0.3c$

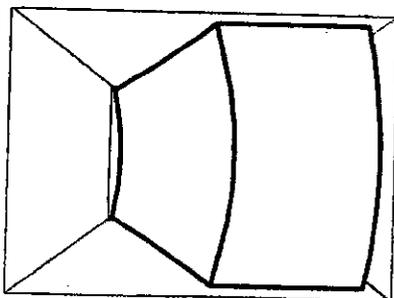


Abb. 7b: $v=0.7c$

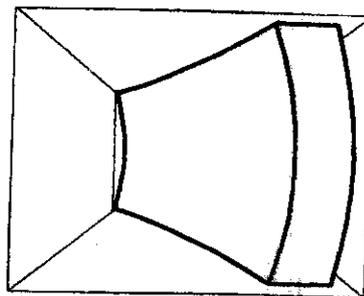


Abb. 7c: $v=0.95c$

zu Abschnitt VIII. 2. A

zu Gl. (12):

$$\text{Mit } \vec{F} = m\gamma(u)\vec{a} + m\gamma^3(u) \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{u}$$

folgt

$$\frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c^2} = m\gamma(u) \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{c^2} \underbrace{\left(1 + \gamma^2(u) \frac{u^2}{c^2}\right)}_{\gamma^2(u)} = m\gamma^3(u) \frac{\vec{a} \cdot \vec{u}}{c^2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{m(u)}_{m\gamma(u)} \vec{a} = \vec{F} - \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c^2} \vec{u} \quad (\text{Newton: } m\vec{a} = \vec{F})$$

Die von der Kraft \vec{F} verursachte Beschleunigung besitzt also im Falle $\vec{F} \cdot \vec{u} \neq 0$ nicht die Richtung der Kraft.

zu Gl. (15), (17):

Die Größe

$$T := mc^2 (\gamma(u) - 1)$$

wird als relativistische kinetische Energie des Teilchens bezeichnet. (Für $u \ll c$ gilt $T \approx \frac{mu^2}{2} = T_{\text{Newton}}$.)

Mit dieser Größe folgt

$$cp^0 = m\gamma(u)c^2 = mc^2 + T$$

$\begin{array}{cc} \vdots & \vdots \\ \text{Ruheenergie} & \text{kinetische Energie} \end{array}$

und der Arbeitssatz lautet

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} (m\gamma(u)c^2) = \frac{dT}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{u},$$

in Analogie zum Newtonschen Arbeitssatz $\frac{dT_{\text{Newton}}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{u}$.

Der Energiesatz (17) lautet dann

$$mc^2 + T + V = E .$$

Zu Abschnitt VIII.2.D

zu Gl. (23):

Gleichwertig dazu ist (s. Seite VIII-1)

$$m\gamma(u)\vec{a} = \vec{F} - \frac{\vec{F}\vec{u}}{c^2} \vec{u} .$$

Aus dieser Gleichung ist es leichter zu sehen, dass für den Fall $\vec{F} = (F, 0, 0)$, F zeitlich konstant > 0 , und die AB $\vec{u}(0) = \vec{0}$

$$\Rightarrow u_y(t) = u_z(t) = 0, \quad y(t) = z(t) = 0$$

$$u_x(t) = u(t) > 0$$

folgt.

Zu Gl. (27):

Für die Berechnung von τ benötigt man $\sqrt{1 - \frac{u^2(t)}{c^2}}$.

Wegen

$$\sqrt{1 - \frac{u^2(t)}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{m^2 c^2}}}$$

folgt durch Integration über t , wenn man $\tau = 0$ für $t = 0$ wählt, sofort Gl. (27).

Zur Überschrift von Abschnitt VIII.2.D

Die hyperbolische Bewegung wird als "gleichförmig beschleunigte Bewegung im Sinne der SRT" bezeichnet,

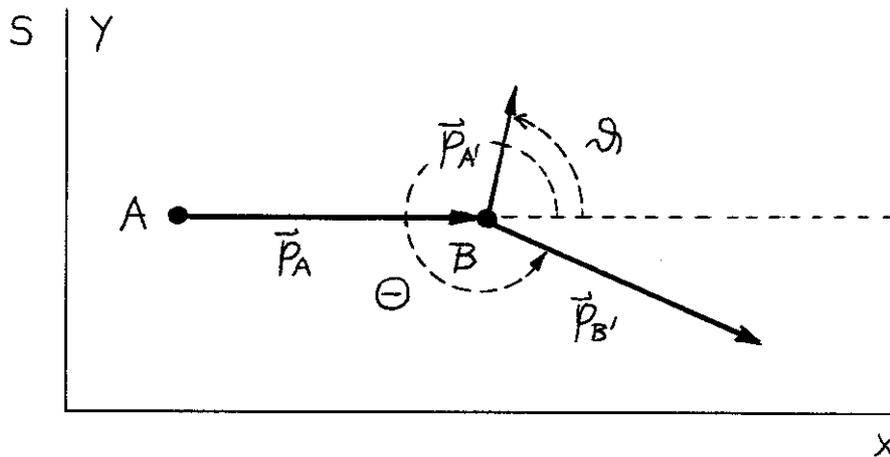
weil die Beschleunigung gegen das jeweilige momentane
inertiale Ruhesystem konstant (und durch $a := \frac{F}{m}$
gegeben) ist. Für die Beschleunigung in S folgt durch
 Ableitung von $u(t) = u_x(t)$ (mit $a = \frac{F}{m}$)

$$a(t) = a_x(t) = \frac{a}{\left(1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}\right)^{3/2}},$$

also für "kleine" t $a(t) \approx a$, aber $a(t) \rightarrow 0$
 für $t \rightarrow +\infty$.

zu Abschnitt VIII.4.A

Abbildung zur Streuung im Laborsystem:



\mathcal{D} Streuwinkel von A } im Laborsystem S
 Θ Streuwinkel von B }

zu Gl. (54a), (54b):

Gl. (54a) gestattet die Berechnung von $E_{A'}$ für gegebenen
 Streuwinkel \mathcal{D} , Gl. (54b) gestattet die Berechnung von $E_{B'}$
 für gegebenen Streuwinkel Θ . Die Streuwinkel \mathcal{D}, Θ sind

aber natürlich nicht unabhängig. Den Zusammenhang zwischen Θ und \mathcal{D} erhält man am einfachsten aus dem Erhaltungssatz für die y -Komponente des Gesamtimpulses:

$$\underbrace{p_{A'}(\mathcal{D})}_{\text{aus Gl. (54a)}} \sin \mathcal{D} + \underbrace{p_{B'}(\Theta)}_{\text{aus Gl. (54b)}} \sin \Theta = 0 \Rightarrow \Theta(\mathcal{D})$$

zu Abschnitt IX.1.A

Der Beweis aus dem Skriptum für die Vierervektorfeld =
eigenschaft von (ρ, \vec{j}) bezieht sich auf den
Sonderfall, daß es ein Inertialsystem S_0 gibt, in
welchem eine rein statische Ladungsverteilung

$\rho_0(\vec{r}_0) \equiv \rho_{\text{ruhe}}(\vec{r}_0)$ vorliegt ($\vec{j}_0(\vec{r}_0) = \vec{0}$). In einem
relativ zu S_0 mit der Geschwindigkeit \vec{u} bewegten
Inertialsystem S liegt dann wegen der Invarianz der
Ladung, $\rho_0 d^3r_0 = \rho d^3r$, und der Längenkontraktion,
welche $d^3r = \frac{d^3r_0}{\gamma(u)}$ bedingt, die Ladungsdichte
 $\rho = \rho_0 \gamma(u)$ und die Stromdichte $\vec{j} = \vec{u} \rho = \vec{u} \gamma(u) \rho_0$ vor
(Konvektion).

Alternativer Beweis (gilt allgemein, d.h. auch wenn es sich
nicht um obigen Sonderfall reiner Konvektion handelt):

Zunächst werden Ladungs- und Stromdichte für den Fall
einer einzigen, allerdings beliebig bewegten, Punktladung
betrachtet: $\rho(\vec{r}, t) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}(t))$, $\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{u}(t) \rho(\vec{r}, t)$.

L-Invarianz der Ladung:

$$\rho' d^3r' = \rho d^3r \iff \rho d^3r = \text{Viererskalarfeld}$$

$$\Rightarrow \rho d^3r dx^4 = \rho \underbrace{d^3r d(ct)}_{d^4x} \frac{1}{c} \frac{dx^4}{dt} = \text{Vierervektorfeld}$$

(kontravariante
Komponenten)

L-Invarianz des vierdimensionalen Volumenelementes:

$$d^4x' = \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} d^4x = d^4x$$

det $\Lambda = 1$ für beliebige LT

Beachte: Nach Gl. (VII.11) gilt für eine allgemeine LT

$$\Lambda = D' \Lambda^{st} \Lambda^D \quad (D, D' \text{ Drehungen, } st \text{ Standard-LT}),$$

$$\text{woraus } \det \Lambda = \underbrace{\det D'}_1 \cdot \underbrace{\det \Lambda^{st}}_1 \cdot \underbrace{\det D}_1 = 1 \text{ folgt.}$$

$$\underbrace{\frac{1}{c} d^4x}_{L\text{-Invariante}} \underbrace{\oint \frac{dx^\mu}{dt}}_{=: j^\mu} = \text{Vierervektorfeld (kontravariante Komponenten)}$$

Vierervektorfeld (kontravariante Komponenten)

Mit

$$j^\mu = \oint \frac{dx^\mu}{dt} = \oint \underbrace{\frac{d\tau}{dt}}_{\frac{1}{\gamma(u)}} \underbrace{\frac{dx^\mu}{d\tau}}_{u^\mu}$$

folgt aber

$$(j^\mu) = \oint \frac{1}{\gamma(u)} (u^\mu) = \oint \frac{1}{\gamma(u)} \gamma(u) (c, \vec{u}) \\ = (c\rho, \vec{u}\rho) = (c\rho, \vec{j}).$$

Nun lassen sich beliebige (mikroskopische) Quelloverteilungen additiv aus den Beiträgen von Punktladungen zusammensetzen. Mit \vec{j}_A (A Teilchenindex) ist aber auch

$$\sum_A \vec{j}_A = \vec{j} \text{ Vierervektorfeld.}$$

zu Abschnitt IX.1.C

zu Gl. (17): Die zur Berechnung der $\hat{F}^{\mu\nu}$ benötigten kovarianten Komponenten von \hat{F} erhält man aus Gl. (14) und $(g_{\beta r} = g_{r\beta})$

$$F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\mu} g_{\beta r} F^{\mu r} = g_{\alpha\mu} \underset{\uparrow}{F^{\mu r}} \underset{\uparrow}{g_{r\beta}}.$$

zu Gl. (45):

$$T^{r\mu} = \frac{1}{4\pi c} \left(\underbrace{F^{\mu\sigma} F_{\sigma}{}^r}_{\text{"1. Term"}} + \frac{1}{4} \underbrace{g^{r\mu} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau}}_{\text{"2. Term"}} \right)$$

"Faktor"

"1. Term": $F_{\sigma}{}^r = g_{\sigma\tau} F^{\tau r}$ gibt (Multiplikation der Matrix (VII.29) mit der Matrix (14))

$$(F_{\sigma}{}^r) = \begin{matrix} \text{Spalte} \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{array} \right) \\ \text{Zeile} \end{matrix}$$

Multiplikation der Matrix (14) mit dieser Matrix liefert

$$(F^{\mu\sigma} F_{\sigma}{}^r) = \begin{pmatrix} \vec{E}^2 & (\vec{E} \times \vec{B})_x & (\vec{E} \times \vec{B})_y & (\vec{E} \times \vec{B})_z \\ \cdot & \vec{B}^2 - (E_x^2 + B_x^2) & -E_x E_y - B_x B_y & -E_z E_x - B_z B_x \\ \cdot & \cdot & \vec{B}^2 - (E_y^2 + B_y^2) & -E_y E_z - B_y B_z \\ \cdot & \cdot & \cdot & \vec{B}^2 - (E_z^2 + B_z^2) \end{pmatrix}$$

"2. Term": $\frac{1}{4} g^{r\mu} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau}$

(34a): $-2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)$

$$\left(\frac{1}{4} g^{r\mu} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau} \right) = -\frac{1}{2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \text{diag} (1, -1, -1, -1)$$

"Faktor" · ("1. Term" + "2. Term") liefert dann Gl. (45) mit Gl. (44a-d).

zu Abschnitt IX.3.D

Zur Vierer-Lorentzkraft:

Nach Gl. (VIII.13), (VIII.14) muss für die Vierer-Lorentzkraft

$$(F^\mu) = q(u) \left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c}, \vec{F} \right) \text{ mit der Dreier-Lorentzkraft}$$

$$\vec{F} = q \left[\vec{E} + \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \right] \text{ gelten, also}$$

$$(F^\mu) = q q(u) \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{u}}{c}, \vec{E} + \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \right).$$

Es muss möglich sein, F^μ durch den Feld(stärke)tensor und die Vierergeschwindigkeit auszudrücken.

Es gilt:

$$\underline{F^\mu = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu}$$

$$\underline{\mu=0}: F^0 = \frac{q}{c} F^{0\nu} u_\nu = \frac{q}{c} \underbrace{F^{0i} u_i}_{q(u) \vec{E} \cdot \vec{u}} \quad \checkmark$$

$$\underline{\mu=1}: F^1 = \frac{q}{c} F^{1\nu} u_\nu = \frac{q}{c} \underbrace{F^{10} u_0}_{c q(u) E_x} + \frac{q}{c} \underbrace{F^{1i} u_i}_{q(u) (\vec{B}_z u_y - \vec{B}_y u_z)} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{(\vec{u} \times \vec{B})_x} \quad \checkmark$$

$\mu=2,3$ analog.

zu Abschnitt IX.4.A

zu Gl. (58):

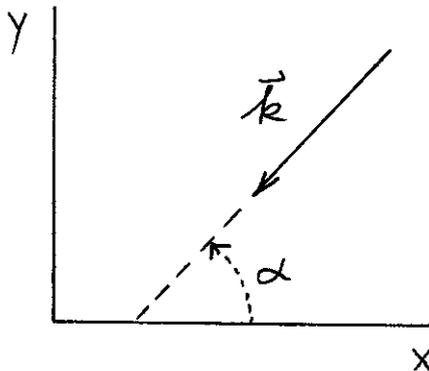
$$\square F^{\nu\mu} = \underbrace{f^{\nu\mu}}_{\substack{\text{nicht } \forall \nu, \mu \\ \text{gleich 0}}} \underbrace{\square e^{-ik_\sigma x^\sigma}}_{\text{muß 0 sein}} = 0$$

$$\begin{aligned} \square e^{-ik_\sigma x^\sigma} &= -g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta e^{-ik_\sigma x^\sigma} \\ -g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta e^{-ik_\sigma x^\sigma} &= g^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta e^{-ik_\sigma x^\sigma} = 0, \quad \forall x^0, x^1, x^2, x^3 \\ \vec{k} \cdot \vec{k} &= 0 \quad \text{notwendige Bedingung} \end{aligned}$$

zu Abschnitt IX.4.B, IX.4.C

Abbildung für S:

$$\vec{k} = k \vec{n} = \frac{\omega}{c} \vec{n}$$



Analoge Abbildung für S'.

zum letzten Absatz von Abschnitt IX.4.C

Die betrachtete Abbildung ist konform (winkeltreu),

Kreise (und Geraden) der Projektionsebene werden
auf Kreise auf der Kugel ("Himmelskugel") abgebildet.

Daraus folgt die Unsichtbarkeit der Längenkontraktion für ein Objekt, welches in seinem Ruhesystem eine Kugel ist, für beliebige Beobachter. Ein beliebiger Beobachter, gleichgültig wie nah oder fern, gleichgültig wie groß seine Relativgeschwindigkeit zu einem solchen Objekt ist, sieht von ihm einen kreisförmigen Umriss. Angenommen das Objekt ruht in S' . B' sieht dann einen Kreisumriss auf seiner "Himmelskugel". Die Projektion dieses Kreisumrisses auf B' 's "Schirm" ist ebenfalls ein Kreis. Relativ zu dem (mit B' raum-zeitlich koinzidierten) Beobachter B von S bewegt sich das Objekt mit der Geschwindigkeit v . B 's "Schirmbild" des Objektumrisses unterscheidet sich von B' 's "Schirmbild" des Objektumrisses aber nur in der Größe, ist also ebenfalls ein Kreis. Daraus folgt schließlich, daß der Umriss des Objektes, den B auf seiner "Himmelskugel" sieht, auch ein Kreis ist.

Zu Abschnitt X.1.A, X.1.B

Zu Gl. (4a), (6a) und (14a):

Als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und Geschwindigkeiten besitzt die kinetische Energie in der nichtrelativistischen Mechanik die Form

$$T(q, \dot{q}) = \sum_{r,s} \frac{1}{2} a_{rs}(q) \dot{q}_r \dot{q}_s \quad (\text{n. z. B. Landau-Lifschitz Bd.1}).$$

(Vgl. die Newtonsche u. relativistische kin. Energie eines Teilchens!)

Als homogene Funktion vom Grade 2 in den \dot{q}_r erfüllt T dann die Dgl.

$$\sum_r \dot{q}_r \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} = 2T.$$

Zu Gl. (14b):

Die Größe

$$E(q, \dot{q}, t) = \sum_r \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - L(q, \dot{q}, t)$$

wird als Energie des System bezeichnet.

≠ nichtrelativistische

Bei einem abgeschlossenen System bzw. bei einem nicht abgeschlossenen System, bei dem sich die äußeren Kräfte aus einem zeitunabhängigen Potential herleiten lassen,

gilt Gl. (6a), also $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}$, und die Energie

$$E(q, \dot{q}) = 2T(q, \dot{q}) - L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) + V(q)$$

ist Erhaltungsgröße. Geht man von q, \dot{q} auf q, p über, so hat man

$$H(q, p) = \sum_r p_r \dot{q}_r - L = T(q, p) + V(q)$$

$$\text{und } \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

zu Abschnitt X.3.C

zu Gl. (35), (36):

$$\mathcal{L}_{em}(\partial^\sigma A^\tau) = -\frac{1}{16\pi} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \overbrace{(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha)}^{F^{\alpha\beta}} \overbrace{(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)}^{F^{\mu\nu}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial(\partial^\sigma A^\tau)} = -\frac{1}{16\pi} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} [(\delta_\sigma^\alpha \delta_\tau^\beta - \delta_\sigma^\beta \delta_\tau^\alpha) F^{\mu\nu} + F^{\alpha\beta} (\delta_\sigma^\mu \delta_\tau^\nu - \delta_\sigma^\nu \delta_\tau^\mu)]$$

$$= -\frac{1}{16\pi} [g_{\sigma\mu} g_{\tau\nu} F^{\mu\nu} - g_{\tau\mu} g_{\sigma\nu} F^{\mu\nu} + g_{\alpha\sigma} g_{\beta\tau} F^{\alpha\beta} - g_{\alpha\tau} g_{\beta\sigma} F^{\alpha\beta}]$$

$$= -\frac{1}{16\pi} [F_{\sigma\tau} - \underbrace{F_{\tau\sigma}}_{-F_{\sigma\tau}} + F_{\sigma\tau} - \underbrace{F_{\tau\sigma}}_{-F_{\sigma\tau}}] = -\frac{1}{4\pi} F_{\sigma\tau}$$

$$\underbrace{\partial^\sigma \frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial(\partial^\sigma A^\tau)}}_{-\frac{1}{4\pi} F_{\sigma\tau}} - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial A^\tau}}_0 = 0 \Rightarrow \partial^\sigma F_{\sigma\tau} = 0.$$

zu Gl. (37), (38):

$$\pi_\tau = \frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial \dot{A}^\tau} = \frac{1}{c} \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial(\partial^0 A^\tau)}}_{-\frac{1}{4\pi} F_{0\tau}} = -\frac{1}{4\pi c} F_{0\tau}$$

$$\pi_{\tau} = - \frac{1}{4\pi\epsilon} F_{0\tau}$$

$$(F_{\sigma\tau}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{gl. (38)}$$

zu gl. (40a), (40b):

Wegen $\text{div } \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$ (freies Feld) gilt $\vec{E} \cdot \text{grad } \phi = \vec{\nabla}(\phi \vec{E})$,
also

$$\mathcal{H}_{em}(\vec{r}, t) = \underbrace{\frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2(\vec{r}, t) + \vec{B}^2(\vec{r}, t))}_{\omega_{em}(\vec{r}, t) \text{ "von früher"}} + \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}(\phi(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t)).$$

gl. (40b) folgt daraus, falls Potential und Feldstärken im Unendlichen hinreichend stark verschwinden, was für freie elm. Felder keineswegs garantiert ist.

zu Kapitel X.4

Die Wirkung des "gekoppelten" Teilchen-Feld-Systems ist durch

$$S = S_{ft} + S_{em} + S_{ww}$$

gegeben, und für die Lagrangefunktion gilt entsprechend

$$L = L_{ft} + L_{em} + L_{ww}$$

mit

$$L_{em} = \int d^3r \mathcal{L}_{em} \quad , \quad L_{ww} = \int d^3r \mathcal{L}_{ww} .$$

Für die Ableitung der BG des elm. Feldes ist aber L_{ft} irrelevant (enthält keine Feldvariablen), weshalb in Abschnitt X.4.B nur

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{em} + \mathcal{L}_{ww}$ benötigt wird. Analog wird in Abschnitt
 X.4.C für die Ableitung der BG des Teilchens nur
 $L = L_{ft} + L_{ww}$ benötigt.

zu Abschnitt X.4.A

zu Gl. (41):

Obwohl $\mathcal{L}_{ww} = -\frac{1}{2} A^\mu j_\mu$ nicht eichinvariant ist, sind
 die mit Hilfe von $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{em} + \mathcal{L}_{ww}$ abgeleiteten FG
 und die mit Hilfe von $L = L_{ft} + L_{ww}$ abgeleitete BG
 eichinvariant! Bei einer Eichtransformation

$$A^\mu \longrightarrow A^\mu + \partial^\mu \psi$$

gilt nämlich wegen der Kontinuitätsgleichung $\partial^\mu j_\mu = 0$
 (Ladungserhaltung)

$$A^\mu j_\mu \longrightarrow A^\mu j_\mu + j_\mu \partial^\mu \psi = A^\mu j_\mu + \partial^\mu (\psi j_\mu).$$

zu Gl. (45):

Diese Gleichung kann man auch in der Form

$$L_{ww}(t) = -\frac{q}{c} \frac{1}{f(u(t))} A^\mu(x^\sigma(\tau)) u_\mu(\tau)$$

schreiben, die Größe $f(u) L_{ww}(\vec{r}, \vec{u}, t)$ ist also — wie
 erforderlich — L -invariant:

$$f(u(t)) L_{ww}(t) = -\frac{q}{c} A^\mu(x^\sigma(\tau)) u_\mu(\tau).$$

zu Abschnitt X.4.B

zu Gl. (48):

Berechne selbst die entsprechende Hamiltondichte. (Was
 erwartet man als Ergebnis?)

zu Abschnitt X.4. C

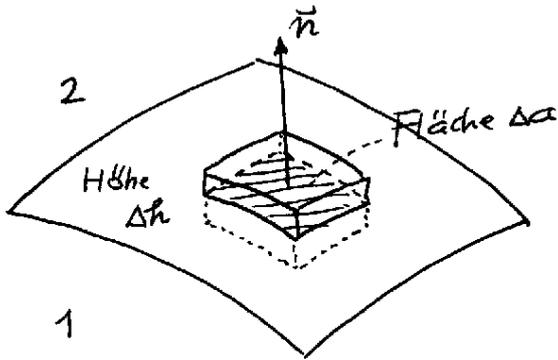
zu Gl. (57):

$$\begin{aligned}
 (\vec{u} \times \text{rot } \vec{A})_i &= \varepsilon_{ijk} u_j \underbrace{\text{rot}_k \vec{A}}_{\varepsilon_{k\ell m} \frac{\partial A_m}{\partial x_\ell}} \\
 &= \underbrace{\varepsilon_{kij} \varepsilon_{k\ell m}}_{\delta_{ie} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{je}} u_j \frac{\partial A_m}{\partial x_\ell} = u_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - u_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j}
 \end{aligned}$$

zu Abschnitt XI.2.C

Beweis der Grenzbedingungen (30):

1) Grenzbedingung für \vec{D} (Beweis der Grenzbedingung für \vec{B} analog)



$$\oint_{\mathcal{F}(V)} d^2\vec{f} \cdot \vec{D} = 4\pi \int_V d^3r \rho$$

Als $\mathcal{F}(V)$ "Keksdose" (wie in der Abb. dargestellt) gewählt. Bis auf Terme höherer Ordnung in Δa und

Δh gilt dann:

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Delta a = 4\pi \int_{-\frac{\Delta h}{2}}^{+\frac{\Delta h}{2}} \rho dh \cdot \Delta a \quad (\text{h-Integration in Richtung von } \vec{n})$$

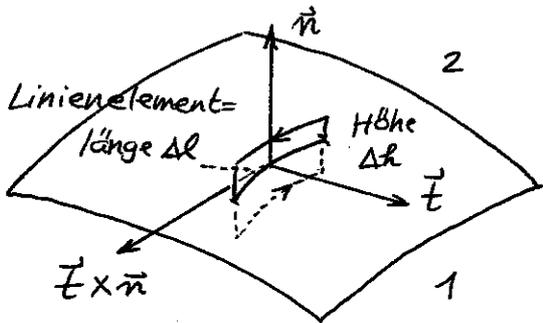
Für $\Delta a \rightarrow 0$, $\Delta h \rightarrow 0$ folgt also

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 4\pi \sigma \quad \text{mit} \quad \sigma = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{-\frac{\Delta h}{2}}^{+\frac{\Delta h}{2}} \rho dh.$$

Falls ρ längs der Grenzfläche δ -förmig singular ist, ist $\sigma \neq 0$ und gibt die Flächenladungsdichte an.

