

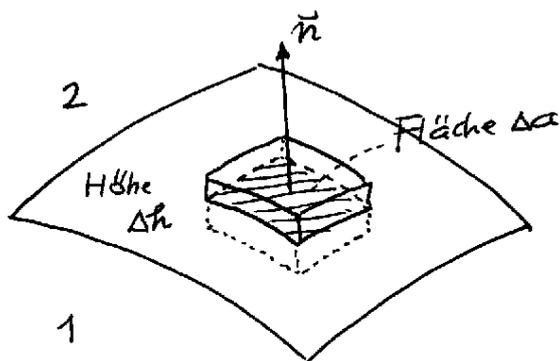
ERGÄNZUNGSBLÄTTER VON Dr. GRAU
zum Skriptum
"ELEKTRODYNAMIK UND RELATIVITÄTSTHEORIE"
von H. Nowotny

Kapitel 11-15

zu Abschnitt XI.2.C

Beweis der Grenzbedingungen (30):

1) Grenzbedingung für \vec{D} (Beweis der Grenzbedingung für \vec{B} analog)



$$\oint_{\mathcal{F}(V)} d^2\vec{f} \cdot \vec{D} = 4\pi \int_V d^3r \rho$$

Als $\mathcal{F}(V)$ "Keksdose" (wie in der Abb. dargestellt) gewählt. Bis auf Terme höherer Ordnung in Δa und

Δh gilt dann:

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Delta a = 4\pi \int_{-\frac{\Delta h}{2}}^{+\frac{\Delta h}{2}} \rho dh \cdot \Delta a \quad (\text{h-Integration in Richtung von } \vec{n})$$

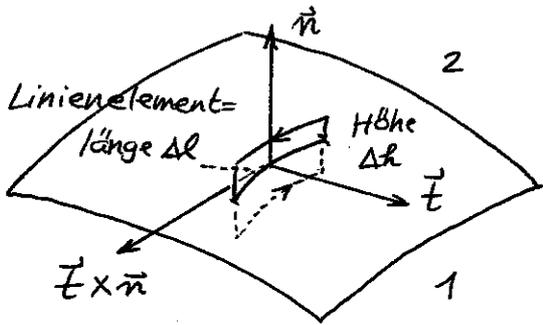
Für $\Delta a \rightarrow 0$, $\Delta h \rightarrow 0$ folgt also

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 4\pi \sigma \quad \text{mit} \quad \sigma = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{-\frac{\Delta h}{2}}^{+\frac{\Delta h}{2}} \rho dh.$$

Falls ρ längs der Grenzfläche δ -förmig singular ist, ist $\sigma \neq 0$ und gibt die Flächenladungsdichte an.

(Physikalisch gesprochen: $\int \rho dh$ über "Grenzschicht" erstreckt gibt σ .)

2) Grenzbedingung für \vec{H} (Beweis der Grenzbedingung für \vec{E} analog)



$$\oint_{\mathcal{C}(F)} d\vec{r} \cdot \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \int_F d^2\vec{r} \cdot \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_F d^2\vec{r} \cdot \vec{D}$$

Für $\mathcal{C}(F)$ "Schleife" (wie in der Abb. dargestellt) gewählt. Dabei ist \vec{t} der zum Linienelement normale Einheitsvektor in der Tangentialebene der Grenzfläche. Bis auf Terme höherer Ordnung in $\Delta l, \Delta h$ gilt dann:

$$\underbrace{(\vec{t} \times \vec{n}) \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)}_{[\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)] \cdot \vec{t}} \Delta l = \frac{4\pi}{c} \int_{-\frac{\Delta h}{2}}^{+\frac{\Delta h}{2}} \vec{j} \cdot \vec{t} dh \Delta l + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} (\vec{D}_1 \cdot \vec{t} \Delta l \frac{\Delta h}{2} + \vec{D}_2 \cdot \vec{t} \Delta l \frac{\Delta h}{2})$$

Da dies für ein in Flächenpunkt beliebig gerichtetes Linienelement, also für beliebiges \vec{t} , gelten muss, folgt