(Physikalisch gesprochen: $\int \rho dh$ über "Grenzschicht" erstreckt gibt σ .)

2) Grenzbedingung für \vec{H} (Beweis der Grenzbedingung für \vec{E} analog)



$$\oint_{\mathcal{C}(F)} d\vec{r} \cdot \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \int_F d^2\vec{r} \cdot \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_F d^2\vec{r} \cdot \vec{D}$$

Für $\mathcal{C}(F)$ "Schleife" (wie in der Abb. dargestellt) gewählt. Dabei ist \vec{t} der zum Linienelement normale Einheitsvektor in der Tangentialebene der Grenzfläche. Bis auf Terme höherer Ordnung in Δl , Δh gilt dann:

$$\underbrace{(\vec{t} \times \vec{n}) \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)}_{[\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)] \cdot \vec{t}} \Delta l = \frac{4\pi}{c} \int_{-\frac{\Delta h}{2}}^{+\frac{\Delta h}{2}} \vec{j} \cdot \vec{t} dh \Delta l + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} (\vec{D}_1 \cdot \vec{t} \Delta l \cdot \frac{\Delta h}{2} + \vec{D}_2 \cdot \vec{t} \Delta l \cdot \frac{\Delta h}{2})$$

Da dies für ein in Flächenpunkt beliebig gerichtetes Linienelement, also für beliebiges \vec{t} , gelten muss, folgt

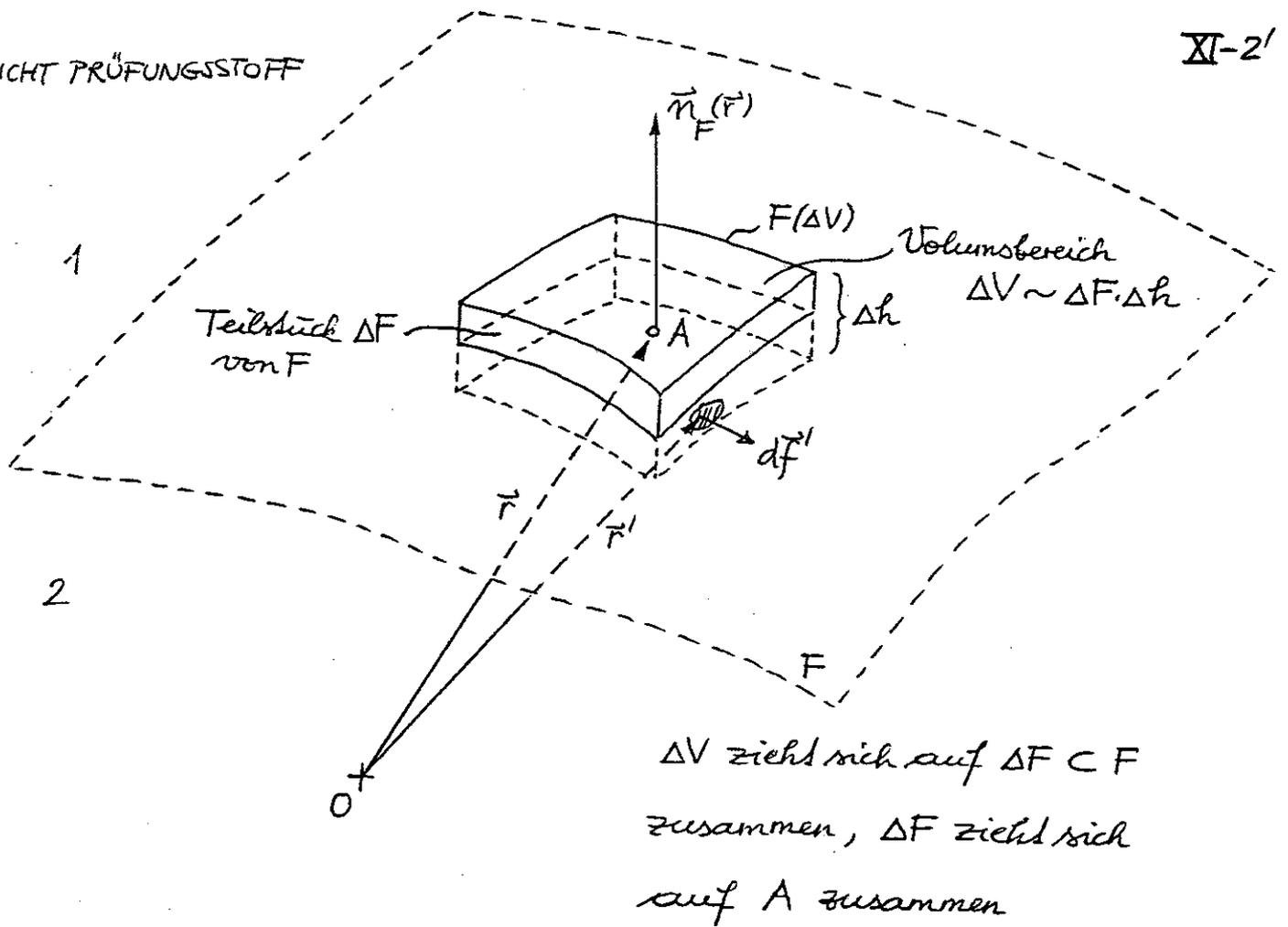
$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \vec{k} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} (\vec{D}_1 \frac{\Delta h}{2} + \vec{D}_2 \frac{\Delta h}{2})$$

Für $\Delta l \rightarrow 0$, $\Delta h \rightarrow 0$ gibt dies

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \vec{k} \quad \text{mit} \quad \vec{k} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{-\frac{\Delta h}{2}}^{+\frac{\Delta h}{2}} \vec{j} dh.$$

Falls \vec{j} längs der Grenzfläche δ -förmig singular ist, ist $\vec{k} \neq \vec{0}$ und gibt die Flächenstromdichte an (Vektor im betrachteten Punkt der Grenzfläche mit Komponenten in der Tangentialebene). (Physikalisch gesprochen:

$\int \vec{j} dh$ über "Grenzschicht" erstreckt gibt \vec{k} .)



Definition:

Flächendivergenz des Vektorfeldes $\vec{v} =$ Skalarfeld auf F ,
definiert durch

$$\text{Div } \vec{v}(\vec{r}, t) := \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \left(\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{F(\Delta V)} \vec{v}(\vec{r}', t) \cdot d\vec{f}' \right), \vec{r} \in F$$

Beachte:

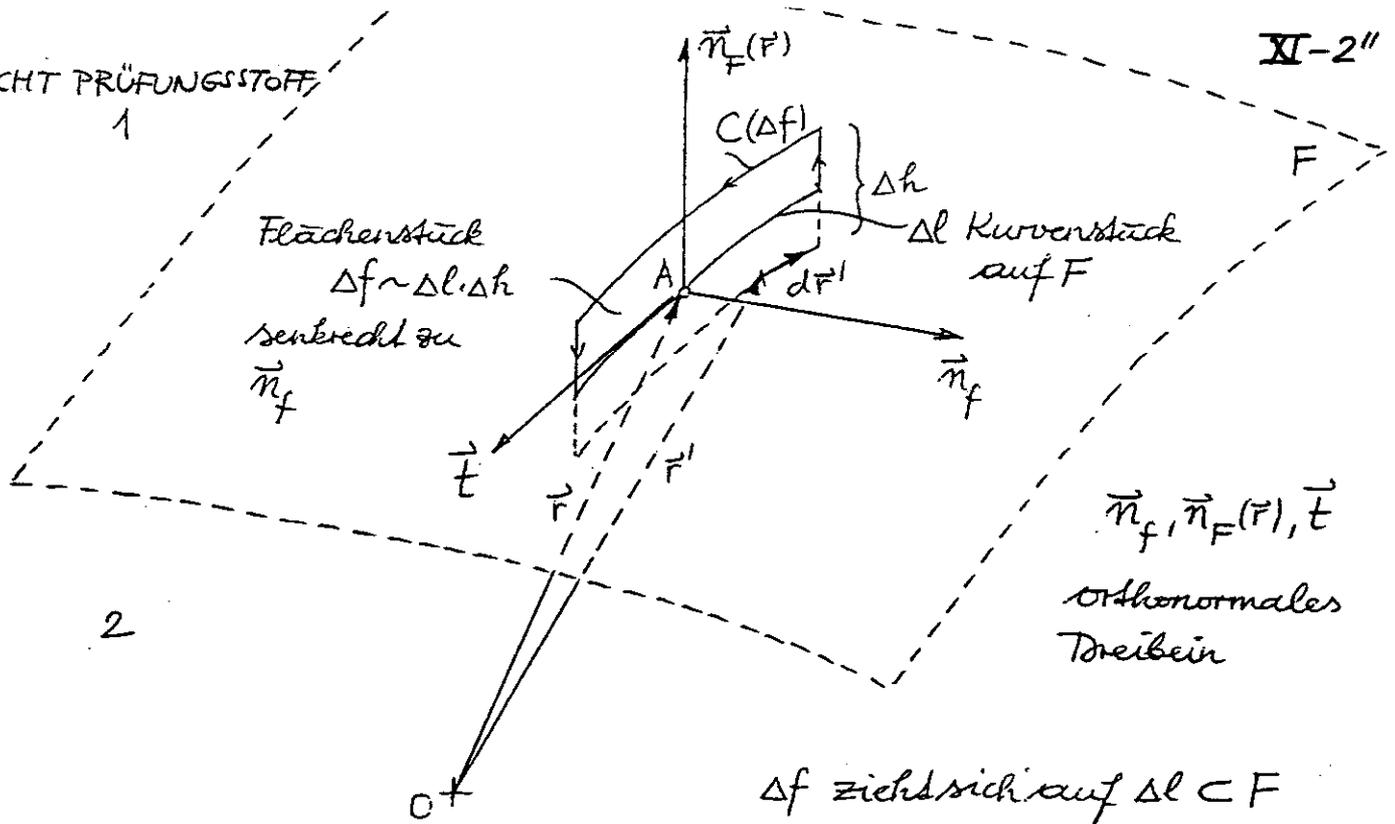
$$\text{Div } \vec{v}(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \left(\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \Delta h \underbrace{\frac{1}{\Delta V} \oint_{F(\Delta V)} \vec{v}(\vec{r}', t) \cdot d\vec{f}'} \right)$$

$\text{div } v(\Delta V, t)$ divergiert für $\Delta V \rightarrow 0$

falls Oberflächenquellen vorhanden!

NICHT PRÜFUNGSSTOFF

XI-2''



Δf zieht sich auf $\Delta l \subset F$
zusammen, Δl zieht sich
auf A zusammen

Definition:

Flächenrotor des Vektorfeldes $\vec{v} =$ Vektorfeld auf $F \perp \vec{n}_F(\vec{r})$,
definiert durch Angabe der Komponente für eine beliebig
vorgegebene Richtung $\vec{n}_f \perp \vec{n}_F(\vec{r})$ gemäß

$$\vec{n}_f \cdot \text{Rot } \vec{v}(\vec{r}, t) := \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left(\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta f} \oint_{C(\Delta f)} \vec{v}(\vec{r}', t) \cdot d\vec{r}' \right), \vec{r} \in F.$$

Beachte: $\vec{n}_f \cdot \text{rot } \vec{v}(\vec{r}, t) = \infty$ für $\vec{r} \in F$, also

$$\vec{n}_f \cdot \text{Rot } \vec{v}(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left(\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \Delta h \frac{1}{\Delta f} \oint_{C(\Delta f)} \vec{v}(\vec{r}', t) \cdot d\vec{r}' \right)$$

$\vec{n}_f \cdot \text{rot } \vec{v}(\Delta f, t)$ divergiert
für $\Delta f \rightarrow 0$,^{*)} aber mal

*) falls Oberflächenwirbel
vorhanden

gibt endlichen Grenzwert für
 $\Delta l \rightarrow 0, \Delta h \rightarrow 0.$

zu Abschnitt XI. 3. B

Der Teil bis inklusive Gl. (35a) (bereits beginnend mit Gl. (33)) ist für mich (D. Grau) nicht nachvollziehbar und in meinen Augen irreparabel. Dasselbe gilt nach meiner Ansicht für andere in den Lehrbüchern dargebotene "Kurzherleitungen". Die folgende Darstellung ist Becker/Sauter, Theorie der Elektrizität, Bd. III, entnommen.

Molekulare Polarisierbarkeit χ_{mol} und elektrische Suszeptibilität χ_e

Betrachtet wird der Fall der Elektrostatik der Dielektrika, d.h. alle makroskopischen Größen sind zeitunabhängig, nicht aber die mikroskopischen, weshalb man auch das mittlere Dipolmoment $\langle \vec{p}_{\text{mol}} \rangle$ eines Moleküls betrachtet, welches zeitlich konstant ist.

Ferner wird eine Substanz betrachtet, welche keine permanenten Dipole enthält.

Das am Ort des ^{herausgegriffenen} Moleküls wirksame statische Feld

\vec{E}_{lokal} erzeugt dann ein dazu proportionales molekulares Dipolmoment $\langle \vec{p}_{\text{mol}} \rangle$. (Dies trifft für einen relativ großen Feldstärkenbereich zu.)

Wählen wir den Ort des herausgegriffenen Moleküls als Koordinatenursprung, so gilt (ersetzt Gl. (33))

$$\langle \vec{p}_{\text{mol}} \rangle = \chi_{\text{mol}} \vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0}) . \quad [1]$$

Zur näherungsweise Berechnung von $\vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0})$ wird vereinfachend angenommen, dass die Beiträge der anderen Moleküle zum Feld $\vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0})$ durch deren Dipolfeldanteile ausreichend genau beschrieben werden. Indiziert man diese anderen Moleküle durch einen Index j und setzt man zur Vereinfachung der Schreibweise $\langle \vec{p}_{j,\text{mol}} \rangle \equiv \vec{p}_j$, so gilt

$$\vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0}) = \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle(\vec{0}) + \sum_j \frac{3(\vec{p}_j \cdot \vec{r}_j)\vec{r}_j - r_j^2 \vec{p}_j}{r_j^5} \quad [2]$$

$\vec{r}_j \neq \vec{0}, \forall j$

Außerhalb der für den Übergang von den mikroskopischen zu den makroskopischen Größen benötigten Lorentz'schen Mittelungskugel vom Radius $R_0 \sim 100 \text{ \AA}$, $R_0 \gg a$ (a Größenordnung der Molekülabstände) kann man von der molekularen Struktur der Materie absehen und diese durch ein Kontinuum mit dem Dipolmoment $\vec{P}(\vec{r}) / \text{Volumeneinheit}$ ansehen ($\vec{P}(\vec{r})$ Polarisation):

$$\vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0}) = \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle(\vec{0}) + \sum_{0 < r_j < R_0} \frac{3(\vec{p}_j \cdot \vec{r}_j)\vec{r}_j - r_j^2 \vec{p}_j}{r_j^5} \quad [3]$$

$$+ \int_{r > R_0} d^3r \frac{3(\vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{P}(\vec{r})}{r^5}$$

Term mit $\delta(\vec{r})$ nicht benötigt wegen $r > R_0$

(Von null verschiedene Beiträge nur vom Raumbereich mit Materie, da $\vec{P}(\vec{r}) \equiv \vec{0}$ außerhalb der Materie.)

Um den Zusammenhang zwischen $\vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0})$ und $\vec{E}(\vec{0})$ herzustellen, schreiben wir $\vec{E}(\vec{0})$ auf analoge Art an:

$$\vec{E}(\vec{0}) = \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle(\vec{0}) + \langle \vec{E}_{\text{mat}} \rangle(\vec{0}) \quad [4]$$

$$= \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle(\vec{0}) + \int d^3r \frac{3(\vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{P}(\vec{r})}{r^5} - \frac{4\pi}{3} \vec{P}(\vec{0})$$

s. Gl. (IV. 22)! Term mit $\delta(\vec{r})$ in Dichte liefert Summanden $-\frac{4\pi}{3} \vec{P}(\vec{0})$

Integriert wird dabei über ein beliebiges die Materie ganz einschließendes Volumen.

Eliminiert man mit Hilfe von Gl. [4] aus Gl. [3] $\langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle(\vec{0})$, so erhält man

$$\vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0}) = \vec{E}(\vec{0}) + \frac{4\pi}{3} \vec{P}(\vec{0}) + \sum_{\substack{j \\ 0 < r_j < R_0}} \frac{3(\vec{p}_j \cdot \vec{r}_j)\vec{r}_j - r_j^2 \vec{p}_j}{r_j^5} - \int_{r < R_0} d^3r \frac{3(\vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{P}(\vec{r})}{r^5} \quad [5]$$

Auf die genaue Festlegung von R_0 kommt es dabei nicht an, solange $R_0 \gg a$, aber R_0 makroskopisch gesehen klein (also $R_0 \sim 100 \text{ \AA}$) gilt.

$\vec{P}(\vec{r})$ kann man innerhalb der "Lorentzkugel" als konstant ansehen (\vec{P} ist ja ein makroskopisches Feld):

$$\vec{P}(\vec{r}) \approx \vec{P}(\vec{0}) = \text{konst} \quad \text{für } r < R_0. \quad [6]$$

Damit folgt aber für das Volumintegral in [5] der Wert

null, wie aus Abschnitt IV.1.D bekannt ist (Winkelintegral ist null), und man erhält

$$\vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0}) = \vec{E}(\vec{0}) + \frac{4\pi}{3} \vec{P}(\vec{0}) + \sum_j \frac{3(\vec{p}_j \cdot \vec{r}_j) \vec{r}_j - r_j^2 \vec{p}_j}{r_j^5} \quad [7]$$

$0 < r_j < R_0$

Der Beitrag \sum_j hängt nicht nur von den $\vec{p}_j = \langle \vec{p}_{j,\text{mol}} \rangle$, sondern auch von der mikroskopischen Struktur wesentlich ab. Wie Lorentz gezeigt hat, gilt für ein einfaches kubisches Gitter (alle $\vec{p}_j = \vec{p}$ gleich und an kubischem Gitter angeordnet), dass die Summe null ist. (Der Ursprung, an dem das herausgegriffene Molekül "sitzt", ist ein Gitterpunkt.) Es gilt dann also die von Lorentz angegebene Beziehung

$$\boxed{\vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0}) = \vec{E}(\vec{0}) + \frac{4\pi}{3} \vec{P}(\vec{0})} \quad [8]$$

Es ist eine plausible Annahme, dass die obige \sum_j auch für regellose Molekülanordnungen (amorphe Substanzen, Flüssigkeiten, Gase) null ist. Für andere als einfache kubische Gitter ist dieser Beitrag nicht null (s. Literaturangabe in Becker/Sauter), doch schreibt Jackson, dass es eine "gute Arbeitshypothese" ist, dass sie auch für solche Materialien gegenüber $\vec{E}(\vec{0}) + \frac{4\pi}{3} \vec{P}(\vec{0})$ vernachlässigbar ist.

Mit Gl. [1], [8] und

$$\vec{P}(\vec{0}) = \chi_e \vec{E}(\vec{0}) \quad [9]$$

sowie mit $\vec{P}(\vec{0}) = N \langle \vec{p}_{mol} \rangle$ [10]

(Ann.: lauter gleichartige Moleküle; N Zahl der Moleküle pro Volumeneinheit)

$$\vec{P}(\vec{0}) = N \langle \vec{p}_{mol} \rangle = N \chi_{mol} \vec{E}_{lokal}(\vec{0}) = N \chi_{mol} \left(\vec{E}(\vec{0}) + \frac{4\pi}{3} \vec{P}(\vec{0}) \right)$$

$$\vec{P}(\vec{0}) = \frac{N \chi_{mol}}{1 - \frac{4\pi}{3} N \chi_{mol}} \vec{E}(\vec{0})$$
 [11]

χ_e , also gl. (35b) "abgeleitet".

zu Abschnitt XI.3.D

zur Ableitung der Formel (43b):

(Für diejenigen, denen es im Skriptum "zu schnell geht" und denen die formale Beziehung (43a) nicht vertraut ist.)

Für die Ableitung von (43b) muss man $\epsilon(\omega)$ für $\omega \in \mathbb{C}$ definieren und das Verhalten für $\text{Im } \omega \geq 0$ (reelle Achse und "obere Halbebene") untersuchen.

Mit $\omega_r \equiv \text{Re } \omega$, $\omega_i \equiv \text{Im } \omega$ gilt

1) $\epsilon(\omega_r + i\omega_i) = 1 + \int_0^{+\infty} dt e^{i\omega_r t} \underbrace{G(t)} e^{-\omega_i t}$

Ann: endlich, $\forall t$

\Rightarrow Integral \exists für $\omega_i > 0$ und auch für $\omega_i = 0$,
wenn wir ferner $G(t) \rightarrow 0$ stärker als $\frac{1}{t}$ annehmen
 $t \uparrow +\infty$

2) $\frac{d\epsilon(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega = \omega_r + i\omega_i} = i \int_0^{+\infty} dt e^{i\omega_r t} t G(t) e^{-\omega_i t}$

\Rightarrow Integral und damit Ableitung \exists für $\omega_i > 0$

Als eine in der "oberen Halbebene" endliche und dort überall differenzierbare Funktion ist $\underline{E(\omega)}$ eine in der "oberen Halbebene" reguläre (analytische) Funktion.

Ferner ist $E(\omega)$ auf der reellen Achse endlich.

Mit $E(\omega')$ (Variable nun ω' genannt) ist auch

$$\frac{E(\omega')-1}{\omega'-\omega}, \quad \omega \in \mathbb{R} \text{ fest, regulär in der "oberen Halbebene",}$$

und der ζ von Abb. 1

ganz im Regularitätsgebiet dieser Funktion verläuft, gilt der Cauchysche Integralsatz:

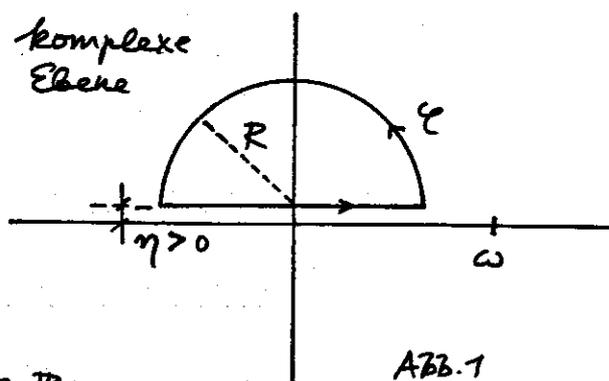


Abb. 1

$$\oint_{\zeta} \frac{E(\omega')-1}{\omega'-\omega} d\omega' = 0 \quad \text{für } \omega \in \mathbb{R}.$$

Weitere Annahme bzgl. $G(\tau)$: Taylorentwicklung für $\tau = 0+ \exists$

$$G(\tau) = \underbrace{G(0+)}_0 + \tau G'(0+) + \dots, \quad \tau > 0$$

\Rightarrow (Einsetzen in die Definition von $E(\omega)$, kurze elementare Rechnung)

$$\underline{E(\omega')-1 = -\frac{G'(0+)}{\omega'^2} + O\left(\frac{1}{\omega'^3}\right)} \quad \text{für große } |\omega'| \text{ und } \underline{\text{Im } \omega' > 0}$$

\Rightarrow Integral über den Halbkreis

$(\omega' = R e^{i\eta} + i\eta, \eta > 0)$ "verschwindet" für $R \uparrow +\infty$

wie $\frac{1}{R^2}$, weshalb (Abb. 2)

$$\int_{-\infty+i\eta}^{+\infty+i\eta} \frac{E(\omega')-1}{\omega'-\omega} d\omega' = 0$$

für $\omega \in \mathbb{R}$

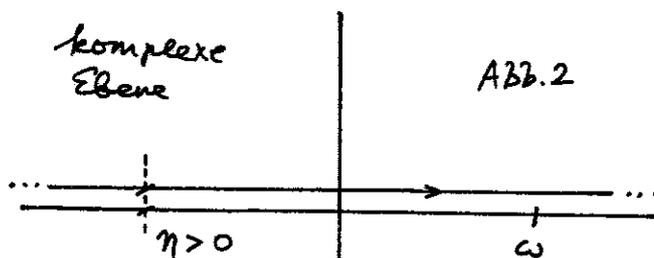


Abb. 2

gelten muss. Im Grenzfall $\eta \downarrow 0$ müssen wir nur

auf den einfachen Pol von $\frac{\epsilon(\omega')-1}{\omega'-\omega}$ bei $\omega'=\omega$ achten, da wir bewiesen haben, daß $\epsilon(\omega')$ auf der reellen Achse endlich ist. Der Pol $\omega'=\omega$ muß beim Grenzübergang "unterhalb" des Integrationsweges bleiben, womit wir (P Hauptwert) für $\eta \downarrow 0$ (Abb.3)

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon(\omega')-1}{\omega'-\omega} d\omega' + \int_{\underbrace{\pi}_{\rho \downarrow 0}}^{\underbrace{0}_{\rho \downarrow 0}} \frac{\epsilon(\omega')-1}{\omega'-\omega} d\omega' = 0$$

komplexe Ebene

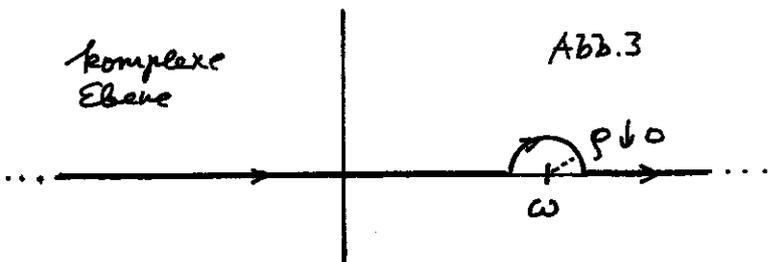


Abb.3

für $\omega \in \mathbb{R}$

erhalten. Berechnung des Integrals $\int_{\rho \downarrow 0}^{\pi}$ gibt mit

$$\left. \begin{aligned} \omega'-\omega &= \rho e^{i\varphi} \quad (\varphi \text{ von } \pi \text{ bis } 0) \\ d\omega' &= i\rho e^{i\varphi} d\varphi \end{aligned} \right\} \frac{d\omega'}{\omega'-\omega} = i d\varphi$$

(da $\epsilon(\omega')-1$ für $\text{Im}\omega' > 0$ regulär und für $\text{Im}\omega' = 0$ endlich ist)

$$i [\epsilon(\omega)-1] \int_{\pi}^0 d\varphi = -i\pi [\epsilon(\omega)-1]$$

Damit folgt aber

$$\underline{\epsilon(\omega)-1 = \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon(\omega')-1}{\omega'-\omega} d\omega'} \text{ , also Gl. (43b).}$$

zu "Leiter":

Im Kapitel XIV (Wellen in Materie) wird gezeigt:

Leiter können (unter bestimmten VS) durch die verallgemeinerte Dielektrizitätsfunktion

$$\eta(\omega) := \epsilon(\omega) + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \text{ beschrieben werden.}$$

gleiche Analytizitäts-eigen-schaften wie bei Isolatoren (da gleiche physikal. Mechanismen)

zusätzliche Dissipation von Energie durch Joulesche Wärme

Einsetzen von $\epsilon(\omega) = \eta(\omega) - i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$ in Gl. (45a,b)
gibt dann Gl. (47a,b).

In vielen Büchern (s. z. B. Jackson) wird dann statt $\eta(\omega)$
einfach wieder $\epsilon(\omega)$ geschrieben, d. h. es wird für σ weiter
einfach $\frac{4\pi\sigma}{\omega}$ zusätzlich in $\text{Im } \epsilon(\omega)$ "aufgenommen".

Benützt man $\eta(\omega)$, so kann man auch in Gl. (40a) $\epsilon(\omega)$
durch $\eta(\omega)$ ersetzen, wenn man zugleich in den FG den
Term $\frac{4\pi}{c} \vec{j} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E}$ weglässt. In der neuen (zu $\eta(\omega)$
gehörigen) Relaxationsfunktion $G(\tau)$ bedeutet dies, daß einfach
ein additiver Beitrag $4\pi\sigma$ hinzukommt, sodaß

$G(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow +\infty} 4\pi\sigma$ (s. Gl. (46)) folgt. Die einfache qualitative
Überlegung dazu, die diesen Zusatzterm elementar begründet,

lege ich "in Original-Nowotny-Version" als Seite XI-10' bei.

zu Abschnitt XI.3.E

zu Gl. (51): ω_p heißt Plasmafrequenz

zu Gl. (52): Der Beweis (3 Zeilen) ist bei Jackson zu finden.

SIHE DIE ABBILDUNG VON SETTE XI-11 ZU DISPERSION UND
ABSORPTION!

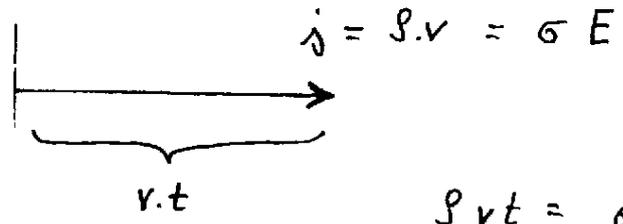
zu Abschnitt XI.4.B

zu Gl. (68): Ausführliche Diskussion in H. Mitter, Elektrodynamik,
B.I. 1980.

Kapitel XI.3.C : LEITER

$E(t) = E \cdot \theta(t)$ (Einschalten zum Zeitpunkt $t=0$!)

Wir betrachten nun die Ladungsverchiebung in einem Leiter:



$\rho v t = \sigma E t$
 P (Dipolmoment pro Volumens einheit)

Somit folgt:

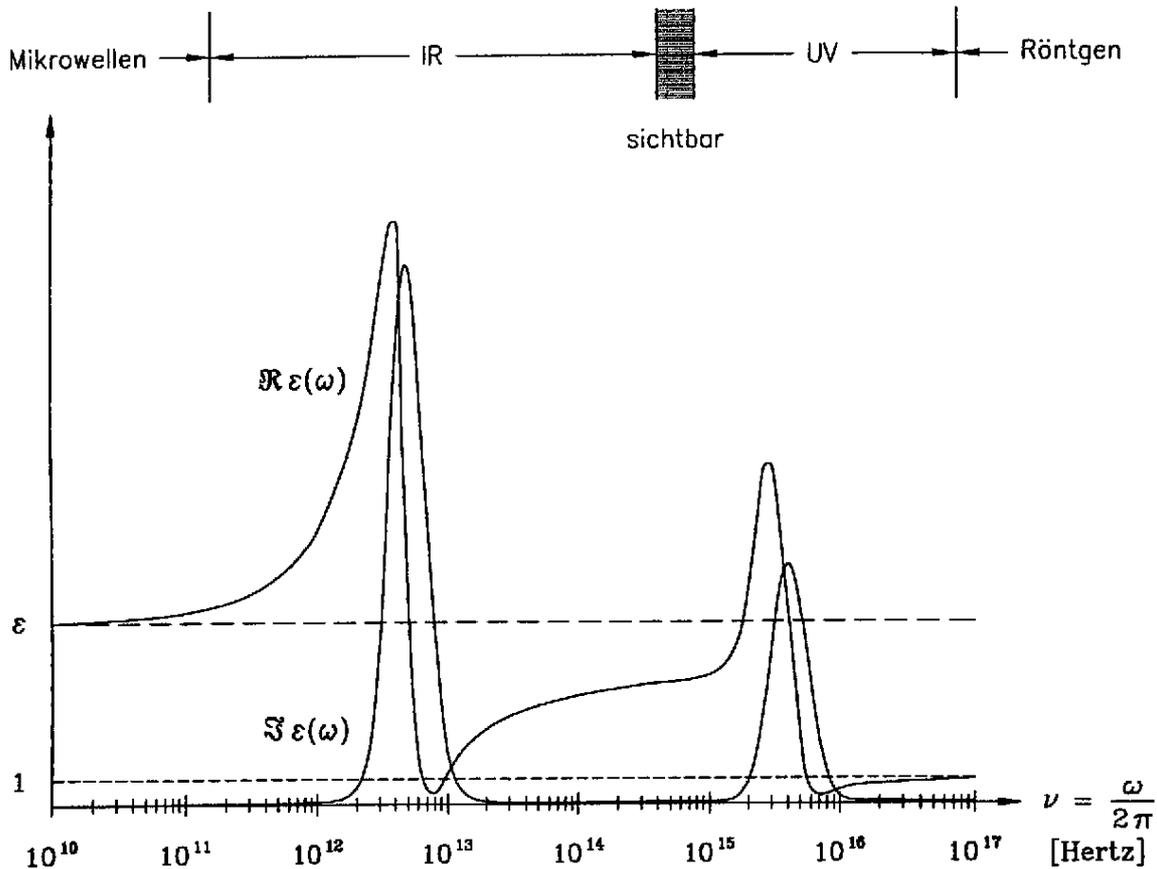
$D = E + 4\pi P \rightarrow D = E + 4\pi \sigma \cdot E t$

Dies folgt aus Gleichung 38 mit $E(t) = E \cdot \theta(t)$, wenn wir

$D = E + \int_0^\infty \frac{1}{r} G(\tau) \cdot E(t-\tau)$
 $G(\tau) = 4\pi \sigma$ setzen!

Re $\epsilon(\omega)$ und Im $\epsilon(\omega)$ für NaCl

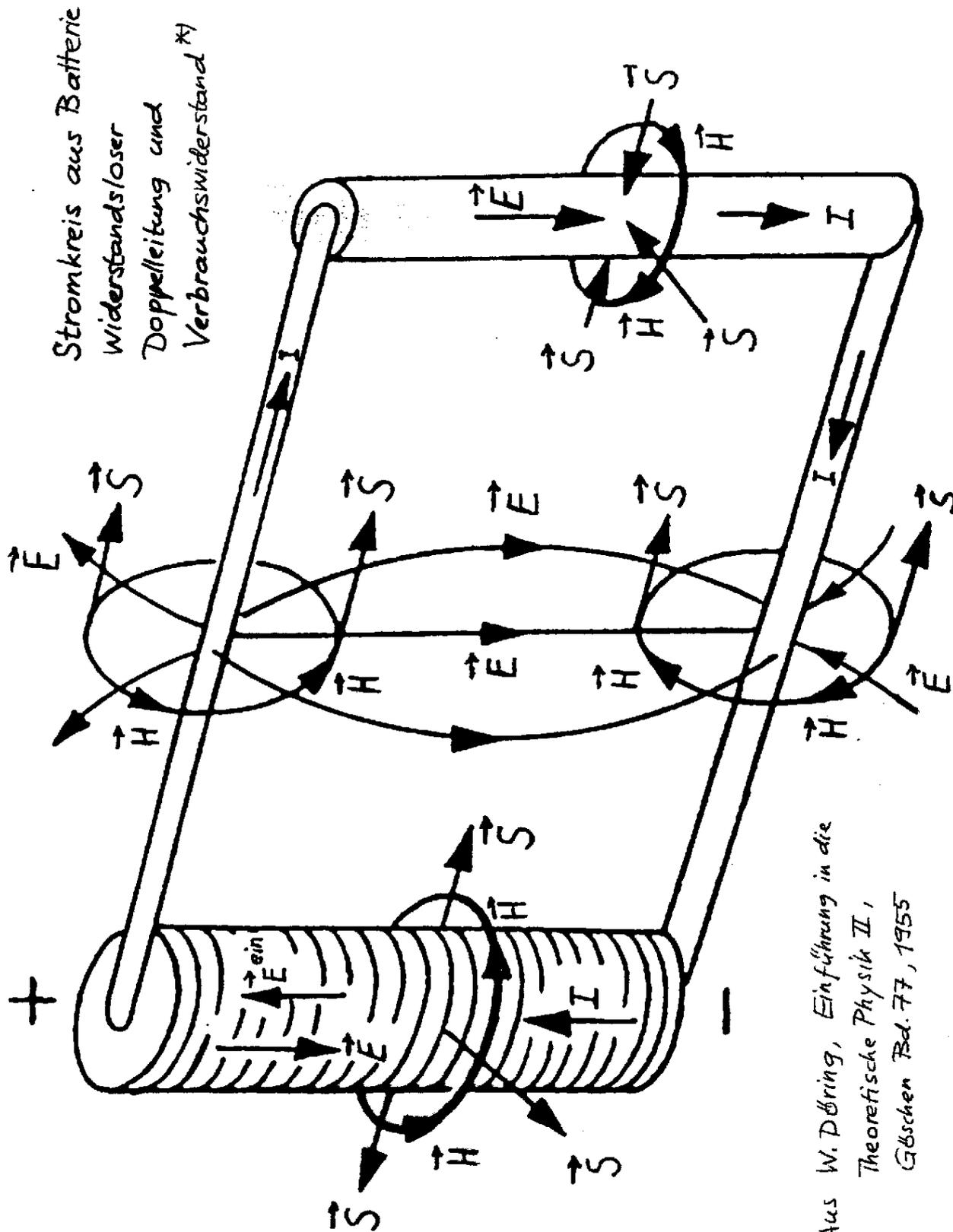
Zusammenhang zwischen Absorption und anomaler Dispersion



Bemerkung zur Permeabilität:

Betrachtet man magnetische Materialien, so kann man in Analogie zu $\epsilon(\omega)$ eine komplexwertige Permeabilitätsfunktion $\mu(\omega)$ einführen und für diese Dispersionsrelationen herleiten. Man muss aber dabei beachten (s. Abschnitt XI.3.A), daß für Frequenzen im optischen Bereich und "darüber", die Permeabilität ihren Sinn verliert und formal $\mu=1$ (also $\text{Im } \mu(\omega) = 0$) zu setzen ist. In der zu Gl. (45a) analogen Beziehung darf dann nur bis zu einer endlichen Frequenz integriert werden (s. Landau-Lifschitz Bd. 8, § 62).

Zu Abschnitt XI.4.C

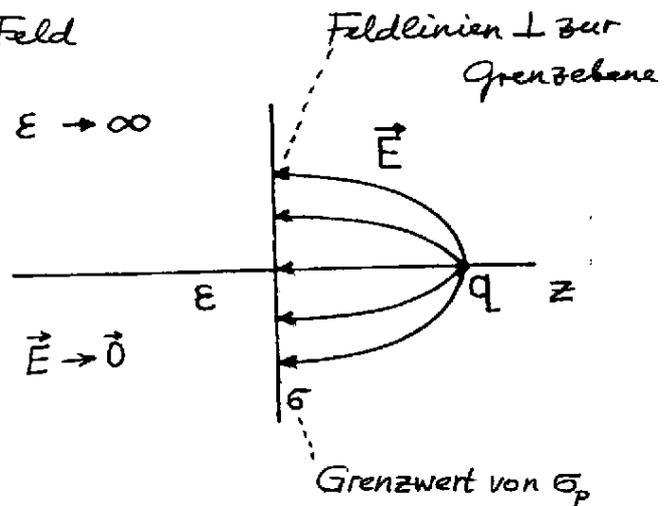
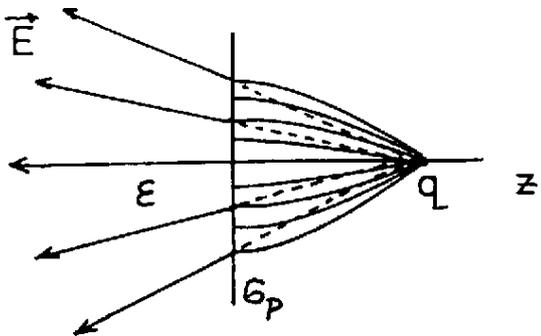


Stromkreis aus Batterie
Widerstandsloser
Doppelleitung und
Verbrauchswiderstand *)

*) Aus W. Döring, Einführung in die
Theoretische Physik II,
Götschen Bd. 77, 1955

zu Abschnitt XII.1.C

Feldlinienverlauf für das \vec{E} -Feld



(Dielektrikum mit $\epsilon \rightarrow \infty$ wirkt wie [idealer] Leiter)

zu Abschnitt XII.1.D

1) Wegen der axialen Symmetrie bzgl. der z-Achse ist von vornherein klar, dass innen und außen

$\phi = \phi(r, \vartheta)$ gilt. Man müsste daher nur nach den $P_\ell(\cos \vartheta)$ entwickeln.

2) Mit Gl. (25a) folgt

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{3}{\epsilon+2} \vec{E}_0 = \vec{E}_0 - \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \vec{E}_0$$

$$\vec{E}_a(\vec{r}) = \vec{E}_0 + \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{p}}{r^5}$$

1. Term \vec{E}_0 verursacht von freien Ladungen im Unendlichen,

2. Term verursacht von Polarisationsflächenladungen auf der Oberfläche der polarisierten dielektrischen Kugel.

Nach außen wirkt die polarisierte dielektrische Kugel

wie ein Punktdipol mit Moment \vec{p} im Kugelmittelpunkt.

Dass \vec{p} tatsächlich das gesamte induzierte elektrische Dipolmoment der dielektrischen Kugel ist, sieht man,

wenn man für $r < R$ die Polarisation $\vec{P}(\vec{r})$ berechnet und diese über die gesamte Kugel integriert:

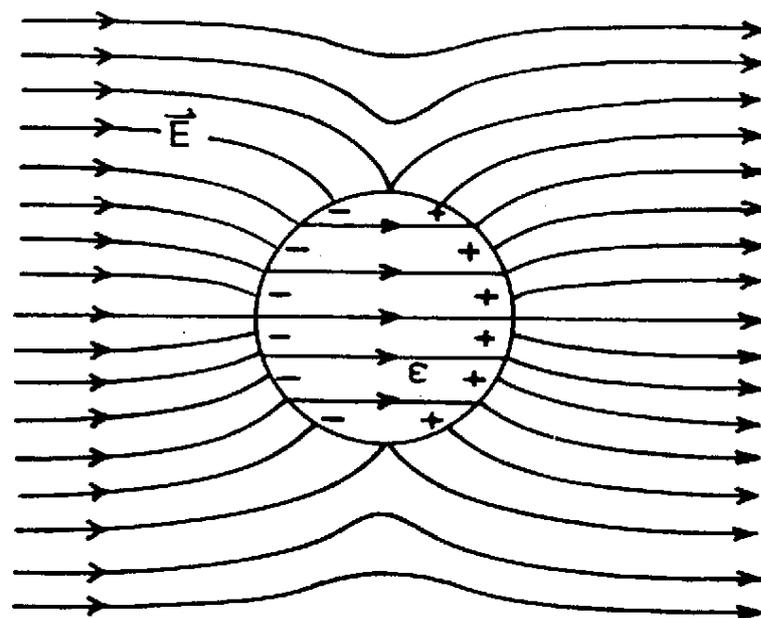
$$\vec{D}_i(\vec{r}) = \vec{E}_i(\vec{r}) + 4\pi \vec{P}(\vec{r}) = \epsilon \vec{E}_i(\vec{r}) \Rightarrow$$

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \vec{E}_0$$

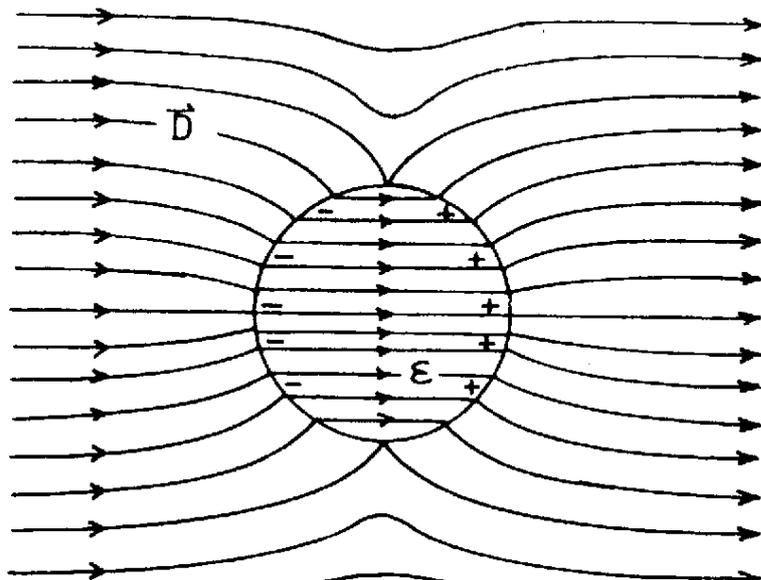
(homogene Polarisation $\Rightarrow \rho_p(\vec{r}) = -\text{div} \vec{P}(\vec{r}) = 0$)

$$\int_{\text{Kugel}} d^3r \vec{P}(\vec{r}) = \frac{4\pi R^3}{3} \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \vec{E}_0 = \vec{p} \quad \checkmark$$

Berechne selbst $\sigma_p(\mathcal{D})$ aus $\sigma_p(\mathcal{D}) = -\text{Div} \vec{P} = P_r(R, \mathcal{D})$.