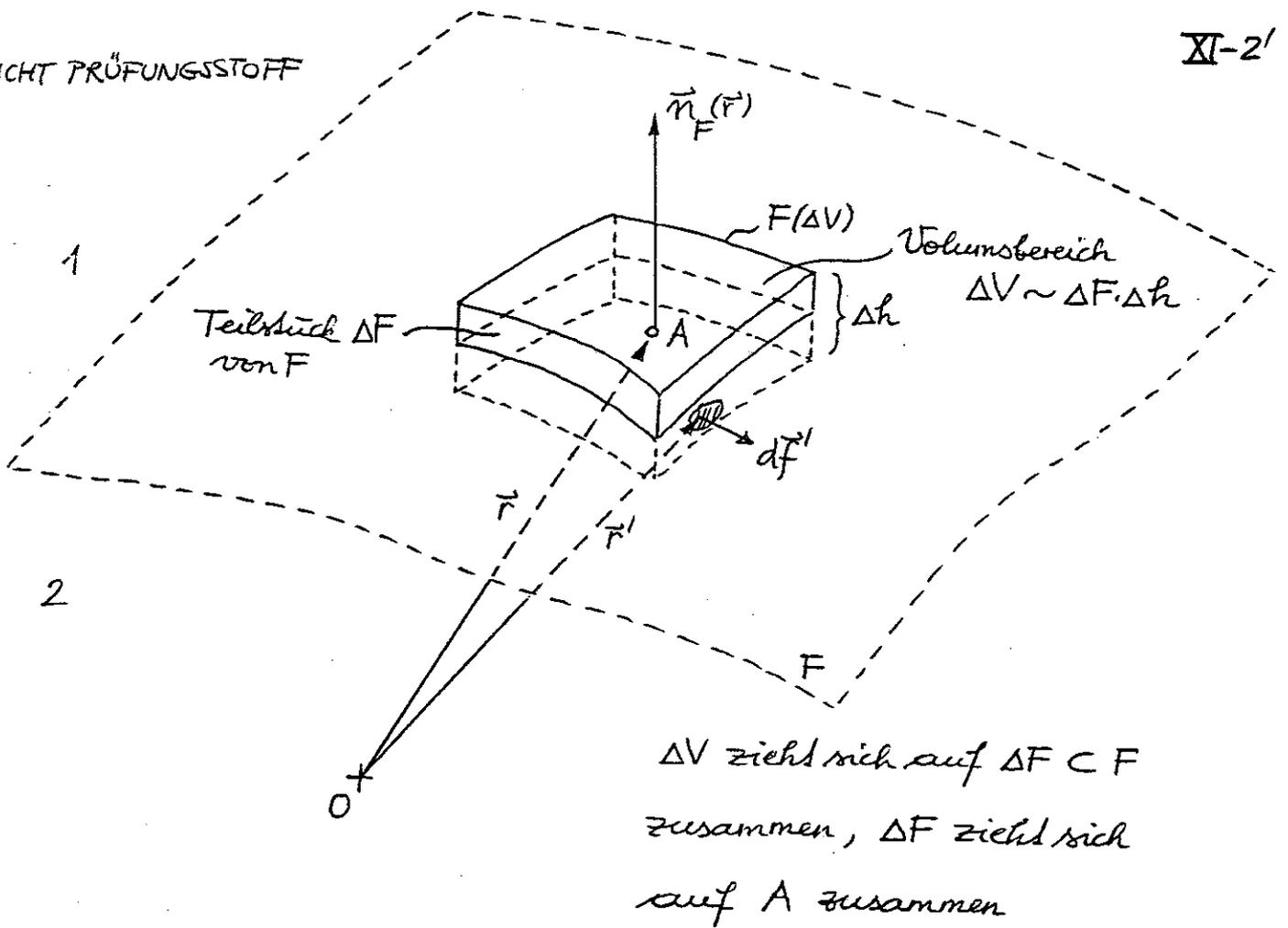
$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \int_{-\frac{\Delta h}{2}}^{+\frac{\Delta h}{2}} \vec{j} dh + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} (\vec{D}_1 \frac{\Delta h}{2} + \vec{D}_2 \frac{\Delta h}{2})$$

Für $\Delta l \rightarrow 0, \Delta h \rightarrow 0$ gibt dies

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \vec{k} \quad \text{mit} \quad \vec{k} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{-\frac{\Delta h}{2}}^{+\frac{\Delta h}{2}} \vec{j} dh.$$

Falls \vec{j} längs der Grenzfläche δ -förmig singular ist, ist $\vec{k} \neq \vec{0}$ und gibt die Flächenstromdichte an (Vektor im betrachteten Punkt der Grenzfläche mit Komponenten in der Tangentialebene). (Physikalisch gesprochen:

$\int \vec{j} dh$ über "Grenzschicht" erstreckt gibt \vec{k} .)