Beachte die "Brechung" der Feldlinien.



zu Abschnitt XII. 2.B und Abschnitt XII. 4.B
 ~~~~~

In Abschnitt XII. 2.B sind die letzten 6 Zeilen ab  
 "Für die Berechnung..." und in Abschnitt XII. 4.B  
 sind die letzten 4 Zeilen ab "so dass für die Berechnung..."  
 zu streichen.

Während der in Abschnitt XI. 4.B abgeleitete Ausdruck  
 für die Energiedichte Gl. (XI. 63) nicht nur für homogene  
lineare Medien, sondern auch für Medien mit ortsabhängigem  
 $\epsilon$  und  $\mu$  gültig ist, wie Gl. (XI. 57) und Gl. (XI. 60)  
 zeigen, ist der Maxwellsche Spannungstensor von Gl. (XI. 65)  
ausschließlich für homogene lineare Medien gültig,  
 da der Schritt von Gl. (XI. 58) zu Gl. (XI. 61) bei  
 ortsabhängigem  $\epsilon$  und  $\mu$  nicht möglich ist!

Im Fall der Elektrostatik liefert der Spannungstensor Gl. (XI. 65)  
 daher gemäß

$$f_k(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x_i} T_{ik}^{(mat)}(\vec{r}) \quad (*)$$

nur den Term  $\rho(\vec{r}) E_k(\vec{r})$  — wie dies ja auch aus Gl. (XI. 61)  
 ersichtlich ist — und nicht den Ausdruck (34a) bzw. (34b)!

Mit der im Abschnitt II. 2.B für isotrope lineare Medien  
 gefundenen Kraftdichte Gl. (33b), welche auch für  
inhomogene Medien gilt, kann man natürlich mit Hilfe  
 von (\*) einen für isotrope inhomogene lineare

Dielektrika in der Elektrostatik gültigen Spannungstensor  
 $\underline{\underline{T}}_{(mat)}(\vec{r})$  ableiten (s. z.B. Becker/Sauter Bd.1).

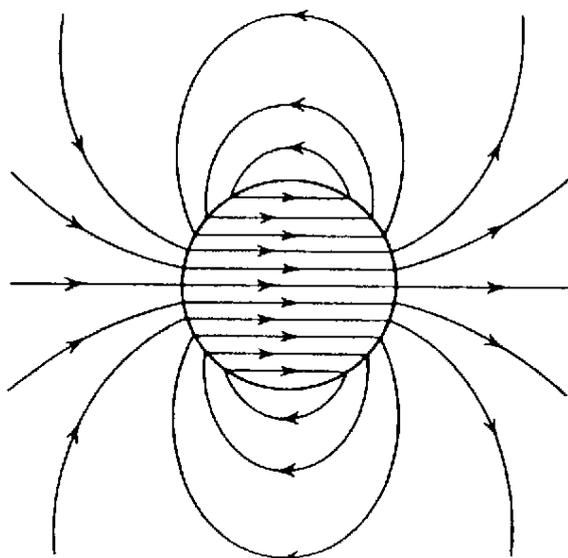
Im Fall der Magnetostatik nichtleitender Medien liefert der Spannungstensor Gl. (XI. 65) entsprechend nicht den Ausdruck von Gl. (78), sondern mer  $f_k(F) = 0$  — wie auch Gl. (XI. 61) zeigt, aus der  $\overset{\leftarrow}{T}_{(mat)}$  Gl. (XI. 65) abgelesen wurde. Ausgehend von Gl. (77b) kann man einen auch für inhomogene (allerdings isotrope) lineare Medien in der Magnetostatik gültigen Spannungstensor ableiten.

zu Abschnitt XII. 2.C

Wenn die Behandlung dieser zwei Beispiele nicht ausreichend genug ist, kann eine ausführlichere Behandlung bei Greiner Bd. 3, Beispiele 7.2 und 7.4, nachlesen oder sich die entsprechenden Vorlesungs-Folien kopieren.

zu Abschnitt XII.3.C

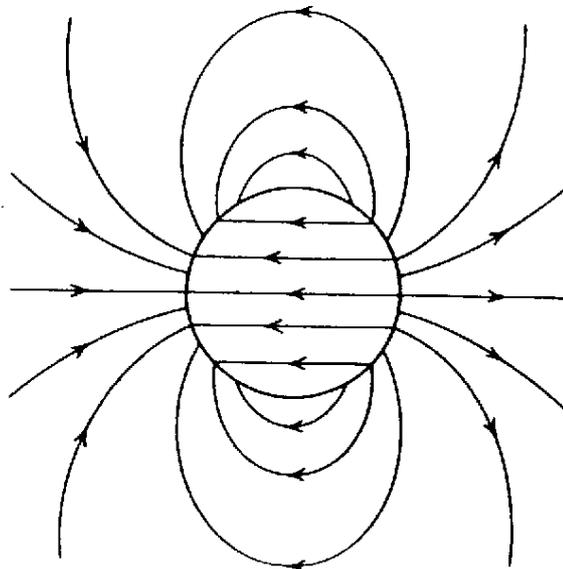
$\vec{B}$ -Feld



$\text{Div } \vec{B} = 0$ , aber

$$\text{Rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_M(\vec{r})$$

$\vec{H}$ -Feld



$\text{Rot } \vec{H} = \vec{0}$ , aber

$$\text{Div } \vec{H} = 4\pi M_r(\vec{r})$$

Es gilt

$$\underline{r < R: \vec{j}_M(\vec{r}) = c \text{rot } \vec{M}(\vec{r}) = \vec{0} \quad (\text{da } \vec{M} \text{ konstant f\"ur } r < R)}$$

$$\underline{r = R: \vec{j}_M(\vec{r}) = c \text{Rot } \vec{M} = - \left( \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{M} \right) \Big|_{r=R} \quad \text{selbst ausrechnen!}$$

zu Abschnitt XII.4.B

Siehe Seite XII-3, XII-4.

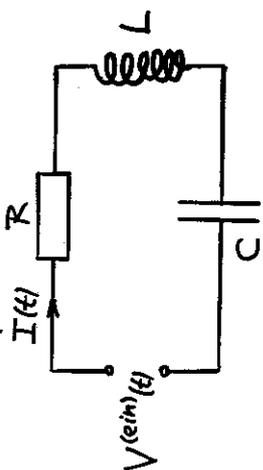
XIII. ELEKTROTECHNIK: LINEARE STROMKREISE  
MIT OHMSCHEN WIDERSTÄNDEN, KONDENSATOREN,  
INDUKTIONSSPULEN UND SPANNUNGSQUELLEN  
IM QUASISTATIONÄREN FALL

FRAGE: Wie kommt man von

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{D}(\vec{r}, t) &= 4\pi \rho(\vec{r}, t) \\ \text{div } \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0 \\ \text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{H}(\vec{r}, t) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{D}(\vec{r}, t) &= \epsilon \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\mu} \vec{B}(\vec{r}, t) \\ \vec{j}(\vec{r}, t) &= \sigma \vec{E}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

für den einfachen Stromkreis



auf

$$RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I(t') dt' = V^{(ein)}(t) \quad ?$$

Die Antwort auf diese Frage ist im Rahmen der theoretischen Physik wichtiger als das, was man in der Elektrotechnik mit derartigen Netzwerkgleichungen an Nützlichem und Interessantem "anstellen" kann. Da das Skriptum (wie fast alle Elektrodynamik-Bücher) auf diese Frage keine nachvollziehbare Antwort gibt, und die getroffenen Naturangabnahmen nicht transparent herausarbeitet, gebe ich im folgenden eine ausführlichere Darstellung. Diese folgt weitgehend

G. Ludwig Einführung in die Grundlagen der theoretischen Physik, Bd. 2, Kapitel VIII, § 6  
 Bertelsmann Universitätsverlag, Düsseldorf 1974

# XIII.1. Das quasistationäre elektromagnetische Feld

## XIII.1. A\*. Grundgleichungen

### 1) Lokalisierte Quellverteilung im Vakuum

In Coulombbeziehung gilt (s. Abschnitt II.2.C):

$$\underline{\underline{\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_C(\vec{r}, t) + \vec{E}_T(\vec{r}, t)}}$$

C... longitudinaler oder Coulomb-  
anteile

T... transversaler oder induzierter  
Anteil

mit

|                                                                                                           |                                                                                                                                             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\operatorname{div} \vec{E}_C(\vec{r}, t) = 4\pi \rho(\vec{r}, t)$                                        | $\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$                                                                                                |
| $\operatorname{rot} \vec{E}_C(\vec{r}, t) = \vec{0}$                                                      | $\operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}$ |
| $\operatorname{div} \vec{E}_T(\vec{r}, t) = 0$                                                            |                                                                                                                                             |
| $\operatorname{rot} \vec{E}_T(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$ |                                                                                                                                             |

Potentiale:  $\phi_C(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{A}_T(\vec{r}, t)$  mit  $\operatorname{div} \vec{A}_T(\vec{r}, t) = 0$

$$\vec{E}_C(\vec{r}, t) = -\operatorname{grad} \phi_C(\vec{r}, t), \quad \Delta \phi_C(\vec{r}, t) = -4\pi \rho(\vec{r}, t)$$

$$\phi_C(\vec{r}, t) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{E}_T(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_T(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \operatorname{rot} \vec{A}_T(\vec{r}, t)$$

$$\square \vec{A}_T(\vec{r}, t) = -\frac{4\pi}{c} \left[ \vec{j}(\vec{r}, t) - \frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \frac{\partial \phi_C(\vec{r}, t)}{\partial t} \right]$$

$$=: \vec{j}_T(\vec{r}, t)$$

$$\vec{A}_T(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}_T(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

quasistationärer Fall

d charakteristische Lineardimension der Quellverteilung

$\omega$  charakteristische Kreisfrequenz für die zeitliche Änderung der Quellverteilung,  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$  zugehörige Wellenlänge

ANNAHME  $d \ll \lambda$

z.B.: LW-Bereich:  $\omega \sim 10^6 \text{ Hz} = 1 \text{ MHz}$ ,  $d \ll 2 \text{ km}$

UKW-Bereich:  $\omega \sim 10^9 \text{ Hz} = 1 \text{ GHz}$ ,  $d \ll 2 \text{ m}$

⇒ Retardierung für Aufpunkte in nicht zu großer Entfernung von der Quellverteilung und insbesondere innerhalb der Quellverteilung vernachlässigbar, d.h.

$$\Rightarrow \vec{A}_T(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}_T(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Welcher Vernachlässigung in den FG für  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  entspricht dies? Es bedeutet, daß

$$\Delta \vec{A}_T(\vec{r}, t) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_T(\vec{r}, t)$$

gilt, also Vernachlässigung von

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_T(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_T(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

gegen den in  $\frac{4\pi}{c} \vec{j}_T(\vec{r}, t)$  enthaltenen Term  $\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_c(\vec{r}, t)}{\partial t}$

$$\frac{4\pi}{c} \vec{j}_T(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \text{grad} \frac{\partial \phi_c(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

⇒ Grundgleichungen für den quasistationären Fall (Vakuum)

nur Coulombanteil des Maxwellterms!

|                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\text{div} \vec{E}_c(\vec{r}, t) = 4\pi \rho(\vec{r}, t)$ $\text{rot} \vec{E}_c(\vec{r}, t) = \vec{0}$ $\text{div} \vec{E}_T(\vec{r}, t) = 0$ $\text{rot} \vec{E}_T(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$ | $\text{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$ $\text{rot} \vec{B}(\vec{r}, t) = \underbrace{\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_c(\vec{r}, t)}{\partial t}}_{\frac{4\pi}{c} \vec{j}_T(\vec{r}, t)}$ |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_c(\vec{r}, t) + \vec{E}_T(\vec{r}, t)$ $\vec{E}_c(\vec{r}, t) = -\text{grad} \phi_c(\vec{r}, t) \quad \text{mit} \quad \phi_c(\vec{r}, t) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t')}{ \vec{r} - \vec{r}' }$ $\left. \begin{aligned} \vec{E}_T(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_T(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \text{rot} \vec{A}_T(\vec{r}, t) \end{aligned} \right\} \quad \text{mit} \quad \vec{A}_T(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}_T(\vec{r}', t')}{ \vec{r} - \vec{r}' }$ |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Weg:  $\rho \rightarrow \phi_c \rightarrow \vec{E}_c$ ,  $\vec{j}, \vec{E}_c \rightarrow \vec{j}_T \rightarrow \vec{A}_T \rightarrow \vec{E}_T, \vec{B}$

2) Materie mit linearen MG, freie und gebundene Quellen lokalisiert

XIII-6

MG:  $\vec{P}(\vec{r}, t) = \chi_e \vec{E}(\vec{r}, t)$

quasistationärer Fall

konsequenterweise von  $\rho_p(\vec{r}, t) = -\text{div} \vec{P}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{j}_p(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{P}(\vec{r}, t)}{\partial t}$   
ebenfalls nur Coulombanteil beibehalten

Dann gilt ( $\rho, \vec{j}$  freie Quellen):

$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_c(\vec{r}, t) + \vec{E}_T(\vec{r}, t)$

$\chi_e \frac{\partial \vec{E}_c(\vec{r}, t)}{\partial t} + \chi_e \frac{\partial \vec{E}_T(\vec{r}, t)}{\partial t}$   
 $-\chi_e \text{div} \vec{E}_c(\vec{r}, t) - \chi_e \text{div} \vec{E}_T(\vec{r}, t)$

FG:

|                                                                                                   |                                                                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\text{div} \vec{D}_c(\vec{r}, t) = 4\pi \rho(\vec{r}, t)$                                        | $\text{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$                                                                                                  |
| $\text{rot} \vec{E}_c(\vec{r}, t) = \vec{0}$                                                      | $\text{rot} \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}_c(\vec{r}, t)}{\partial t}$ |
| $\text{div} \vec{E}_T(\vec{r}, t) = 0$                                                            | $=: \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t)$                                                                                               |
| $\text{rot} \vec{E}_T(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$ |                                                                                                                                       |

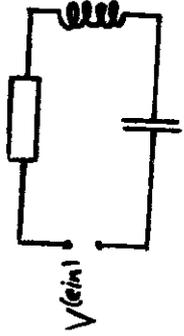
MG:

$\vec{D}_c(\vec{r}, t) = \epsilon \vec{E}_c(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu} \vec{B}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{j}(\vec{r}, t) = \sigma \vec{E}(\vec{r}, t)$

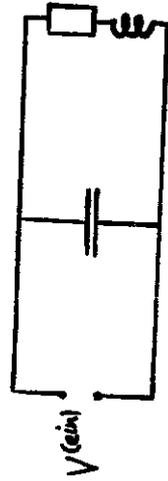
XIII-7

Diese Gleichungen bilden die physikalische Basis für die (näherungsweise) Behandlung elektrotechnischer Stromkreise.

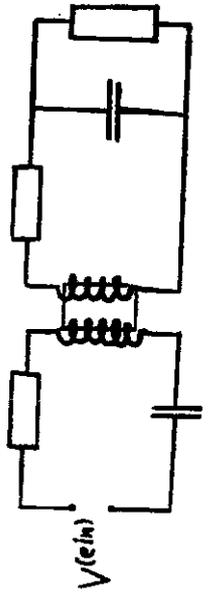
Einfachster Fall: ein linearer Stromkreis ohne Verzweigungen; z.B.



"Nächstkomplizierter" Fall: ein linearer Stromkreis mit Verzweigungen; z.B.



Allgemeiner Fall: mehrere, untereinander induktiv oder (und) kapazitiv gekoppelte Stromkreise mit oder ohne Verzweigungen; z.B.



Beachte: Die Forderung der Quasistationarität bedeutet für  $d \sim 1m \Rightarrow \omega \ll 10 \text{ MHz}$ .

XIII. 1. B\*. Linearer Stromkreis ohne Verzweigungen

Wegen  $\text{rot } \vec{H}(r,t) = \frac{1}{c} \vec{J}(r,t)$

ist die durch

$$\vec{J}(r,t) = \vec{j}(r,t) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}_c(r,t)}{\partial t}$$

definierte "Stromdichte" quellenfrei:

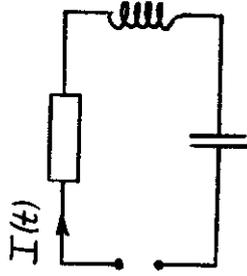
$$\text{div } \vec{J}(r,t) = 0$$

⇒

Die durch

$$I(t) = \int_{\text{Querschnitt}} d^2\vec{f} \cdot \vec{J}(r,t)$$

definierte "Stromstärke" ist für gegebenes  $t$  für jeden Querschnitt gleich (Querschnitt = Drahtquerschnitt bzw. Querschnitt eines Kondensators) [Umlaufsinn festlegen!]



Bemerkung zu  $\vec{J}(r,t)$ : Grund für "..."

$$\vec{J}(r,t) = \vec{j}(r,t) + \frac{\partial \vec{P}_c(r,t)}{\partial t} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}_c(r,t)}{\partial t}$$

$\vec{j}_p, c(r,t)$

Coulombanteil des  
Polarisationsstromes

Coulombanteil des  
Maxwelltermes

(des "Verschiebungs-  
stromes" des Vakuums")

Coulombanteil des sog.  
"Verschiebungsstromes"  
im Medium

Ferner ist wegen

$$\text{rot } \vec{E}_c(r,t) = \vec{0}$$

Gilt nur für  $\vec{E}_c$ ,  
nicht für  $\vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_T$ !

$$\oint \vec{E}_c(r,t) \cdot d\vec{r} = 0 \quad \text{für einen}$$

beliebigen geschlossenen Weg,  
insbesondere bei Integration über den  
(über die Spannungsquelle) geschlossenen  
Stromkreis

Die "integralen" Beziehungen

$$I(t) = \int_{\text{Querschnitt}} d^2\vec{f} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) \quad \text{gleich für alle Querschnitte}$$

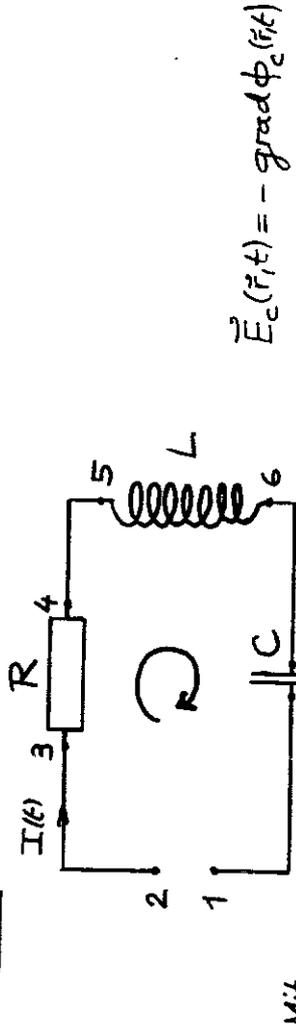
$$\oint \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = 0 \quad \text{bei Integration längs des Stromkreises inklusive Spannungsquelle}$$

nützen wir für die Ableitung des sog.

allgemeinen Ohmschen Gesetzes

$$RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I(t') dt' = V^{(ein)}(t)$$

aus.



$$\int_k^k \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} \equiv \int_j^j = \phi_{cj}(t) - \phi_{ck}(t) \quad \text{wird}$$

$$\int_3^4 + \int_4^5 + \int_5^6 + \int_6^7 + \int_7^8 + \int_8^1 = - \int_1^2$$

Mit  $\vec{E}_c(\vec{r}, t) = -\text{grad } \phi_c(\vec{r}, t)$

zu: "Summe aller Spannungsabfälle\*<sup>1)</sup> an Leitungen, Ohmschen Widerständen, Induktionsspulen und Kondensatoren = eingesprägte Spannung", s. später

Spannungsquelle

(hier)

Der interne Aufbau wird nicht behandelt und daher wird  $\int_1^2$  nicht berechnet. Vielmehr wird

$$- \int_1^2 \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = \phi_{c2}(t) - \phi_{c1}(t) =: V^{(ein)}(t)$$

gesetzt.

Symbolisch:  $\downarrow V^{(ein)}$

1 2

Bemerkung: Ist es nicht möglich, eine solche Beziehung

(näherungsweise) anzuschreiben, so steht dem

betreffenden Element des Stromkreises nicht

der Name "Spannungsquelle" zu. Die Frage

der Realisierung ist eine andere.

Zuleitungsdrähte, Ohmscher Widerstand,

Induktionsspule und Kondensator

Für diese "Wegstücke" wird  $\int_j^k \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r}$  berechnet,

was aber nur unter weiteren Näherungsannahmen

möglich ist.

Näherungsannahmen:

1) In den Zuleitungsdrähten, Ohmschen Widerständen und Spulendrähten wird

$$\vec{J}(r,t) = \vec{J}(r,t) = \sigma (\vec{E}_c(r,t) + \vec{E}_T(r,t))$$

gesetzt, d.h. der "Verschiebungsstrom" wird gegen den Leitungsstrom vernachlässigt.

Physikalisch bedeutet dies die Vernachlässigung der Kapazität dieser Stromkreisteile.

Bemerkung: Für einen Wechselstrom gilt ( $\omega$  Kreisfrequenz)

$$\left| \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| = \left| \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right| = \frac{\epsilon \omega}{4\pi \sigma}$$

die Näherung ist also für

$$\omega \ll \frac{4\pi \sigma}{\epsilon} \sim 10^{18} \text{ Hz für metallische Leiter}$$

gerechtfertigt. Wegen der Forderung der

Quasistationarität mussten wir aber schon für

$d \sim 1\text{m}$  die Erfüllung von  $\omega \ll 10\text{MHz} = 10^7\text{Hz}$  verlangen.

2) In den Zuleitungsdrähten und

Spulendrähten wird die Leitfähigkeit gegenüber

jener in den Ohmschen Widerständen als so

groß angenommen, daß in den Zuleitungs- und Spulendrähten

$$\vec{E}(r,t) = \vec{E}_c(r,t) + \vec{E}_T(r,t) = \vec{0}$$

gesetzt werden kann.

Physikalisch bedeutet dies die Vernachlässigung des Ohmschen Widerstandes dieser Stromkreisteile.

3) In den Zuleitungsdrähten wird überdies

$$\vec{E}_T(r,t) = \vec{0}$$

gesetzt.

Physikalisch bedeutet dies die Vernachlässigung der Auswirkungen der Induktion auf die Zuleitungen (Skineneffekt und Induktivität)

Bemerkung: In Abschnitt XIV.3.C wird gezeigt,

daß der Skineneffekt für einen Kupferdraht mit

1mm Durchmesser vernachlässigt werden kann,

wofür  $\omega \ll 10\text{kHz} = 10^4\text{Hz}$  ist.

Für  $\omega \gtrsim 20\text{kHz}$  spricht man i.a. von Hochfrequenztechnik.

4) Die Ohmschen Widerstände seien an solchen Stellen in den Stromkreis eingebaut, daß man (unter den angenommenen Bedingungen für die betrachteten Frequenzen) auch in ihnen

$$\vec{E}_T(\vec{r}, t) = \vec{0}$$

setzen kann.

Physikalisch bedeutet dies die Vernachlässigung der Induktion in den Ohmschen Widerständen.

5) Auch die Kondensatoren seien an solchen Stellen eingebaut, daß man zwischen ihren Platten

$$\vec{E}_T(\vec{r}, t) = \vec{0}$$

setzen kann.

Zuleitungsdrähte

$$\left. \begin{array}{l} 2) \\ 3) \end{array} \right\} \vec{E}_c(\vec{r}, t) = \vec{0}$$



$$\Rightarrow \int_j^k \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = \phi_{cj}(t) - \phi_{ck}(t) = 0$$

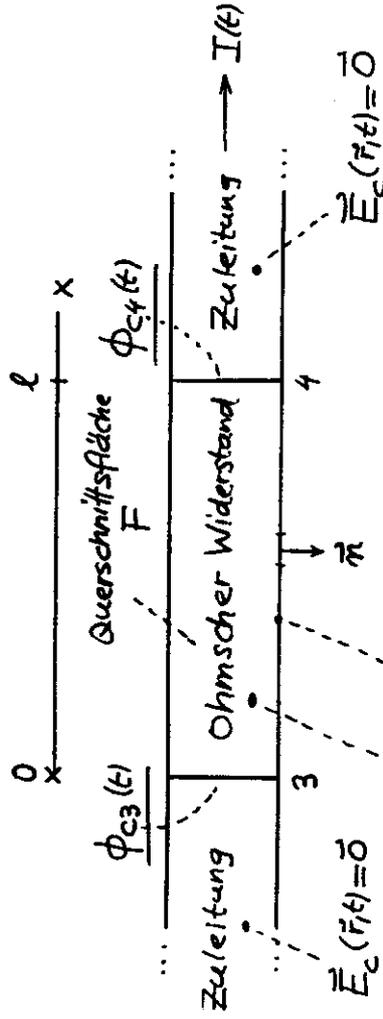
kein Spannungsabfall bzgl.  $\phi_c(\vec{r}, t)$

Ohmscher Widerstand



$$\int_3^4 \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = \phi_{c3}(t) - \phi_{c4}(t) = ?$$

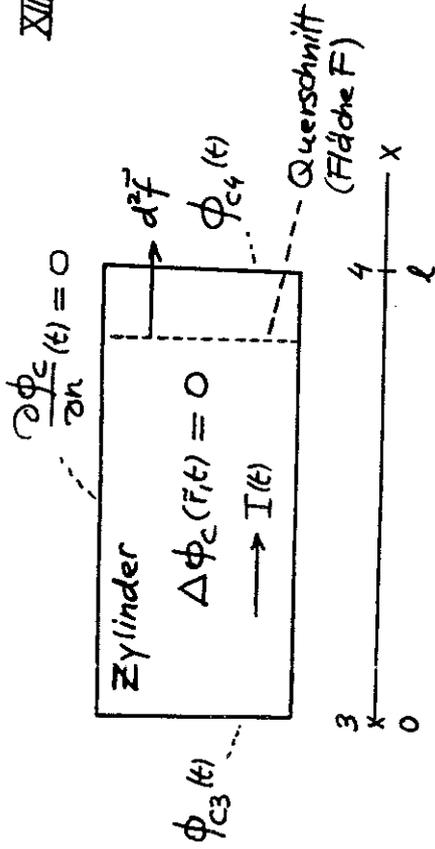
Spezialfall betrachtet: Kreiszyklindergeometrie



$$\vec{n} \cdot \vec{j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi_c}{\partial n}(t) = 0 \text{ auf Mantelfläche}$$

$$\text{div } \vec{j}(\vec{r}, t) = \text{div } \vec{j}(\vec{r}, t) = \sigma \text{ div } \vec{E}_c(\vec{r}, t)$$

$$= -\sigma \Delta \phi_c(\vec{r}, t) = 0$$



Zeige selbst: Daraus folgt, dass im Inneren des Ohmschen Widerstandes

ein homogenes zeitabhängiges Feld

$$\vec{E}_c(r,t) = \frac{1}{l} [\phi_{c3}(t) - \phi_{c4}(t)] \vec{e}_x$$

herrscht. ( $\phi_c = \phi_c(x,t)$  lineare Fkt. von x)

$$\Rightarrow \int_3^4 \vec{E}_c(r,t) \cdot d\vec{r} = \phi_{c3}(t) - \phi_{c4}(t) \quad \text{Wursten wir schon...}$$

Damit können wir aber auch den Zusammenhang zwischen Spannungsabfall am Widerstand und Stromstärke I(t) herstellen:

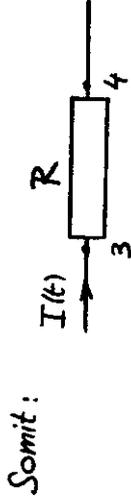
$$I(t) = \int_{\text{Querschnitt}} d^2\vec{f} \cdot \vec{j}(r,t) = \int_{\text{Querschnitt}} d^2\vec{f} \cdot \vec{j}(r,t)$$

$$= \int_{\text{Querschnitt}} d^2\vec{f} \cdot \vec{E}_c(r,t) = \left( \sigma F \frac{1}{l} \right) [\phi_{c3}(t) - \phi_{c4}(t)]$$

$$=: \frac{1}{R}, \quad R \text{ Ohmscher Widerstand (Zylinder)}$$

$$\phi_{c3}(t) - \phi_{c4}(t) = RI(t)$$

Ohmsches Gesetz im engeren Sinne



$$\int_3^4 \vec{E}_c(r,t) \cdot d\vec{r} = \phi_{c3}(t) - \phi_{c4}(t) = RI(t)$$

Spannungsabfall am Ohmschen Widerstand

Induktionsspule



im Spulendraht, wobei

im Spulendraht gemäß Näherung 2) (s. XIII-13)

$$\vec{E}(r,t) = \vec{E}_c(r,t) + \vec{E}_T(r,t) = \vec{0} \quad \text{gilt, somit:}$$

$$\int_5^6 \vec{E}_c(r,t) \cdot d\vec{r} = - \int_5^6 \vec{E}_T(r,t) \cdot d\vec{r}$$

Der technisch konstruktive Sinn einer "Induktions=Spule" besteht darin, im unmittelbaren Spulenbereich ein großes "induziertes" Feld  $\vec{E}_T(r,t)$  zu "erzeugen", während  $\vec{E}_T(r,t)$  außerhalb der Spule vernachlässigbar klein ist - ausgenommen bei der induktiven

Koppelung an einen anderen Stromkreis,  
 wo das "Hinauswirken" beabsichtigt ist  
 und durch einen gemeinsamen magnetisierbaren  
 Spulenkern mit einer Induktionsspule des  
 anderen Stromkreises erzielt wird.

Deshalb kann man statt  $\int_5^6 \vec{E}_T(r,t) \cdot d\vec{r}$

→  $\oint \vec{E}_T(r,t) \cdot d\vec{r}$  schreiben, wobei der Weg

durch den Spulendraht von "5" nach "6"

durch einen beliebigen Weg außerhalb der

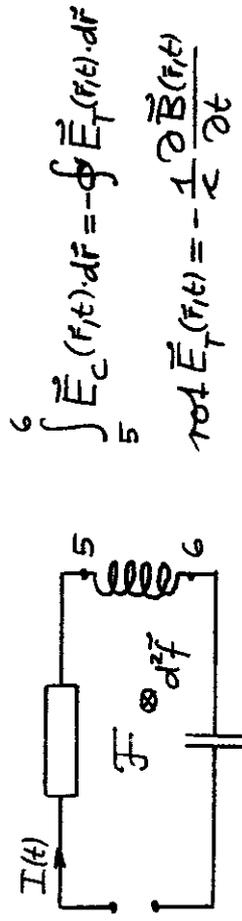
Spule verlaufenden Weg geschlossen wird.

Auf Grund der Näherungsannahmen 3), 4), 5)

und einer analogen Annahme für die

Spannungsquelle kann man auch über

den gegebenen Stromkreis integrieren:



⇒  $\oint \vec{E}_T(r,t) \cdot d\vec{r} = - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \vec{r} \cdot \vec{B}(r,t) =: V^{(ind)}$

$\int \vec{r} \cdot \vec{B}(r,t)$  magnetischer  
 Fluss durch  $\vec{F}$

In der Magnetostatik (stationärer  
 Strom) hatten wir in Abschnitt IV.3

$\text{div } \vec{B}(r) = 0$

$\text{rot } \vec{B}(r) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(r)$

⇒ für Stromkreis gilt  $\frac{1}{c} \Phi = LI$

mit dem Selbstinduktionskoeffizienten

$L = \frac{1}{c^2} \oint \oint \frac{d\vec{r} \cdot d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

HIER GILT:

$\text{div } \vec{B}(r,t) = 0$

$\text{rot } \vec{H}(r,t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(r,t)$

$\vec{B}(r,t) = \mu \vec{H}(r,t)$

⇒ für Stromkreis gilt

$\frac{1}{c} \Phi(t) = LI(t)$

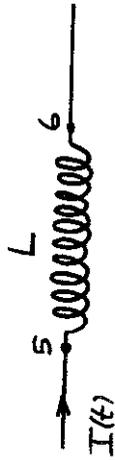
mit  $L = \frac{\mu}{c^2} \oint \oint \frac{d\vec{r} \cdot d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

Bemerkung: Unter den gegebenen Bedingungen

ist der Selbstinduktionskoeffizient L des  
Stromkreises (näherungsweise) der Spule

zuzuordnen, weshalb man L zur Spule schreibt.

Somit:

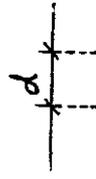


$$\int_5^6 \vec{E}_c(r,t) \cdot d\vec{r} = \phi_{c5}(t) - \phi_{c6}(t)$$

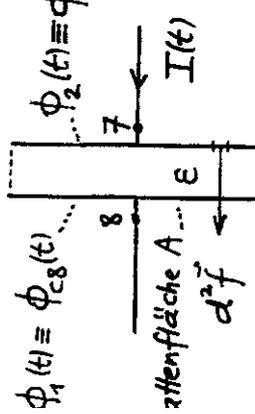
$$= \frac{1}{L} \frac{d\Phi(t)}{dt} = -V^{(ind)}(t) = L \frac{dI(t)}{dt}$$

Kondensator Spezialfall betrachtet: Plattenkonden-  
sator

$$\int_7^8 \vec{E}_c(r,t) \cdot d\vec{r} = \phi_{c7}(t) - \phi_{c8}(t)$$



$$I(t) = \int_{P_2} d^2\vec{f} \cdot \vec{J}(r,t) = \frac{1}{4\pi} \int_{P_2} d^2\vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{D}_c(r,t)}{\partial t} = \frac{d}{dt} \int_{P_2} d^2\vec{f} \cdot \frac{\vec{D}_c(r,t)}{4\pi} = \int_{P_2} d^2\vec{f} \cdot \epsilon(r,t)$$



$$Q_1(t) = Q(t) \quad Q_2(t) = -Q(t)$$

$$\Rightarrow Q(t) = - \int_{t_0}^t I(t') dt'$$

mit  $Q(t_0) = 0$

In der Elektrostatik hatten wir in Abschnitt III-3

$$\text{div } \vec{E}(r) = 4\pi\rho$$

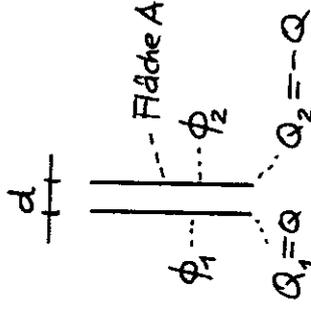
$$\text{rot } \vec{E}(r) = \vec{0}$$

$\Rightarrow$  für Plattenkondensator gilt

$$Q = C (\phi_1 - \phi_2)$$

mit der Kapazität

$$C = \frac{A}{4\pi d}$$



HIER GILT:

$$\text{div } \vec{D}_c(r,t) = 4\pi\rho(r,t)$$

$$\text{rot } \vec{E}_c(r,t) = \vec{0}$$

$$\vec{D}_c(r,t) = \epsilon \vec{E}_c(r,t)$$

$\Rightarrow$  für Plattenkondensator folgt

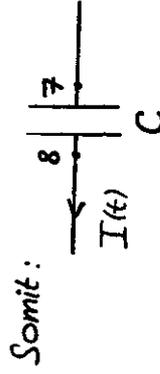
$$Q(t) = C (\phi_1(t) - \phi_2(t))$$

mit

$$C = \frac{\epsilon A}{4\pi d}$$

$$\phi_2(t) \parallel \phi_1(t)$$

$$\int_7^8 \vec{E}_c(r,t) \cdot d\vec{r} = \phi_{c7}(t) - \phi_{c8}(t)$$



$$= - \frac{1}{C} Q(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I(t') dt'$$



zu Abschnitt XIII. 2.A

zu Gl. (27): Die Summe  $\sum_n$  auf der linken Gleichungsseite ist über alle innerhalb einer Stromschleife ("Masche") befindlichen komplexen Widerstände  $Z_n(\omega)$  zu erstrecken;  $I_n$  ist dabei der durch  $Z_n(\omega)$  fließende Teilstrom (der natürlich in einer "Masche" für mehrere oder sogar alle  $n$  gleich sein kann).

zu Abschnitt XIII. 2.B

zu Gl. (39):

Die Definition von  $P_{\text{blind}}$  ist  $(I(t), V^{(\text{ein})}(t))$  s. Gl. (33)

$$P_{\text{blind}} := \left\langle \operatorname{Re} V^{(\text{ein})}(t) \cdot \operatorname{Re} \frac{dI(t)}{d(\omega t)} \right\rangle$$

Mit  $\frac{dI(t)}{d(\omega t)} = I_0 i e^{i\omega t} = -I_0 \sin \omega t + i I_0 \cos \omega t$

$$\operatorname{Re} \frac{dI(t)}{d(\omega t)} = -I_0 \sin \omega t$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} V^{(\text{ein})}(t) \cdot \operatorname{Re} \frac{dI(t)}{d(\omega t)} &= I_0 V_0 \sin \varphi \sin^2 \omega t \\ &\quad - I_0 V_0 \cos \varphi \sin \omega t \cos \omega t \end{aligned}$$

folgt dann Gl. (38):

$$\underline{P_{\text{blind}}} = \frac{1}{2} I_0 V_0 \sin \varphi = \underline{I_{\text{eff}} V_{\text{eff}} \sin \varphi}.$$

Ferner folgt dann aus Gl. (34)

$$P(t) = \underbrace{P_{\text{wirk}} (1 + \cos 2\omega t)}_{\text{"täglich zugeführt"}} - \underbrace{P_{\text{blind}} \sin 2\omega t}_{\text{"pendelt"}}$$

zu Gl. (40), (41):

$$\begin{aligned} \text{Mit } V^{(\text{ein})} &= Z(\omega)I = (R(\omega) + iX(\omega))I \\ &= \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \exp\left[i \arctan \frac{X(\omega)}{R(\omega)}\right] I \end{aligned}$$

folgt (Argument  $\omega$  weggelassen)

$$\underline{\tan \varphi = \frac{X}{R}}, \quad \underline{\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}}, \quad \underline{\sin \varphi = \frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}}}$$

$$V_{\text{eff}} = \sqrt{R^2 + X^2} I_{\text{eff}}$$

$$V_{\text{eff}} \cos \varphi = R I_{\text{eff}}, \quad V_{\text{eff}} \sin \varphi = X I_{\text{eff}}$$

$$\underline{P_{\text{wirk}}} = I_{\text{eff}} V_{\text{eff}} \cos \varphi = \underline{R I_{\text{eff}}^2} \quad (R = R(\omega))$$

$$\underline{P_{\text{blind}}} = I_{\text{eff}} V_{\text{eff}} \sin \varphi = \underline{X I_{\text{eff}}^2} \quad (X = X(\omega))$$

zu Abschnitt XIV. 1. C  
~~~~~

Da die Ansätze (11a,b) und die daraus gefolgerten Beziehungen (13a-d) formal sehr ähnlich aussehen wie die Ansätze (V. 7a,b) und die daraus gefolgerten Beziehungen (V. 8a,b) sind einige ergänzende Kommentare zu diesem Abschnitt zur Vermeidung von späteren Mißverständnissen angebracht.

Im Fall des Vakuums war \vec{k} ein reeller Vektor und es war $\vec{k}, \vec{E}, \vec{B} = \vec{H}$ ein orthogonales Dreiein (Rechtssystem) mit \vec{E}, \vec{B} "in Phase" und $|\vec{B}| = |\vec{E}|$.

Für festes t hatten \vec{E}, \vec{B} in allen Punkten einer festen Ebene $\perp \vec{k}$ gleiche Werte, weshalb die Bezeichnung ebene Welle eingeführt wurde.

In Materie ist \vec{k} i.a. ein komplexer Vektor, d.h.

$$\vec{k} = \vec{k}_r + i\vec{k}_i$$

mit zwei reellen Vektoren \vec{k}_r, \vec{k}_i .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{k} &\equiv \vec{k}^2 \equiv k^2 = k_r^2 - k_i^2 + 2i\vec{k}_r \cdot \vec{k}_i \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} \eta(\omega) \mu(\omega) \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} \left(\epsilon(\omega) + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right) \mu(\omega) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = e^{i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \cdot e^{-\vec{k}_i \cdot \vec{r}}$$

exponentielle Dämpfung in Richtung von \vec{k}_i

Folgerungen aus den Gln.:

1) $|\vec{H}_0| \neq |\vec{E}_0|$

2) \vec{E}_0, \vec{H}_0 i.a. nicht "in Phase"

3) Ebenen $\perp \vec{k}_r =$ Ebenen konstanter Phase

Ebenen $\perp \vec{k}_i$ (definiert, falls $\vec{k}_i \neq \vec{0}$) = Ebenen konstanter
Amplitude (Betrag)

Die Flächen, auf denen für festes t die Feldstärken selbst überall gleich sind, sind i.a. nicht einmal Ebenen!

Die Bezeichnung "ebene Wellen" in der Überschrift des Abschnittes gehört deshalb unter Anführungszeichen. Es handelt sich um einen (problematischen) Namen für beliebige Lösungen der Bauart (11a,b) mit (13a-d) und (14). Man spricht im Falle $\vec{k} = \text{komplex}$ zur Relativierung dieses Ausdruckes oft von "inhomogenen ebenen Wellen".

4) Dann und nur dann, falls

$\sigma = 0, \epsilon(\omega), \mu(\omega)$ reell

(Isolator und ω aus Transparenzbereich)

ist, ist $k = \sqrt{k_i \cdot k_i}$ reell, und es ist

$\vec{k} = \text{reeller Vektor möglich!}$

Ist \vec{k} ein reeller Vektor, so ist $\vec{k}, \vec{E}, \vec{H}$ ein orthogonales Dreiein (Rechtssystem) mit \vec{E}, \vec{H} in Phase und $|\vec{H}| = \sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{\mu(\omega)}} |\vec{E}|$. Für festes t haben dann $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}$ in allen Punkten einer festen Ebene $\perp \vec{k}$ gleiche Werte, und es handelt sich daher um eine gewöhnliche ("homogene") ebene Welle.

5) Die FG + MG besitzen aber auch im Fall $\sigma=0, \epsilon(\omega), \mu(\omega)$ reell "inhomogene ebene Wellen" als Lösungen.

Aus

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{k} &= k^2 = k_r^2 - k_i^2 + 2i k_r k_i \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \mu(\omega) \quad \text{reell} > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon(\omega) \mu(\omega)} \quad \text{reell}$$

folgt, daß dann lediglich (neben $k_r^2 - k_i^2 = k^2$)

$$k_r k_i = 0$$

erfüllt sein muß.

Eine derartige "inhomogene ebene Welle" spielt bei der Totalreflexion im Abschnitt XIV.2.D eine Rolle!

Das exponentielle Abklingen hat dann nichts mit Dissipation (Extinktion) zu tun!

zu Abschnitt XIV.2.A

zum Absatz vor Gl. (20):

Die in diesem Absatz angeführten Beziehungen genügen noch nicht zur Erfüllung der FG + MG in den beiden Medien. Es müssen noch die Bedingungen

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0, \quad \vec{k}'' \cdot \vec{E}_0'' = 0, \quad \vec{k}' \cdot \vec{E}_0' = 0$$

hinzugenommen werden, welche auch später durch die "Zerlegungen" von Gl. (35), (37) erfüllt werden.

zu Gl. (26) und den daraus gezogenen Folgerungen
bis zum Ende des Abschnitts:

Alle Ausführungen im Skriptum gelten in der dort diskutierten Form uneingeschränkt, wofem

entweder a) das Medium "2" das optisch dichtere ist, d.h. $n'(\omega) > n(\omega)$ gilt,

oder b) das Medium "2" zwar optisch dünner ist, d.h. $n'(\omega) < n(\omega)$ gilt, aber der Einfallswinkel α kleiner als der in Gl. (51) definierte Grenzwinkel α_g ist

(α_g Grenzwinkel der Totalreflexion)

Ist $n'(\omega) < n(\omega)$ und $\alpha > \alpha_g = \arcsin \frac{n'(\omega)}{n(\omega)}$, so

folgt aus den Gln. (20) und (26) folgendes:

Die Aussagen bzgl. \vec{k}'' , und damit das Reflexionsgesetz, bleiben unverändert. Bzgl. \vec{k}' gibt es aber eine wesentliche
Änderung.

$$\vec{k} = (k_x, 0, k_z) = k (\sin\alpha, 0, \cos\alpha) \quad \text{Vorgegeben}$$

$$\vec{k}' = (k_x, 0, k_z') \quad \text{gesucht}$$

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{k}' &\equiv k'^2 = k_x^2 + k_z'^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n'^2(\omega) \\ &\stackrel{\parallel}{=} k^2 \sin^2\alpha + k_z'^2 = \underbrace{\frac{\omega^2}{c^2} n^2(\omega)}_{k^2} \frac{n'^2(\omega)}{n^2(\omega)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow k_z'^2 = k^2 \left(\frac{n'^2(\omega)}{n^2(\omega)} - \sin^2\alpha \right) < 0 \Rightarrow k_z' \text{ imaginär!}$$

$$\parallel \sin^2\alpha_g$$

\vec{k}' komplexer Vektor

Welle im Medium "2"

"inhomogene ebene Welle"

("Dichtheit"; s. später)

Als komplexen Vektor kann man \vec{k}' natürlich nicht in der xy -Ebene durch einen Vektorpfeil repräsentieren und man kann auch nicht sagen, dass \vec{k}' mit \vec{k} und \vec{k}'' in einer Ebene liegt.

Stellt man \vec{k}' in der Form (27), d.h.

$$\vec{k}' = k' (\sin\alpha', 0, \cos\alpha')$$

dar, so folgt zwar mathematisch formal wieder das "Brechungsgesetz" Gl. (31b), doch ist dann $\cos\alpha'$ imaginär, also α' ein komplexer Winkel, was sich auch in

$$\sin\alpha' = \frac{\sin\alpha}{\frac{n'(\omega)}{n(\omega)}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_g} > 1$$

manifestiert. Beachte, dass aber $\vec{E}'(\vec{r}, t)$, $\vec{D}'(\vec{r}, t)$, $\vec{H}'(\vec{r}, t) = \vec{B}'(\vec{r}, t)$ auch für das erhaltene komplexe \vec{k}' Lösung der FG+MG

ist! Die Interpretation der entsprechenden inhomogenen Welle ergibt sich durch Einsetzen von \vec{k}' in $e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega t)}$ (s. Gl. (53)).

Welchen Sinn hat es, für den komplexen \vec{k}' -Vektor ebenfalls $\vec{k}' = k'(\sin \alpha', 0, \cos \alpha')$ zu schreiben, wenn dann α' komplex ist und daher auch keine anschauliche Bedeutung besitzt?

Würde man nicht so vorgehen, so müsste man die gesamte Rechnung der Abschnitte XIV.2.B, XIV.2.C

zweimal ausführen: einmal für den Fall mit reellem \vec{k}' -Vektor (Reflexion und Brechung), einmal für den Fall mit komplexem \vec{k}' -Vektor (Totalreflexion).

Dies kann man sich ersparen, indem man auch im letzteren Fall $\vec{k}' = k'(\sin \alpha', 0, \cos \alpha')$ und

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{n'(\omega)}{n(\omega)} \quad \text{formal benützt. Da Sinus und Cosinus}$$

analytische Funktionen im Komplexen sind, gelten alle auf diese Weise abgeleiteten Formeln für beide Fälle, und man muss die Fallunterscheidung erst am Ende der Rechnung machen.

zu Abschnitt XIV.2.B

zu Gl. (37):

Im Fall der Totalreflexion ist \underline{k}' ein komplexer Vektor und man kann in der Zerlegung (37) von \vec{E}_0' natürlich \underline{E}_p' nur unter Anführungszeichen als "Parallelkomponente" bezeichnen. Beachte aber, daß die Bedingung $\underline{k}' \cdot \vec{E}_0' = 0$ mit dieser Zerlegung von \vec{E}_0' auch für komplexes \underline{k}' (wie erforderlich) erfüllt ist.

zur Ableitung der Gln. (39), (40):

Zur Ableitung dieser Gln. wurden nur die Stetigkeitsbedingungen für die Tangentialkomponenten von \vec{E} und \vec{H} verwendet; Gl. (32) (Stetigkeit der Normalkomponente von \vec{D}) und die z-Komponente von Gl. (34) (Stetigkeit der Normalkomponente von $\vec{B} = \vec{H}$) wurden nicht ausgewertet.

Falls die Lösungsansätze für die Felder in den Medien 1,2 nicht zum Widerspruch führen sollen (womit sie wertlos wären), so müssen die nicht ausgewerteten Anschluss-
Reflexions- und
bedingungen (zusammen mit dem Brechungsgesetz) zu Gln. führen, welche zu den bereits erhaltenen Gln. (39), (40) redundant sind. Daß sie das tatsächlich sind, ist zu zeigen.

$$\text{Es gilt: } \vec{E}_0 \cdot \vec{e}_z = E_p \sin \alpha$$

$$\vec{E}_0'' \cdot \vec{e}_z = E_p'' \sin \alpha''$$

$$\vec{E}_0' \cdot \vec{e}_z = E_p' \sin \alpha'$$

$$(\vec{k} \times \vec{E}_0) \cdot \vec{e}_z = E_s k \sin \alpha$$

$$(\vec{k}'' \times \vec{E}_0'') \cdot \vec{e}_z = E_s'' k'' \sin \alpha''$$

$$(\vec{k}' \times \vec{E}_0') \cdot \vec{e}_z = E_s' k' \sin \alpha'$$

Somit folgt aus Gl. (32):

$$\underbrace{\varepsilon(\omega)}_{\frac{c^2}{\omega^2} k^2} (\vec{E}_0 + \vec{E}_0'') \cdot \vec{e}_z = \underbrace{\varepsilon'(\omega)}_{\frac{c^2}{\omega^2} k'^2} \vec{E}_0' \cdot \vec{e}_z$$

$$E_p \sin \alpha + E_p'' \sin \alpha'' = E_p' \sin \alpha'$$

$$\underbrace{\sin \alpha''}_{\sin \alpha} \quad \underbrace{\sin \alpha'}_{\frac{k}{k'} \sin \alpha}$$

$$k^2 (E_p + E_p'') \sin \alpha = k'^2 \frac{k}{k'} \sin \alpha E_p'$$

$$k (E_p + E_p'') = k' E_p' \quad \text{ist wegen } k'' = k \text{ mit (40b) identisch } \checkmark$$

Und aus der z-Komponente von Gl. (34) folgt:

$$\underbrace{(\vec{k} \times \vec{E}_0) \cdot \vec{e}_z}_{E_s k \sin \alpha} + \underbrace{(\vec{k}'' \times \vec{E}_0'') \cdot \vec{e}_z}_{E_s'' k'' \sin \alpha''}_{k \sin \alpha} = \underbrace{(\vec{k}' \times \vec{E}_0') \cdot \vec{e}_z}_{E_s' k' \sin \alpha'}_{k \sin \alpha}$$

$$E_s + E_s'' = E_s' \quad \text{ist mit (39b) identisch } \checkmark$$

zu Abschnitt XIII.2.C

Ergänzungen zu Reflexions- und Transmissionskoeffizient

<f> Zeitmittel von $f(t)$ über eine Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Definition: Reflexions- und Transmissionskoeffizient

$$R = \frac{\langle -S_z'' \rangle}{\langle S_z \rangle}, \quad T = \frac{\langle S_z' \rangle}{\langle S_z \rangle}$$

Beachte die Orientierung der z-Achse in Abb. 14.1!