Definition:

Flächendivergenz des Vektorfeldes $\vec{v} =$ Skalarfeld auf F ,
definiert durch

$$\text{Div } \vec{v}(\vec{r}, t) := \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \left(\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{F(\Delta V)} \vec{v}(\vec{r}', t) \cdot d\vec{f}' \right), \vec{r} \in F$$

Beachte:

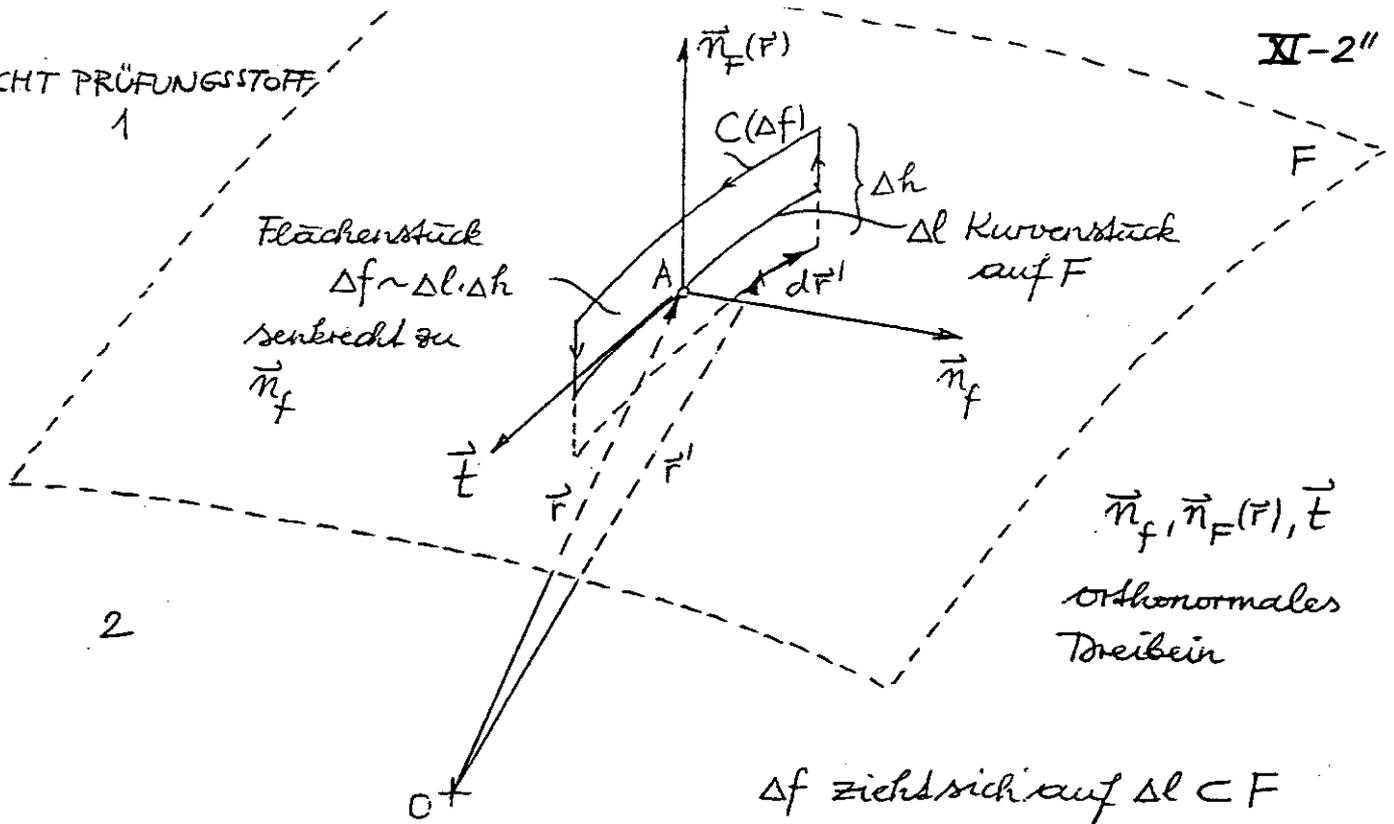
$$\text{Div } \vec{v}(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \left(\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \Delta h \underbrace{\frac{1}{\Delta V} \oint_{F(\Delta V)} \vec{v}(\vec{r}', t) \cdot d\vec{f}'}_{\text{div } \vec{v}(\Delta V, t)} \right)$$

$\text{div } \vec{v}(\Delta V, t)$ divergiert für $\Delta V \rightarrow 0$

falls Oberflächenquellen vorhanden!