(Im Falle der Totalreflexion ist die Zeichnung hinsichtlich \vec{k}' obsolet.)

Satz: Es gilt

$$R = \frac{|\vec{E}_0''|^2}{|\vec{E}_0|^2} = \frac{|E_p''|^2 + |E_s''|^2}{|E_p|^2 + |E_s|^2}, \quad T = 1 - R$$

Beweis:

$$1) \quad S_z = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H})_z = \frac{c}{4\pi} (E_x H_y - E_y H_x)$$

$$\begin{aligned} E_x H_y &= (E_{0x} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c.) (H_{0y} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c.) \\ &= E_{0x} H_{0y}^* + E_{0x} H_{0y} e^{2i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c. \end{aligned}$$

$$\langle E_x H_y \rangle = E_{0x} H_{0y}^* + c.c.$$

$$\langle S_z \rangle = \frac{c}{4\pi} (\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^*)_z + c.c.$$

$$\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^* = \vec{E}_0 \times \frac{c}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}_0^*) = \frac{c}{\omega} \vec{k} |\vec{E}_0|^2,$$

$$\text{da } \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$$

$$(\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^*)_z = \underbrace{\frac{c}{\omega} k \cos \alpha}_n |\vec{E}_0|^2$$

$$\langle S_z \rangle = \frac{\kappa}{2\pi} n(\omega) \cos \alpha |\vec{E}_0|^2 \quad \text{und analog}$$

$$\langle -S_z'' \rangle = \frac{\kappa}{2\pi} n(\omega) \cos \alpha |\vec{E}_0''|^2 \quad (\vec{k}'' = k(\sin \alpha, 0, -\cos \alpha))$$

$$\Rightarrow R = \frac{\langle -S_z'' \rangle}{\langle S_z \rangle} = \frac{|\vec{E}_0''|^2}{|\vec{E}_0|^2} \quad \checkmark$$

2) $S_{1z} = S_{2z}$ für $z=0$, da Tangentialkomponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke stetig

$$\Rightarrow \langle S_{1z} \rangle = \langle S_{2z} \rangle \quad \text{für } z=0$$

$$\quad \quad \quad \parallel$$

$$\quad \quad \quad S'_z$$

Zeige selbst:

$$\langle S_{1z} \rangle = \langle S_z \rangle + \langle S_z'' \rangle$$

(Interferenzterm ist null!)

Damit folgt dann

$$\langle S_z \rangle + \langle S_z'' \rangle = \langle S'_z \rangle \quad \left| \frac{1}{\langle S_z \rangle} \right.$$

(Da alle Terme von z unabhängig sind \rightarrow s. oben bzgl. $\langle S_z \rangle$ und $\langle S_z'' \rangle$ - muß man hier nicht mehr "für $z=0$ " dazuschreiben.)

$$1 + \frac{\langle S_z'' \rangle}{\langle S_z \rangle} = \frac{\langle S'_z \rangle}{\langle S_z \rangle} \quad \checkmark$$

$$\quad \quad \quad \underbrace{\quad \quad} \quad \quad \underbrace{\quad \quad}$$

$$\quad \quad \quad -R \quad \quad \quad T$$

zu Abschnitt XIV. 2. D

Ergänzung zur Totalreflexion:

Nach Gl. (53) ist die Phasengeschwindigkeit der im (optisch dünneren) Medium 2 in x-Richtung laufenden inhomogenen Welle durch

$$v_{ph}' = \frac{\omega}{k'} \frac{\sin \alpha_g}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon'(\omega)}} \frac{\sin \alpha_g}{\sin \alpha} < \frac{c}{\sqrt{\epsilon'(\omega)}}$$

gegeben, und für die "Eindringtiefe" der Welle gilt

$$d' = \frac{1}{k' \sqrt{\left(\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_g}\right)^2 - 1}} = \frac{\sin \alpha_g}{\sqrt{\epsilon'(\omega)} \frac{\omega}{c} \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha_g}}$$

1) $\alpha \downarrow \alpha_g$: $v_{ph}' \uparrow \frac{c}{\sqrt{\epsilon'(\omega)}}$, $d \uparrow \infty$

2) α nicht zu nahe bei α_g (einige Winkelminuten Differenz genügen): $d \sim \lambda' = \frac{2\pi}{k'}$ ("die Haut")

Die Beziehungen (s. Gl. (54))

$$|E_p''| = |E_p| , \quad |E_s''| = |E_s|$$

folgen mit Gl. (52b) unmittelbar aus den Fresnelschen Formeln (42) und (45), da die Quotienten auf den rechten Gleichungsseiten, ^{dann} beide die mathematische

Form

$$\frac{a - ib}{a + ib} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} e^{-i \arctan \frac{b}{a}}}{\sqrt{a^2 + b^2} e^{i \arctan \frac{b}{a}}} = e^{-2i \arctan \frac{b}{a}}$$

(allerdings mit verschiedenen a, b) besitzen.

Damit folgt aber (s. Seite XIV-9)

$$\underline{R=1, T=0}, \text{ deshalb der Name } \underline{\text{"Totalreflexion"}}$$

Wie ist aber dann die im Medium 2 in x-Richtung strömende Energie ins Medium 2 hineingekommen?

Während des dem Einschalten der Lichtquelle folgenden Einschwingvorganges ist Energie durch die Grenzfläche hindurchgeströmt. (Bei endlichem Querschnitt des einfallenden Strahls erfolgt Energieeintritt und Energieaustritt in schmalen Randzonen des Strahls ^{stationären Fall,} auch im "dazwischen" läuft diese Energie im Medium 2 die Grenzfläche entlang.)

zu Abschnitt XIV. 3. A

zu Gl. (61): Quadrieren von Gl. (60) liefert die Gl.

$$n^2 - \kappa^2 = \epsilon\mu, \quad 2n\kappa = \frac{4\pi\sigma}{\omega} \mu \Rightarrow$$

$$n^2 | \quad n^2 - \epsilon\mu - \kappa^2 = 0, \quad n^4 - \epsilon\mu n^2 - \underbrace{n^2 \kappa^2}_{\left(\frac{2\pi\sigma}{\omega} \mu\right)^2} = 0$$

Wählt man jene Lösung dieser quadratischen Gl. für n^2 , die für $\sigma \downarrow 0$ gegen $\epsilon\mu$ strebt, so erhält man Gl. (61a), und mit $n^2 - \kappa^2 = \epsilon\mu$ folgt Gl. (61b).

zu Abschnitt XIV. 3. B

zu Gl. (68):

Quadrieren von Gl. (64b) gibt

$$1 - \left(\frac{\sin \alpha}{n + ik} \right)^2 = q^2 e^{2i\gamma} = q^2 (\cos 2\gamma + i \sin 2\gamma)$$

$$= 1 - \frac{\sin^2 \alpha (n - ik)^2}{(n^2 + k^2)^2} = 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{(n^2 + k^2)^2} (n^2 - k^2 - 2in k)$$

\Rightarrow Gl. (68)

Bemerkung: Es ist jene Lösung von Gl. (68) zu wählen, für die in Gl. (65) der letzte Faktor für positives z exponentiell abklingt.

Ergänzung (zur Vertiefung des Verständnisses, "was passiert"):

zu Gl. (65): Die Strecke, auf der die Amplitude auf den e -ten Teil abklingt, heißt Eindringtiefe δ .

Es gilt

$$\delta = \delta(\alpha) = \frac{\kappa}{\omega q (n \sin \gamma + k \cos \gamma)} \quad \text{Beachte: } q = q(\alpha)$$

$$\gamma = \gamma(\alpha)$$

(s. Gl. (68))

Nach elementarer, aber mühevoller Rechnung

findet man (wenn man außerdem $\mu = 1$ setzt)

für schlechte Leiter, d.h. $\frac{4\pi\sigma}{\omega} \ll \epsilon$

$$\delta(\alpha) \approx \frac{\kappa}{2\pi\sigma} \sqrt{\epsilon - \sin^2 \alpha} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow +\infty \\ \sigma \downarrow 0 \end{array}$$

α fest: δ wird mit wachsendem σ kleiner

σ fest: δ wird mit wachsendem α kleiner

für sehr gute Leiter, d.h. $\frac{4\pi\sigma}{\omega} \gg \epsilon$ (Metalle)

$$\delta(k) \approx \frac{\kappa}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}} \quad \text{sehr klein ("Skinneffekt")}$$

s. Abschnitt XIV.3.C)

zu Gl. (67): Analog: Elementare, aber längere Rechnung.

Mit $\mu=1$ erhält man

für schlechte Leiter

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta'} \approx \frac{\sqrt{\epsilon'}}{1 - \frac{\epsilon}{\epsilon - \sin^2 \alpha} \frac{1}{8} \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2}$$

$\sigma=0$: Dielektrikum (Isolator)

$\alpha' = \beta'$, gewöhnliches Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \sqrt{\epsilon'} = n \quad (\text{Übergang Vakuum} \rightarrow \text{Medium})$$

α fest: β' wird mit wachsendem σ kleiner

für sehr gute Leiter (Metalle):

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta'} \approx \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}} \Rightarrow \sin \beta' \approx \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}} \approx \beta' \approx 0$$

Sehr kleiner Brechungswinkel, die Welle läuft bei beliebigem Einfallswinkel α praktisch in z -Richtung und wird auf einer sehr kurzen Strecke extinguiert.

Zu Abschnitt XIV.3.C

Ergänzung zu Gl. (74a), (74b) und Gl. (76), (78):

$$I = 2\pi\sigma \int_0^R dr r E(r)$$

$$\underbrace{\frac{d^2 E(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE(r)}{dr}}_{\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE(r)}{dr} \right)} + \frac{\alpha^2}{\delta^2} E(r) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE(r)}{dr} \right)$$

$$rE(r) = - \frac{\delta^2}{2i} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE(r)}{dr} \right)$$

$$I = i\pi\sigma\delta^2 \left[r \frac{dE(r)}{dr} \right]_{r=0}^{r=R}$$

$$\underline{I = i\pi\sigma\delta^2 R E'(R)}$$

$$\Rightarrow \underline{Z(\omega) := \frac{E(R)l}{I} = -i \frac{l}{\pi R \sigma \delta^2} \frac{E(R)}{E'(R)}}$$

und mit Gl. (77)

$$\underline{\frac{Z(\omega)}{Z(0)} = -i \frac{R}{\delta^2} \frac{E(R)}{E'(R)}}$$

Im Fall $\delta \ll R$ gilt Gl. (75), woraus

$$E'(R) = \frac{1-i}{\delta} E(R) \Rightarrow \frac{1}{\delta} \frac{E(R)}{E'(R)} = \frac{1+i}{2}$$

und (76), (78) folgt.

zu Gl. (72), (75):

Es gilt (s. Jahnke-Emde-ÜbSch etc.)

$$J_0((1+i)\xi) \underset{\xi \rightarrow +\infty}{\propto} \frac{1}{\sqrt{\xi}} e^{-i\xi} e^{\xi}$$

zu Abschnitt XIV.1.A

zu Gl. (2a):

Nach Abschnitt XIV.1.C gilt für eine gewöhnliche ebene Welle (Kreiswellenzahlvektor \vec{k} reell, $\vec{k} = k \vec{n}$ mit reellem Einheitsvektor \vec{n} = Ausbreitungsvektor)

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.}$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.}$$

$$\vec{k} = k \vec{n}, \quad k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} \cdot \vec{E}_0 = 0$$

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \frac{\omega}{c} \mu \vec{H}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{H}_0 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\vec{n} \times \vec{E}_0)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \underbrace{(\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^*)}_{\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\vec{E}_0|^2 \vec{n}} + \underbrace{(\vec{E}_0 \times \vec{H}_0)}_{\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \vec{E}_0^2 \vec{n}, \text{ da } \vec{n} \cdot \vec{E}_0 = 0} e^{2i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (|\vec{E}_0|^2 + \vec{E}_0^2 e^{2i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.}) \vec{n}$$

$$|\vec{S}(\vec{r}, t)| = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (|\vec{E}_0|^2 + \vec{E}_0^2 e^{2i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.})$$

$$I = \langle |\vec{S}(\vec{r}, t)| \rangle = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} 2|\vec{E}_0|^2 = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |2\vec{E}_0|^2$$

zu Abschnitt XIV.1.B

zu Gl. (9): Verallgemeinerung auf beliebige Lichtwege $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$

$$\delta_1 - \delta_2 = \frac{\omega}{c} \left(\int_{\mathcal{C}_1} n ds - \int_{\mathcal{C}_2} n ds \right) \quad (\text{Dabei kann } n \text{ längs der Wege variieren.})$$

zu Abschnitt XV.2

Dieser Abschnitt "verträgt" einige zusätzliche Erklärungen, Diskussionen und Abbildungen. Um nicht alles doppelt schreiben zu müssen, kopiere ich meine VO-Folien.

Diese enthalten implizit auch die nötigen Korrekturen des Skriptums, die ich vorweg noch extra anfüge.

zu Abschnitt XV.2.A

Nach Gl. (18): Bei der Auswertung von Gl. (18) unterscheidet man für $r \gg d \gg \lambda$, $R \gg d \gg \lambda$ die Fälle

$$a) \frac{r}{d} \gg \frac{d}{\lambda} \gg 1, \frac{R}{d} \gg \frac{d}{\lambda} \gg 1 \quad (\text{Fraunhoferbeugung}),$$

$$b) \frac{r}{d} \not\gg \frac{d}{\lambda}, \frac{R}{d} \not\gg \frac{d}{\lambda} \quad (\text{Fresnelbeugung}),$$

wobei r (R) die Entfernung des Aufpunktes (oder Lichtquelle) vom Mittelpunkt der Öffnung S_1 ist.

zu Abschnitt XV.2.C

Warum habe ich in der VO statt eines in y -Richtung unendlich langen Spaltes der Breite a eine Rechtecks-
Öffnung mit den Seiten a, b betrachtet?

Für die Fraunhoferbeugung an einer Rechtecksöffnung

mit $b > a$ müssen die VS $\frac{r}{b} \gg \frac{b}{\lambda} \gg 1$ und

$\frac{R}{b} \gg \frac{b}{\lambda} \gg 1$ erfüllt sein. Man kann also nicht $b = +\infty$

setzen und r und R endlich lassen! Wachsendes b

erfordert entsprechend wachsendes r, R . Für den im Skriptum angenommenen Fall $u_0(r) = \frac{e^{ik|\bar{R}-r|}}{|\bar{R}-r|}$ (s. Gl. (19))

würde also mit $b \rightarrow +\infty$ $u_0(0) = \frac{e^{ikR}}{R}$ gegen null streben, d.h. die Konstante C in Gl. (30) wäre null!

Ich habe deshalb auf den Folien $u_0(r) = A_0 \frac{e^{ik|\bar{R}-r|}}{|\bar{R}-r|}$ geschrieben. Lässt man ~~den~~ b über alle Grenzen wachsen, so kann man dann ein endliches C in Gl. (30) erhalten, indem man auch $|A_0|$ entsprechend wachsen lässt.

Bemerkung zu Abschnitt XV.2.B

In der Literatur wird i.a. Gl. (25) als Babinet'sches Prinzip oder Theorem bezeichnet.

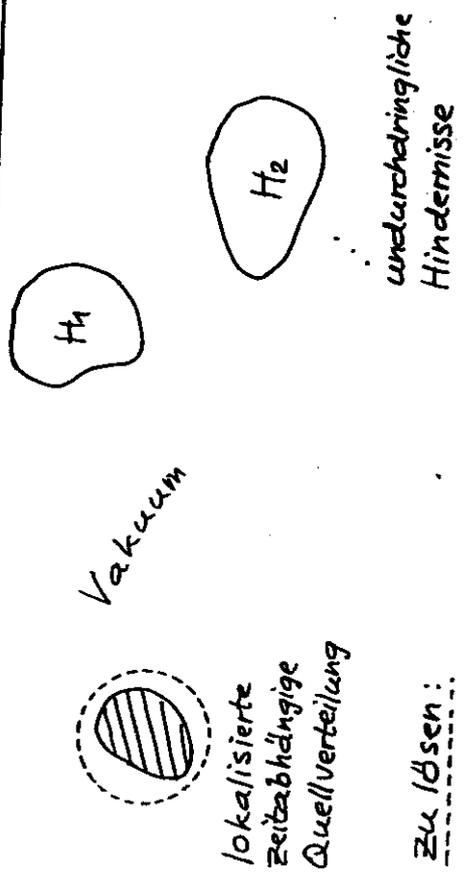
! ACHTUNG : Es folgt Seite XV-11, da Numerierung der Folien beibehalten. !

XV. 2. Beugungstheorie

Beugungsproblem in der Maxwelltheorie

a) im weiteren Sinn :

Bestimmung des elm. Feldes einer lokalisierten zeitabhängigen Quellverteilung im Vakuum bei Anwesenheit undurchdringlicher Hindernisse.



Zu lösen:

MX-Gln: (Vakuum) im Außenraum der Hindernisse

mit RB $D_n = 0, \vec{E}_{tg} = \vec{0}$ auf Oberflächen der Hindernisse

und Abstrahlungsbedingung (asymptotisch nur auslaufende Wellen)*)

*) Hier nicht angeschrieben; s. Stumpf / Schuler, Elektrodynamik, Vieweg 1973, Abschnitt 12.6.

Stationärer Fall

Quellen und Felder zeitlich harmonisch
(eingeschwungener Zustand)

Für den stationären Fall gibt es einen Existenz-
und Eindeutigkeitsatz sowie exakte Lösungen
für ein einziges kugelförmiges oder ein
einziges zylinderförmiges Hindernis.

b) im engeren Sinn

- Quelle = "Lichtquelle" (Strahlungsquelle)
d.h. Quellverteilung so weit von Hindernissen
entfernt, daß im Bereich der Hindernisse nur
mehr Wellenfeld (Strahlungsfeld) berücksichtigt
werden muß
- Lineardimensionen der Hindernisse und
Abstände zwischen den Hindernissen
groß gegen die Wellenlänge(n) der von
der "Lichtquelle" emittierten Strahlung

⇒ "Lichtintensität" kann im Bereich der Hindernisse
und "hinter" den Hindernissen in niedrigster
Näherung nach den Gesetzen der
geometrischen Optik berechnet werden

Aufgabe der Beugungstheorie ist dann die
Berechnung der "Lichtintensität" in der Nähe
der geometrischen Schattengrenzen, wo die
geometrische Optik versagt und es zu
typischen Interferenzmustern kommt.

Beugung im engeren Sinn: viele Näherungsverfahren
wurden entwickelt.

Einfachstes Näherungsverfahren (neben Huygensschem
Prinzip): Skalares Kirchhoffverfahren: anwendbar
für ebene Beugungsschirme mit Öffnungen, Berechnung
der "Lichtintensität" aus einer skalaren
Feldfunktion ("Lichterregung").

Bemerkung: Unter den Annahmen der Beugung
im engeren Sinn spielen Polarisationsinflüsse
auf die Intensität keine merkliche Rolle, weshalb
die Beschreibung durch Vektorfelder nicht
unerlässlich ist. ●

XV. 2. A. Skalares Kirchhoffverfahren

$u(\vec{r}, t)$ "Lichterregung" (Feldfunktion) komplexwertig

FG in quellenfreien Raumbereichen (POSTULAT)

$$\square u(\vec{r}, t) = 0 \tag{11}$$

Stationärer Fall

zeitlich harmonische "Lichtquelle", eingeschwungener Zustand

$$u(\vec{r}, t) = u(\vec{r}) e^{-i\omega t} \tag{12}$$

"Lichtintensität" (POSTULAT)

$$I(\vec{r}) = |u(\vec{r})|^2$$

(11): in quellenfreien Raumbereichen

$$(\Delta + k^2) u(\vec{r}) = 0 \tag{13}$$

mit

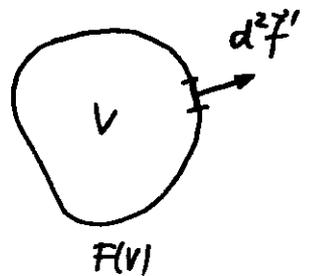
$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Kirchhoffidentität

2. Greenscher Satz (s. Gl. (I. 12b))

$$\int_V d^3r' [u(\vec{r}') \Delta' \chi(\vec{r}') - \chi(\vec{r}') \Delta' u(\vec{r}')] \tag{14}$$

$$= \oint_{F(V)} d^2\vec{r}' \cdot [u(\vec{r}') \vec{\nabla}' \chi(\vec{r}') - \chi(\vec{r}') \vec{\nabla}' u(\vec{r}')] \tag{14}$$



Wahl: $u(\vec{r}')$ "Lichterregung"

$$\chi(\vec{r}') = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Parameter}}}{G(\vec{r}, \vec{r}')} \tag{14}$$

irgendeine Greenfunktion des Helmholtzoperators mit der Eigenschaft $G(\vec{r}', \vec{r}) = G(\vec{r}, \vec{r}')$, d.h.

$$(\Delta + k^2) G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \tag{14}$$

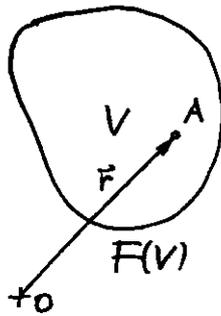
bzw.

$$(\Delta' + k^2) G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \tag{14}$$

$$\int_V d^3r' [\underbrace{\mu(\vec{r}') \Delta' G(\vec{r}, \vec{r}')}_{-4\pi \delta(\vec{r}-\vec{r}') - k^2 G(\vec{r}, \vec{r}')} - \underbrace{G(\vec{r}, \vec{r}') \Delta' \mu(\vec{r}')}_{-k^2 \mu(\vec{r}')}]$$

VS: keine Quellen in V

$$= \oint_{F(V)} d^2\vec{f}' \cdot [\mu(\vec{r}') \vec{\nabla}' G(\vec{r}, \vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{\nabla}' \mu(\vec{r}')] \quad \text{L}$$



⇒ für Punkte \vec{r} innerhalb des quellenfreien Volumens V gilt

$$\mu(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{F(V)} d^2\vec{f}' \cdot [G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{\nabla}' \mu(\vec{r}') - \mu(\vec{r}') \vec{\nabla}' G(\vec{r}, \vec{r}')] \quad (15)$$

Wahl von Kirchhoff: Greenfunktion für den unendlichen Raum

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (16)$$

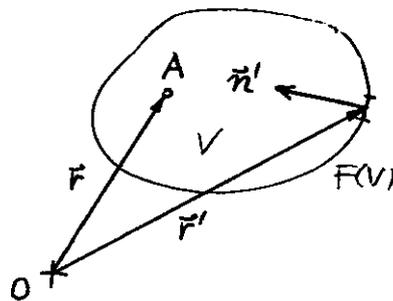
$$\Rightarrow \vec{\nabla}' G(\vec{r}, \vec{r}') = -ik \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \left(1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (16a)$$

Einsetzen gibt mit $d^2\vec{f}' = -\vec{n}' d^2f'$ die

Kirchhoffidentität

$$\mu(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{F(V)} d^2f' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \left[\frac{\partial \mu(\vec{r}')}{\partial n'} + ik \left(1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \frac{\vec{n}' \cdot (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \mu(\vec{r}') \right]$$

Lichtquelle



Beachte:

$$e^{\frac{i(k|\vec{r}-\vec{r}'| - \omega t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}$$

kann als Kugelwelle interpretiert werden, die vom Punkt \vec{r}' zum Aufpunkt \vec{r} "läuft": Huygens!

- 2) Jede Lösung der inhomogenen Helmholtzgleichung für eine beliebige Quellfunktion und beliebige RB und asymptotische Bdg. erfüllt für Punkte \vec{r} in einem quellenfreien Volumen V Gl. (17) identisch. Deshalb Kirchhoffidentität!

XV-16

(17)

XV-17

Kirchhoffverfahren

Kirchhoffs Überlegung: "Wüßte ich für eine Beugungsanordnung die exakten Randwerte $u(\vec{r}')$ und $\frac{\partial u(\vec{r}')}{\partial n'}$ auf einer geschlossenen Fläche F , in deren Innerem keine Lichtquelle ist, so könnte ich aus der Identität (17) die exakte

Lichterregung $u(\vec{r})$ für Aufpunkte im Inneren von F berechnen." (Stimmt \checkmark) Weiter:

"Gelingt es mir, aus physikalischen Überlegungen für die Randwerte von $u(\vec{r})$ und $\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n}$ gute Näherungswerte zu finden*, so wird das Einsetzen in die Identität (17) gute Näherungswerte für $u(\vec{r})$ für Aufpunkte im Inneren von F liefern." ("Wird" ist nicht gewährleistet, nur "kann".)

Bemerkung: Die Helmholtzgleichung gestattet nicht die simultane Vorgabe von Funktion und Normalableitung auf einer geschlossenen Oberfläche. (Überbestimmung). Ersetzt man die exakten Randwerte durch näherungsweise, so ist nicht

*1) d.h. Werte, die ich für gute Näherungswerte halte!

gewährleistet, daß sich für Punkte im

Inneren auch nur eine geringfügige Änderung ergibt, da auf Grund der Überbestimmung Stabilität nicht gewährleistet ist.

Darin besteht der "mathematische Mangel Nr.1" des Kirchhoffverfahrens.

Kirchhoffsche "Standardanordnung", für die

Kirchhoff Näherungsannahmen für die Randwerte angegeben hat, auf die daher das

Kirchhoffsche Verfahren anwendbar ist:

ebener undurchdringlicher Beugungsschirm

(idealer Leiter) mit einer oder mehreren

Öffnungen und der Lichtquelle auf einer

Seite des Schirms; gesucht ist die

Lichtintensität auf der anderen Seite des

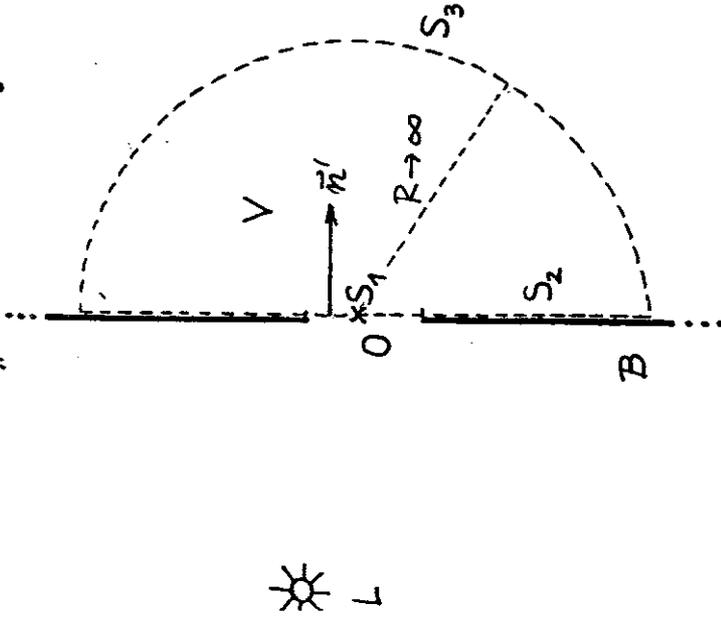
Beugungsschirmes



Lichtquelle

Lichtintensität?

Kirchhoffsche Näherungsannahmen



- 1) S_1 (Öffnung): für $u(F')$, $\frac{\partial u(F')}{\partial n'}$ werden jene Werte genommen, die dort vorliegen würden, wenn es überhaupt keinen Beugungsschirm gäbe (ungestörte von L einfallende Welle)
- 2) S_2 (unmittelbar hinter dem undurchdringlichen Schirmteil): es wird $u(F') = 0$, $\frac{\partial u(F')}{\partial n'} = 0$ gesetzt
- 3) S_3 (Halbkugelfläche mit $R \rightarrow \infty$):

$$u(F') \underset{r' \rightarrow \infty}{\sim} f(\vartheta', \varphi') \frac{e^{i k r'}}{r'}$$

Bemerkungen:

- 1) In den Abbildungen wird immer nur eine Öffnung gezeichnet, es können aber auch mehrere Öffnungen vorhanden sein.
- 2) Ist d die Lineardimension der Öffnung, so muß $d \gg \lambda$ gelten (Beugungsproblem im engeren Sinn!)
 Unter dieser VS ist die Kirchhoffsche Annahme 1) physikalisch plausibel. Eine merkliche Abweichung von den "ungestörten" Werten ist nur in einer kleinen Randzone der Öffnung zu erwarten.
- 3) Sind mehrere Öffnungen vorhanden, so muß die Lineardimension jeder Öffnung $\gg \lambda$ sein und auch die Abstände der Öffnungen $\gg \lambda$ sein.
- 4) Die "unproblematischste" Annahme ist 3).
 Sie ersetzt die Abstrahlungsbedingung der MX-Theorie.
 Auch die Annahme 2) ($u=0$, $\frac{\partial u}{\partial n'} = 0$ auf S_2 , d.h. unmittelbar hinter dem undurchlässigen Schirmteil) leuchtet physikalisch

ein.

ABER: Mathematisch ist diese Annahme mit der Helmholtzgleichung nicht verträglich:
 "mathematischer Mangel Nr.2 des Kirchhoff = verfahrens".

Ist nämlich $u(F')$ und $\frac{\partial u(F')}{\partial n'}$ auf einem beliebigen endlichen Teilstück von $F(V)$ null und ist u Lösung der Helmholtzgleichung, so folgt $u(F) \equiv 0$ für $\forall F$ in V !

Trotz der mathematischen Inkonsistenzen erhält man aber mit dem Kirchhoffverfahren Ergebnisse, die mit dem Experiment sehr gut übereinstimmen.

"Verstehen" kann man das insofern, als ein modifiziertes Kirchhoffverfahren, das die

"mathematischen Mängel Nr.1, 2" der originalen Kirchhoffverfahrens nicht aufweist, praktisch

dieselben Ergebnisse liefert: s. Jackson Abschnitt 9.8

Man setzt dabei in Gl. (15) nicht die Greensche Funktion für den unendlichen Raum, sondern die Dirichletsche Greenfunktion $G_D(F, F')$ ein und

erhält als modifizierte Kirchhoffidentität

$$u(F) = \frac{1}{4\pi} \int_{F(V)} d^3F' u(F') - \frac{\partial G_D(F, F')}{\partial n'}$$

Die Kirchhoffschen Annahmen 1), 2) können dann durch entsprechende Annahmen für $u(F')$ allein ersetzt werden, sodass die mathematischen Inkonsistenzen beseitigt sind!

Einsetzen der Kirchhoffschen Annahmen in die Kirchhoffidentität

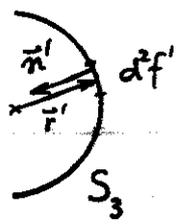
$$\int_{F(V)} d^3F' u(F') = \int_{S_1} + \int_{S_2} + \int_{S_3}$$

\parallel 0 wegen 2)
 \dots wie $\frac{1}{R}$ gegen null wegen 3)

Beweis: nächste Seite

ungestörte Werte $u_0(F'), \frac{\partial u_0(F')}{\partial n'}$ einsetzen!

Für Punkte \vec{r}' auf S_3 gilt für $R=r' \rightarrow \infty$:



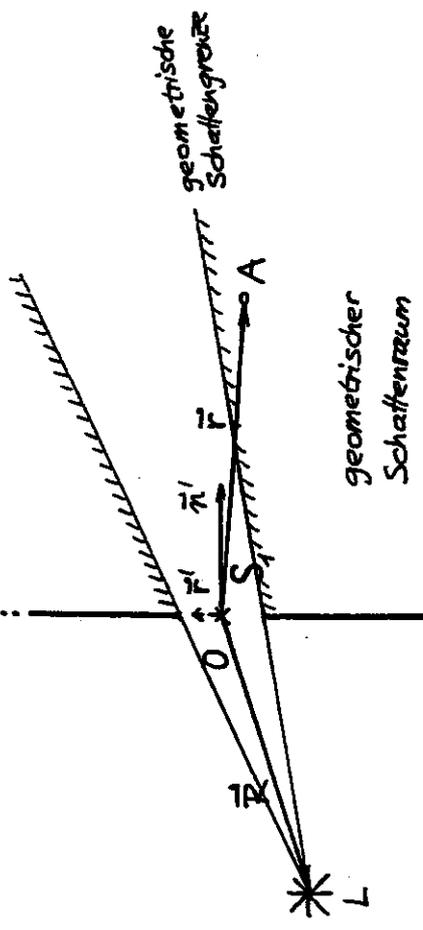
$$\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \left\{ \underbrace{-\frac{\partial u(\vec{r}')}{\partial n'}}_{\frac{\partial u(\vec{r}')}{\partial r'}} - ik \left(1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \underbrace{\frac{\vec{n}' \cdot (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{-\frac{r'_z}{r'}} u(\vec{r}') \right\} \underbrace{d^2f'}_{r'^2 d\Omega'}$$

$$\underset{r' \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{ikr'}}{r'} \left\{ \left(ik - \frac{1}{r'} \right) f(\Omega') \frac{e^{ikr'}}{r'} + O\left(\frac{1}{r'^3}\right) - ik \left(1 + \frac{i}{kr'}\right) \left[f(\Omega') \frac{e^{ikr'}}{r'} + O\left(\frac{1}{r'^2}\right) \right] \right\} r'^2 d\Omega'$$

$$\underset{r' \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{ikr'}}{r'} \underbrace{O\left(\frac{1}{r'^2}\right)}_{O(1)} r'^2 d\Omega' \quad \checkmark$$

$$u(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_1} d^2f' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \left[\frac{\partial u_0(\vec{r}')}{\partial n'} + ik \left(1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \frac{\vec{n}' \cdot (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} u_0(\vec{r}') \right] \quad (18)$$

Punktformige Lichtquelle angenommen



Damit "Lichteregung" im Punkt \vec{r}' der Öffnung (und in infinitesimaler Umgebung)

gemäß Kirchhoffannahme 1)

$$u_0(\vec{r}') = A_0 \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{r}'|}}{|\vec{R}-\vec{r}'|} \quad (19)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u_0(\vec{r}')}{\partial n'} = \underbrace{\vec{n}' \cdot \text{grad}' u_0(\vec{r}')}_{(19a)}$$

$$= A_0 \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{r}'|}}{|\vec{R}-\vec{r}'|} \underbrace{\left(-ik + \frac{1}{|\vec{R}-\vec{r}'|} \right)}_{(-ik) \left(1 + \frac{i}{k|\vec{R}-\vec{r}'|} \right)} \frac{\vec{n}' \cdot (\vec{R}-\vec{r}')}{|\vec{R}-\vec{r}'|}$$

$$u(\vec{r}) = -\frac{ik}{4\pi} A_0 \int_{S_1} d^2f' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{r}'|}}{|\vec{R}-\vec{r}'|} \cdot$$

$$\cdot \left[\left(1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \frac{\vec{n}' \cdot (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \left(1 + \frac{i}{k|\vec{R}-\vec{r}'|}\right) \frac{\vec{n}' \cdot (\vec{R}-\vec{r}')}{|\vec{R}-\vec{r}'|} \right]$$

→ Reziprozitätssatz der Kirchhoffschen Beugungstheorie

Setzt man die Lichtquelle in den Punkt \vec{r} , so "erzeugt" sie im Punkt \vec{R} die gleiche Intensität $I = |u|^2$ wie die im Punkt \vec{R} befindliche Lichtquelle im Punkt \vec{r} "erzeugt".

Kirchhoffsche Beugungsformel

Weitere Annahmen: (A1) $R \gg d$ und $r \gg d$

(A2) Beschränkung auf Aufpunkte \vec{r} , welche nicht bzw. nicht zu weit im geometrischen Schattenraum liegen

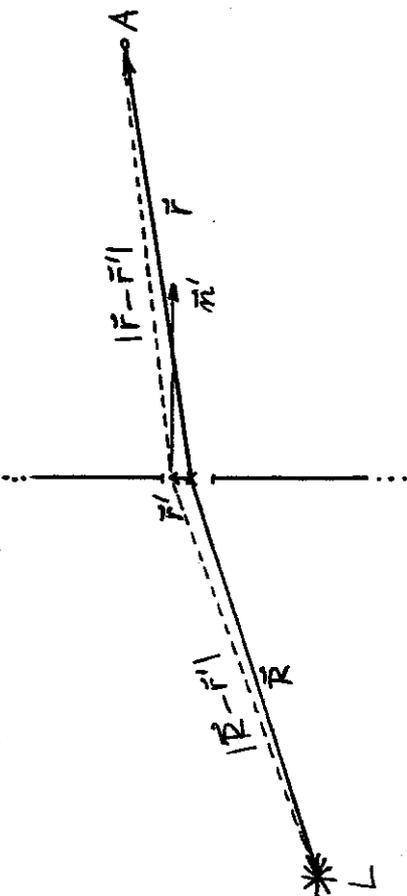
Beachte: $d \gg \lambda$ wurde schon bisher vorausgesetzt.

$R \gg d \gg \lambda, r \gg d \gg \lambda \Rightarrow$

$$1 + \frac{i}{k|\vec{R}-\vec{r}'|} = 1 + \frac{i}{2\pi} \frac{\lambda}{|\vec{R}-\vec{r}'|} \approx 1 \quad (21)$$

$$1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|} = 1 + \frac{i}{2\pi} \frac{\lambda}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx 1$$

für alle Punkte \vec{r}' der Öffnung und alle ins Auge gefassten Aufpunkte \vec{r}



2) Wegen $d \gg \lambda$ variieren $|\vec{R}-\vec{r}'|, |\vec{r}-\vec{r}'|$ über die Öffnung um viele Wellenlängen, sodass

$$e^{ik|\vec{R}-\vec{r}'|}, e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (k = \frac{2\pi}{\lambda})$$

über die Öffnung stark oszillieren,

wogegen im Integral die Faktoren $\frac{1}{|\vec{R}-\vec{r}'|}, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

$$\frac{1}{|\vec{R}-\vec{r}'|} \approx \frac{1}{R}, \quad \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{1}{r}$$

gesetzt werden können.

Analog kann für \vec{F}' in der Öffnung

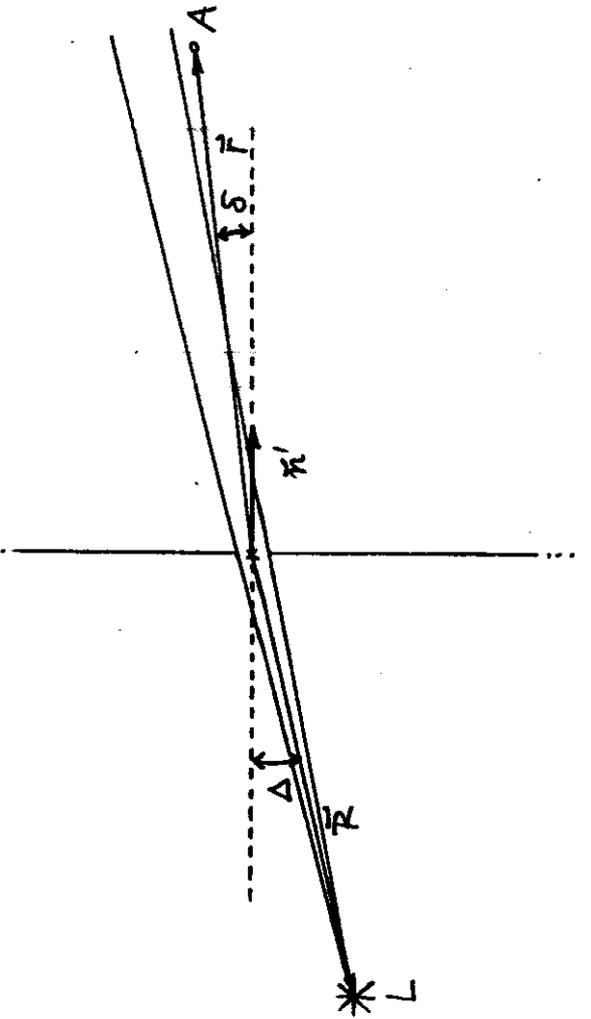
$$\frac{\vec{n}' \cdot (\vec{R} - \vec{F}')}{|\vec{R} - \vec{F}'|} \approx \frac{\vec{n}' \cdot \vec{R}}{R}, \quad \frac{\vec{n}' \cdot (\vec{F} - \vec{F}')}{|\vec{F} - \vec{F}'|} \approx \frac{\vec{n}' \cdot \vec{F}}{r}$$

gesetzt werden.

Wegen der Beschränkung auf Aufpunkte A, welche nicht im geometrischen Schattenraum bzw. nicht weit im geometrischen Schattenraum liegen, gilt überdies

$$\frac{\vec{n}' \cdot \vec{F}}{r} \approx - \frac{\vec{n}' \cdot \vec{R}}{R} \quad (23)$$

(d.h. $\cos \delta \approx \cos \Delta$)



Zusammenfassung:

$$u(\vec{F}) = - \frac{ik}{4\pi} A_0 \int_{S_1} d^2f' \frac{e^{ik|\vec{F}-\vec{F}'|}}{|\vec{F}-\vec{F}'|} \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{F}'|}}{|\vec{R}-\vec{F}'|}$$

aus Integral

$$\cdot \left[\underbrace{\left(1 + \frac{i}{k|\vec{F}-\vec{F}'|}\right)}_1 \frac{\vec{n}' \cdot (\vec{F}-\vec{F}')}{|\vec{F}-\vec{F}'|} - \underbrace{\left(1 + \frac{i}{k|\vec{R}-\vec{F}'|}\right)}_1 \frac{\vec{n}' \cdot (\vec{R}-\vec{F}')}{|\vec{R}-\vec{F}'|} \right]$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$\frac{\vec{n}' \cdot \vec{F}}{r} \qquad \qquad \qquad - \frac{\vec{n}' \cdot \vec{R}}{R}$$

aus Integral

$$2 \vec{n}' \cdot \frac{\vec{F}}{r}$$

Kirchhoffsche Beugungsformel

$$u(\vec{F}) = - \frac{ik}{2\pi} \left(\vec{n}' \cdot \frac{\vec{F}}{r} \right) \frac{A_0}{rR} \int_{S_1} d^2f' e^{ik(|\vec{F}-\vec{F}'| + |\vec{R}-\vec{F}'|)}$$

XV. 2.B. Komplementäre Beugungsschirme. Babinet'sches Theorem

Definition: Zwei Beugungsschirme B_1, B_2 heißen komplementär, wenn B_2 undurchdringlich ist, wo B_1 eine Öffnung besitzt, und dort eine Öffnung hat, wo B_1 undurchdringlich ist.

Die folgenden Aussagen gelten im Rahmen der

skalaren Kirchhofftheorie unter der allgemeinen

VS $d \gg \lambda$ und den Kirchhoffschen Annahmen 1), 2), 3)

aber ohne weitere Annahmen (etwa bzgl. r, \vec{r}),

d.h. unter Zugrundelegung von Gl. (18):

$$u_1(\vec{r}) \approx -\frac{1}{4\pi} \int_{S_2} d^2f' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \left[\frac{\partial u_0(\vec{r}')}{\partial n'} + ik \left(1 + \frac{z}{k|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \frac{\vec{n}' \cdot (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} u_0(\vec{r}') \right]$$

Aus dieser Beziehung und der Kirchhoffidentität für u_0 (Gl. (17) mit $u = u_0$) folgt das

Babinet'sche

Theorem (25)

$$u_0(\vec{r}) = u_1(\vec{r}) + u_2(\vec{r})$$

ohne Beugungsschirm B_1 für Schirm für komplementären Schirm B_2

Was hat man davon?

Eine Aussage erhält man daraus immer dann, wenn in einer Situation für den Aufpunkt A mit dem Ortsvektor \vec{r} eine der 3 Größen $u_0(\vec{r}), u_1(\vec{r}), u_2(\vec{r})$ null ist.

Beispiel 1: Angenommen hinter dem Schirm B_1

Sei am Aufpunkt \vec{r} die "Lichterregung" u_1 null:

$$u_1(\vec{r}) = 0 \quad (\vec{r} \text{ fester Aufpunkt})$$

$$\Rightarrow u_2(\vec{r}) = u_0(\vec{r}), \quad I_2(\vec{r}) = I_0(\vec{r})$$

D.h.: Stellt man statt B_1 den komplementären Schirm B_2 auf, so hat man im betreffenden Aufpunkt \vec{r} eine bestimmte Intensität $I_2(\vec{r})$.

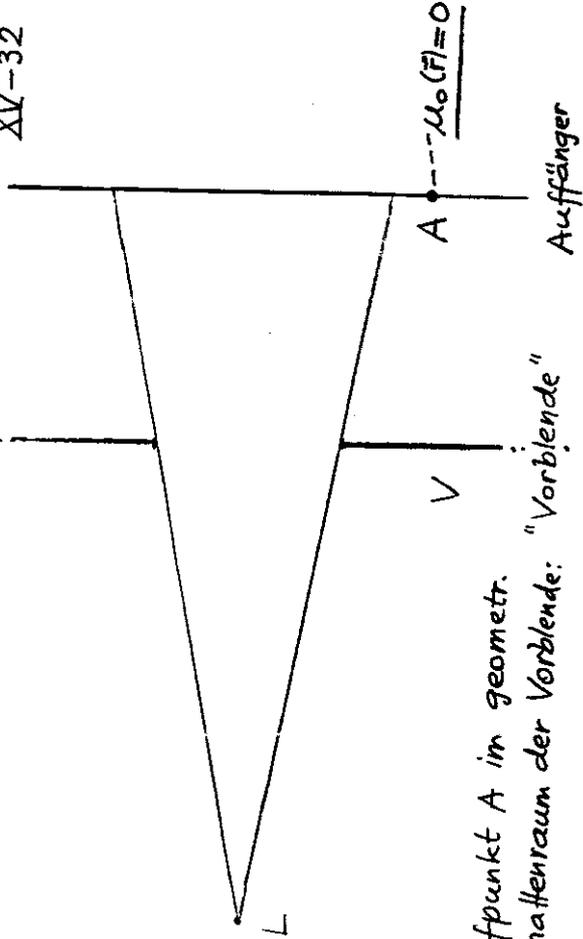
Entfernt man B_2 , so ändert sich die Intensität in diesem Aufpunkt nicht! punktförmigen

Beispiel 2: Das von einer Lichtquelle ausgehende Licht wird durch eine "Vorbende" auf einen bestimmten Raumwinkel eingeschränkt.

Die Öffnung der "Vorbende" sei so groß, daß die Beugung; vernachlässigt werden kann, und

man dementsprechend auf einem Auffänger

eine scharf ausgeleuchtete Fläche hat (geometrischer Schatten ohne beobachtbare Interferenzen).

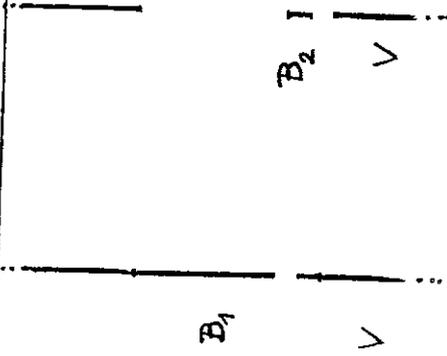


Aufpunkt A im geometr. Schattenraum der Vorbende: "Vorbende"

⇒ $u_1(\vec{r}) = -u_2(\vec{r})$

$I_1(\vec{r}) = I_2(\vec{r})$, $\forall \vec{r}$ im geometrischen Schattenraum der Vorbende (26)

⇒ gleiches Beugungsmuster auf dem Auffänger im Schattenbereich der Vorbende, wenn man in die Öffnung der Vorbende einmal einen Beugungsschirm B_1 und einmal den dazu komplementären Schirm B_2 einsetzt; z.B.