NICHT PRÜFUNGSSTOFF

XI-2''



Δf zieht sich auf $\Delta l \subset F$
zusammen, Δl zieht sich
auf A zusammen

Definition:

Flächenrotor des Vektorfeldes $\vec{v} =$ Vektorfeld auf $F \perp \vec{n}_F(\vec{r})$,
definiert durch Angabe der Komponente für eine beliebig
vorgegebene Richtung $\vec{n}_f \perp \vec{n}_F(\vec{r})$ gemäß

$$\vec{n}_f \cdot \text{Rot } \vec{v}(\vec{r}, t) := \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left(\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta f} \oint_{C(\Delta f)} \vec{v}(\vec{r}', t) \cdot d\vec{r}' \right), \vec{r} \in F.$$

Beachte: $\vec{n}_f \cdot \text{rot } \vec{v}(\vec{r}, t) = \infty$ für $\vec{r} \in F$, also

$$\vec{n}_f \cdot \text{Rot } \vec{v}(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left(\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \Delta h \frac{1}{\Delta f} \oint_{C(\Delta f)} \vec{v}(\vec{r}', t) \cdot d\vec{r}' \right)$$

$\vec{n}_f \cdot \text{rot } \vec{v}(\Delta f, t)$ divergiert
für $\Delta f \rightarrow 0$,^{*)} aber mal

*) falls Oberflächenwirbel
vorhanden

gibt endlichen Grenzwert für
 $\Delta l \rightarrow 0, \Delta h \rightarrow 0.$

zu Abschnitt XI. 3. B

Der Teil bis inklusive Gl. (35a) (bereits beginnend mit Gl. (33)) ist für mich (D. Grau) nicht nachvollziehbar und in meinen Augen irreparabel. Dasselbe gilt nach meiner Ansicht für andere in den Lehrbüchern dargebotene "Kurzherleitungen". Die folgende Darstellung ist Becker / Sauter, Theorie der Elektrizität, Bd. III, entnommen.

Molekulare Polarisierbarkeit χ_{mol} und elektrische Suszeptibilität χ_e

Betrachtet wird der Fall der Elektrostatik der Dielektrika, d.h. alle makroskopischen Größen sind zeitunabhängig, nicht aber die mikroskopischen, weshalb man auch das mittlere Dipolmoment $\langle \vec{p}_{\text{mol}} \rangle$ eines Moleküls betrachtet, welches zeitlich konstant ist.

Ferner wird eine Substanz betrachtet, welche keine permanenten Dipole enthält.

Das am Ort des ^{herausgegriffenen} Moleküls wirksame statische Feld

\vec{E}_{lokal} erzeugt dann ein dazu proportionales molekulares Dipolmoment $\langle \vec{p}_{\text{mol}} \rangle$. (Dies trifft für einen relativ großen Feldstärkenbereich zu.)

Wählen wir den Ort des herausgegriffenen Moleküls als Koordinatenursprung, so gilt (ersetzt Gl. (33))

$$\langle \vec{p}_{\text{mol}} \rangle = \chi_{\text{mol}} \vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0}) . \quad [1]$$

Zur näherungsweise Berechnung von $\vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0})$ wird vereinfachend angenommen, dass die Beiträge der anderen Moleküle zum Feld $\vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0})$ durch deren Dipolfeldanteile ausreichend genau beschrieben werden. Indiziert man diese anderen Moleküle durch einen Index j und setzt man zur Vereinfachung der Schreibweise $\langle \vec{p}_{j,\text{mol}} \rangle \equiv \vec{p}_j$, so gilt

$$\vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0}) = \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle(\vec{0}) + \sum_j \frac{3(\vec{p}_j \cdot \vec{r}_j)\vec{r}_j - r_j^2 \vec{p}_j}{r_j^5} \quad [2]$$