XV. 2. C. Fraunhoferbeugung

Kirchhoffsche Beugungsformel (24):

$$u(\vec{r}) = -\frac{ik}{2\pi} (\vec{n}' \cdot \vec{F}) \frac{A_0}{rR} \int_{S_1} d^2f' e^{ik(|\vec{R}-\vec{r}'| + |\vec{R}-\vec{f}'|)}$$

Wurde unter den Annahmen

$$R, r \gg d \gg \lambda \quad (*)$$

abgeleitet. Unter diesen Annahmen ist aber auch eine Entwicklung von $|\vec{R}-\vec{r}'|$, $|\vec{f}-\vec{f}'|$ für Punkte der Öffnung nach Potenzen von $\frac{r'}{R}$ bzw. $\frac{f'}{r}$ möglich:

$$|\vec{R}-\vec{r}'| = \sqrt{(\vec{R}-\vec{r}')^2} = \sqrt{R^2 - 2\vec{R}\vec{r}' + r'^2} \quad \text{gibt}$$

$$|\vec{R}-\vec{r}'| = R - \frac{\vec{R}\cdot\vec{r}'}{R} + \frac{R^2 r'^2 - (\vec{R}\cdot\vec{r}')^2}{2R^3} + \dots \quad (27')$$

und analog

$$|\vec{f}-\vec{f}'| = r - \frac{\vec{f}\cdot\vec{f}'}{r} + \frac{r^2 f'^2 - (\vec{f}\cdot\vec{f}')^2}{2r^3} + \dots \quad (27)$$

Definition: Von Fraunhoferbeugung spricht man,

wenn es genügt, in den Entwicklungen (27'), (27) die ersten zwei Terme zu berücksichtigen.

Beachte: Die Erfüllung der Bdn. (*) reicht dafür nicht aus! Es muß dafür mehr erfüllt sein, u. zwar

$$\boxed{\frac{R}{d}, \frac{r}{d} \gg \frac{d}{\lambda} \gg 1} \quad (**)$$

Nur unter dieser VS ist der Zusatzterm

$$k \left[\frac{R^2 r^2 - (R \cdot F)^2}{2R^3} + \frac{r^2 r^2 - (F \cdot F)^2}{2r^3} \right]$$

im Argument der Exponentialfunktion für Punkte der Öffnung sicher "klein" und daher vernachlässigbar:

$$k \frac{r^2 r^2 - (F \cdot F)^2}{2r^3} \Big|_{\max} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{r^2 r^2 (1 - \cos^2(k \cdot F \cdot F))}{2r^3} \Big|_{\max}$$

$$= \frac{r'}{\lambda} \frac{r'}{r} \pi \sin^2(k \cdot F \cdot F) \Big|_{\max} \quad r' \leq \frac{d}{2}$$

$$\approx \frac{d}{\lambda} \frac{\pi}{4} \sin^2(k \cdot F \cdot F) \ll \frac{\pi}{4}, \text{ analog 1. Term}$$

$$\ll 1$$

Gilt also (**), so kann man im Integranden setzen:

$$|\bar{r} - \bar{r}'| + |\bar{r} - \bar{r}'| \approx r + R - \frac{\bar{r} \cdot \bar{r}'}{r} - \frac{\bar{r} \cdot \bar{r}'}{R} \quad (28)$$

$$e^{ik[|\bar{r} - \bar{r}'| + |\bar{r} - \bar{r}'|]} \approx e^{ikr} e^{ikR} e^{-ik(\frac{\bar{r} \cdot \bar{r}'}{r} + \frac{\bar{r} \cdot \bar{r}'}{R})} \cdot \bar{r}'$$

Fraunhoferbeugung

$$u(\bar{r}) = -\frac{ik}{2\pi} A_0 \frac{e^{ikR}}{R} \frac{e^{ikr}}{r} (\bar{n} \cdot \frac{\bar{r}}{r}) \int_{S_1} d^2 \bar{r}' e^{-ik(\frac{\bar{r} \cdot \bar{r}'}{r} + \frac{\bar{r} \cdot \bar{r}'}{R})} \cdot \bar{r}'$$

Interpretation! $\mu_0(\bar{r})$ Konsistenz (29) mit Kirchhoffannahme 3)

Rechtecksöffnung

$$\frac{\bar{r}}{r} = (\alpha, \beta, \gamma) = (\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r})$$

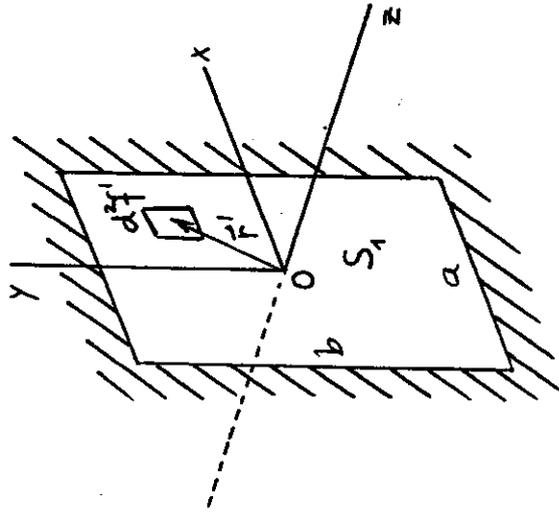
$$\bar{n}' = (0, 0, 1)$$

$$d^2 \bar{r}' = dx' dy'$$

$$S_1 \dots z' = 0$$

$$x' \in [-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}]$$

$$y' \in [-\frac{b}{2}, +\frac{b}{2}]$$



Annahme: Lichtquelle auf z-Achse

$$\frac{\bar{r}}{r} = (0, 0, -1), \quad \bar{r} \cdot \bar{r}' = 0$$

$$\Rightarrow \bar{n}' \cdot \frac{\bar{r}}{r} = \gamma, \quad (\frac{\bar{r}}{r} + \frac{\bar{r}'}{R}) \cdot \bar{r}' \Big|_{z'=0} = \alpha x' + \beta y' + \frac{z}{R}$$

$$u(\bar{r}) = -\frac{ik}{2\pi} A_0 \frac{e^{ikR}}{R} \frac{e^{ikr}}{r} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dx' \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy' e^{-ik(\alpha x' + \beta y' + \frac{z}{R})}$$

"Aufebenen"

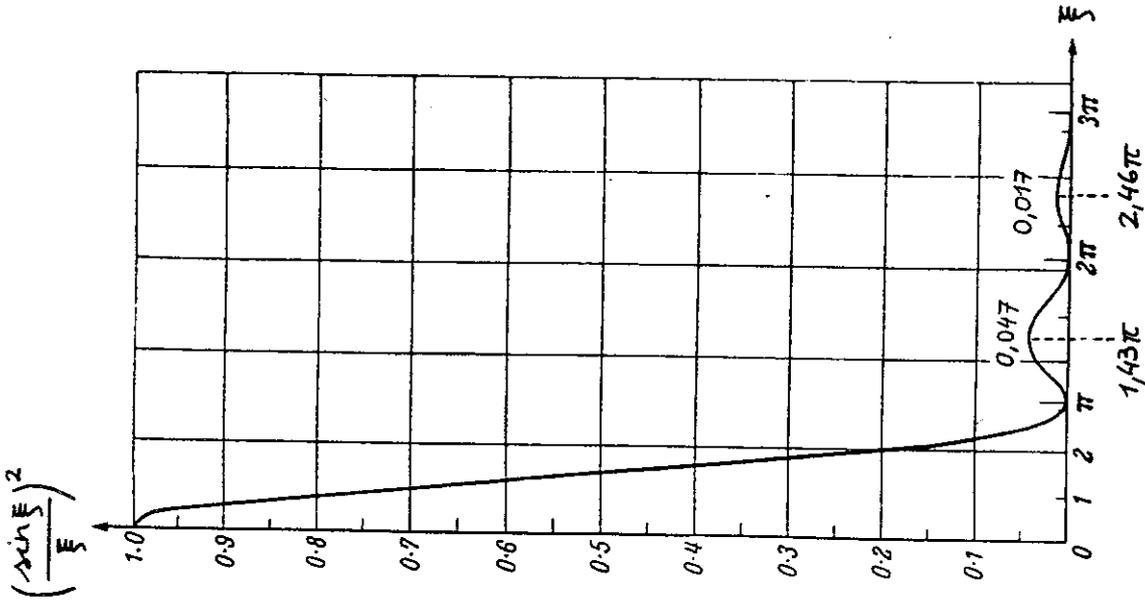
"Auffänger parallel zur Schirmebene (Ebene z=zo) in "ferner Fernzone":

r nur schwach richtungsabhängig ($\approx z_0$)
 β nur schwach richtungsabhängig (≈ 1)

für Richtungen $\frac{\bar{r}}{r} \approx (0, 0, 1)$

Intensitätsverlauf auf Auffänger

$$I(\alpha, \beta) = C \frac{\sin^2 \frac{\pi \alpha a}{\lambda}}{\frac{\pi \alpha a}{\lambda}} \frac{\sin^2 \frac{\pi \beta b}{\lambda}}{\frac{\pi \beta b}{\lambda}} \quad (31')$$



s. das Beugungsbild Seite XV-43

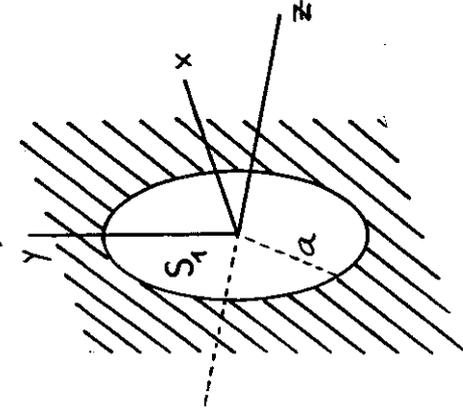
Die Intensität ist null entlang den zur y-Achse parallelen Linien

$$\frac{\pi \alpha a}{\lambda} = n_1 \pi \text{ bzw. } \frac{x}{r} = \alpha = n_1 \frac{\lambda}{a}, \quad n_1 = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (31a')$$

und entlang den zur x-Achse parallelen Linien

$$\frac{x}{r} = \beta = n_2 \frac{\lambda}{b}, \quad n_2 = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Kreisöffnung



Annahme: Lichtquelle auf der z-Achse \Rightarrow axiale Symmetrie bzgl. z-Achse
 Auffänger parallel zur Schirmebene \Rightarrow es genügt, die Intensität für Punkte in Richtungen

$$\vec{r} = (\alpha, 0, r) \text{ zu berechnen}$$

$$\vec{r}' = (0, 0, 1), \quad d^2 f' = \rho' d\rho' d\varphi', \quad S_1 \dots z' = 0$$

$$\vec{r}' \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \rho' \approx 1$$

$$\left(\frac{\vec{r}}{r} + \frac{\vec{r}'}{r} \right) \cdot \vec{r}' \Big|_{z'=0} = \alpha \rho' \cos \varphi'$$

$$u(\vec{r}) = -\frac{ik}{2\pi} A_0 \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{R} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}'}}{r} \int_0^a \int_0^{2\pi} \rho' d\rho' d\varphi' e^{-i\vec{k}\alpha\rho' \cos\varphi'} \quad (32a)$$

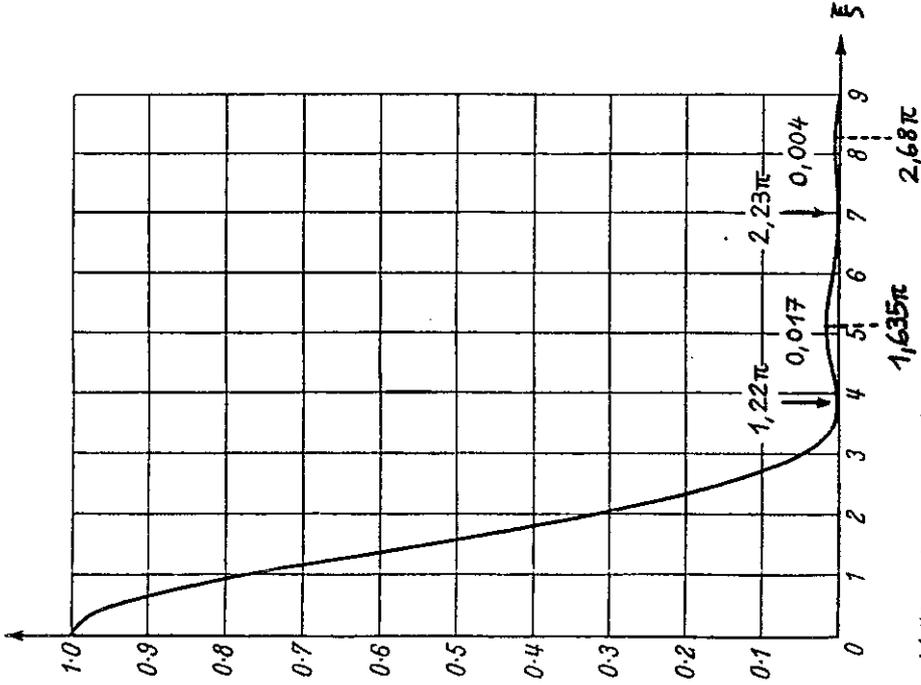
... analog wie bei Rechtecksöffnung \approx konst.

$$\int_0^\xi d\eta \eta J_0(\eta) = \xi J_1(\xi) \quad (32b)$$

\Rightarrow Intensitätsverlauf auf Auffänger

$$I(\alpha) = C \left(\frac{2J_1\left(\frac{2\pi\alpha a}{\lambda}\right)}{\frac{2\pi\alpha a}{\lambda}} \right)^2 \quad (33)$$

$$\left(\frac{2J_1(x)}{x}\right)^2$$



1. Intensitätsminimum bei

$$\frac{2\pi\alpha a}{\lambda} = 1,22\pi \quad \text{bzw.} \quad \frac{x}{r} = \alpha = 0,61 \frac{\lambda}{a} \quad (33a)$$

s. das Beugungsbild Seite XV-43

XV. 2. D. Fresnelbeugung

Definition: Von Fresnelbeugung spricht man, wenn in den Entwicklungen (27'), (27) die ersten drei Terme berücksichtigt werden müssen.

Fresnelbeugung liegt vor, wenn zwar

$$R, r \gg d \gg \lambda$$

erfüllt ist, Lichtquelle und Aufpunkt aber nicht so weit von der Schirmöffnung weg sind, wie dies für Fraunhoferbeugung verlangt wurde. (D.h., daß $\frac{R}{d}, \frac{r}{d} \gg \frac{d}{\lambda}$ nicht erfüllt ist.)

Man hat dann in die Kirchhoffsche Beugungsformel (24) im Integranden

$$|\bar{r}-\bar{r}'| \approx r + R - \frac{\bar{r}\cdot\bar{r}'}{r} - \frac{\bar{R}\cdot\bar{r}'}{R} + \frac{r^2 r'^2 - (\bar{r}\cdot\bar{r}')^2}{2r^3} + \frac{R^2 r'^2 - (\bar{R}\cdot\bar{r}')^2}{2R^3} \quad (34)$$

einsetzen.

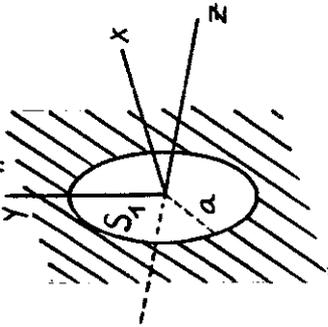
Fresnelbeugung

$$u(P) = -\frac{ik}{2\pi} A_0 \frac{e^{ikR}}{R} \frac{e^{ikr}}{r} (\pi' \cdot \bar{r}) \cdot \int_{S_1} d^2f' e^{-ik(\bar{r} + \frac{\bar{r}'}{R})\cdot\bar{r}'} e^{ik(\frac{1}{2r} + \frac{1}{2R})r'^2} e^{-ik\left(\frac{(\bar{r}\cdot\bar{r}')^2}{2r^3} + \frac{(\bar{R}\cdot\bar{r}')^2}{2R^3}\right)}$$

Fresnelbeugung: auch für geometrisch einfache Öffnungen (Rechteck, Kreis) sehr kompliziert

Einfaches Beispiel:

Kreisöffnung



Annahmen:

- 1) Lichtquelle auf der z-Achse
- 2) Aufpunkt auf der z-Achse

$$\vec{R} = (0, 0, -1)$$

$$\vec{r} = (0, 0, 1)$$

$$\vec{r}' = (0, 0, 1)$$

$$\Rightarrow \vec{r}' \cdot \vec{r} = 1, \quad \vec{R} \cdot \vec{r}' = 0, \quad \vec{r} \cdot \vec{r}' = 0$$

$$\vec{r} = (0, 0, r), \quad u(\vec{r}) = u(r)$$

$$u(r) = -\frac{ik}{2\pi} A_0 \frac{e^{ikr}}{R} \frac{e^{ikr}}{r} \int_{S_1} d^2f' e^{ik \left(\frac{1}{2r} + \frac{1}{2R} \right) r'^2} \quad (36)$$

$$d^2f' = \rho' d\rho' d\varphi', \quad S_1 \dots z'=0, \quad \varphi' \in [0, 2\pi], \quad \rho' \in [0, a]$$

↓

$$u(r) = -\frac{ik}{2\pi} A_0 \frac{e^{ikr}}{R} \frac{e^{ikr}}{r} \int_0^a d\rho' \rho' \int_0^{2\pi} d\varphi' e^{ik \left(\frac{1}{2r} + \frac{1}{2R} \right) \rho'^2}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \left(e^{ik \left(\frac{1}{2r} + \frac{1}{2R} \right) a^2} - 1 \right)$$

XV-41

$$u(r) = -A_0 \frac{e^{ik(r+R)}}{rR} \frac{rR}{r+R} \left(e^{ik \frac{r+R}{2rR} a^2} - 1 \right)$$

$$|e^{i\frac{\pi}{2}} - 1|^2 = 4 \sin^2 \frac{\pi}{2}$$

Intensitätsverlauf längs der z-Achse

für $r, R \gg a \gg \lambda$

$$I(r) = |A_0|^2 \left(\frac{2 \sin \frac{\pi a^2 (r+R)}{2\lambda r R}}{r+R} \right)^2 \quad (37)$$

$$\frac{\pi a^2 (r+R)}{2\lambda r R} = n\pi \quad \text{bzw.} \quad a^2 \frac{r+R}{rR} = 2n\lambda, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow I(r) = 0 \quad \text{Dunkelheit}$$

Beachte:

1) Es dürfen natürlich für gegebenes R, a mit $R \gg a \gg \lambda$ nur solche $n \in \mathbb{N}$ eingesetzt werden, für welche $r \gg a$ erfüllt ist.

2) Unter den Bedingungen der Fraunhoferbeugung gilt

$$0 < \frac{\pi a^2 (r+R)}{2\lambda r R} = \frac{\pi}{2} \frac{a}{\lambda} \left(\frac{a}{r} + \frac{a}{R} \right) \ll \frac{\pi}{2} \Rightarrow I(r) \neq 0$$

Fresnelsche Zonenlinse

$$I(r) = 0 \text{ falls } a^2 \frac{r+R}{rR} = 2n\lambda, n \in \mathbb{N} \quad (38)$$

Ist $\frac{a^2}{\lambda} \frac{r+R}{2rR}$ hinreichend groß (z.B. ~ 10)

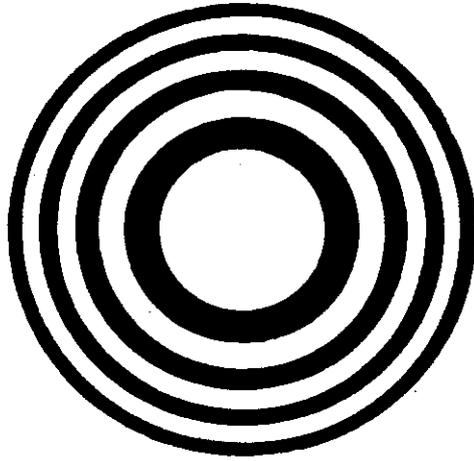
wobei $r, R \gg a \gg \lambda$ erfüllt sein muß, so kann

man durch Abdeckung geeigneter Kreisringzonen

die Helligkeit im Aufpunkt ähnlich steigern wie

wenn man eine geeignete Sammellinse in die Öffnung

gibt.



† z.B.: $\frac{a}{\lambda} = 1000, \frac{r}{a} = \frac{R}{a} = 100$

Aus Born/Wolf: Principles of Optics

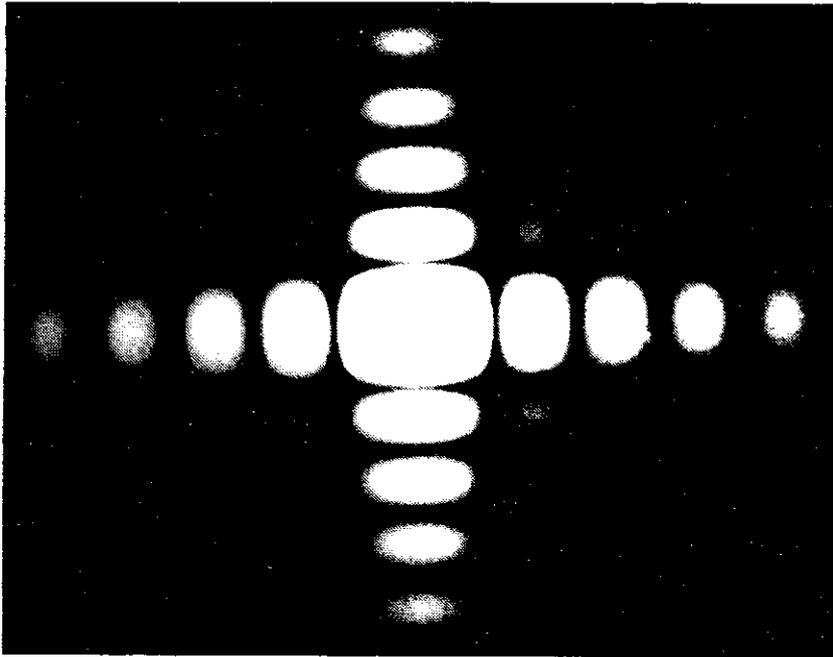


Fig. 8.10. FRAUNHOFER diffraction pattern of a rectangular aperture $8 \text{ mm} \times 7 \text{ mm}$, magnification $50\times$, mercury yellow light $\lambda = 5790 \text{ \AA}$. To show the existence of the weak secondary maxima the central portion was overexposed.

(After H. LIPSON, C. A. TAYLOR, and B. J. THOMPSON.)

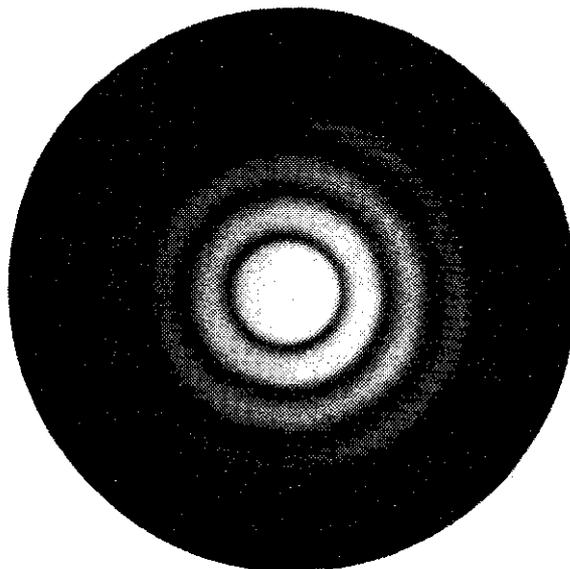


Fig. 8.12. FRAUNHOFER diffraction pattern of a circular aperture (the AIRY pattern) 6 mm in diameter, magnification $50\times$, mercury yellow light $\lambda = 5790 \text{ \AA}$. To show the existence of the weak subsidiary maxima, the central portion was overexposed.

(After H. LIPSON, C. A. TAYLOR, and B. J. THOMPSON.)