$\vec{r}_j \neq \vec{0}, \forall j$

Außerhalb der für den Übergang von den mikroskopischen zu den makroskopischen Größen benützten Lorentz'schen Mittelungskugel vom Radius $R_0 \sim 100 \text{ \AA}$, $R_0 \gg a$ (a Größenordnung der Molekülabstände) kann man von der molekularen Struktur der Materie absehen und diese durch ein Kontinuum mit dem Dipolmoment $\vec{P}(\vec{r}) / \text{Volumeneinheit}$ ansehen ($\vec{P}(\vec{r})$ Polarisation):

$$\vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0}) = \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle(\vec{0}) + \sum_{0 < r_j < R_0} \frac{3(\vec{p}_j \cdot \vec{r}_j)\vec{r}_j - r_j^2 \vec{p}_j}{r_j^5} \quad [3]$$

$$+ \int_{r > R_0} d^3r \frac{3(\vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{P}(\vec{r})}{r^5}$$

Term mit $\delta(\vec{r})$ nicht benötigt wegen $r > R_0$

(Von null verschiedene Beiträge nur vom Raumbereich mit Materie, da $\vec{P}(\vec{r}) \equiv \vec{0}$ außerhalb der Materie.)

Um den Zusammenhang zwischen $\vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0})$ und $\vec{E}(\vec{0})$ herzustellen, schreiben wir $\vec{E}(\vec{0})$ auf analoge Art an:

$$\vec{E}(\vec{0}) = \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle(\vec{0}) + \langle \vec{E}_{\text{mat}} \rangle(\vec{0}) \quad [4]$$

$$= \langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle(\vec{0}) + \int d^3r \frac{3(\vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{P}(\vec{r})}{r^5} - \frac{4\pi}{3} \vec{P}(\vec{0})$$

s. Gl. (IV. 22)! Term mit $\delta(\vec{r})$ in Dichte liefert Summanden $-\frac{4\pi}{3} \vec{P}(\vec{0})$

Integriert wird dabei über ein beliebiges die Materie ganz einschließendes Volumen.

Eliminiert man mit Hilfe von Gl. [4] aus Gl. [3] $\langle \vec{E}_{\text{frei}} \rangle(\vec{0})$, so erhält man

$$\vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0}) = \vec{E}(\vec{0}) + \frac{4\pi}{3} \vec{P}(\vec{0}) + \sum_{\substack{j \\ 0 < r_j < R_0}} \frac{3(\vec{p}_j \cdot \vec{r}_j)\vec{r}_j - r_j^2 \vec{p}_j}{r_j^5} - \int_{r < R_0} d^3r \frac{3(\vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{P}(\vec{r})}{r^5} \quad [5]$$

Auf die genaue Festlegung von R_0 kommt es dabei nicht an, solange $R_0 \gg a$, aber R_0 makroskopisch gesehen klein (also $R_0 \sim 100 \text{ \AA}$) gilt.

$\vec{P}(\vec{r})$ kann man innerhalb der "Lorentzkugel" als konstant ansehen (\vec{P} ist ja ein makroskopisches Feld):

$$\vec{P}(\vec{r}) \approx \vec{P}(\vec{0}) = \text{konst} \quad \text{für } r < R_0. \quad [6]$$

Damit folgt aber für das Volumintegral in [5] der Wert

null, wie aus Abschnitt IV.1.D bekannt ist (Winkelintegral ist null), und man erhält

$$\vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0}) = \vec{E}(\vec{0}) + \frac{4\pi}{3} \vec{P}(\vec{0}) + \sum_j \frac{3(\vec{p}_j \cdot \vec{r}_j) \vec{r}_j - r_j^2 \vec{p}_j}{r_j^5} \quad [7]$$

$0 < r_j < R_0$

Der Beitrag \sum_j hängt nicht nur von den $\vec{p}_j = \langle \vec{p}_{j,\text{mol}} \rangle$, sondern auch von der mikroskopischen Struktur wesentlich ab. Wie Lorentz gezeigt hat, gilt für ein einfaches kubisches Gitter (alle $\vec{p}_j = \vec{p}$ gleich und an kubischem Gitter angeordnet), dass die Summe null ist. (Der Ursprung, an dem das herausgegriffene Molekül "sitzt", ist ein Gitterpunkt.) Es gilt dann also die von Lorentz angegebene Beziehung

$$\vec{E}_{\text{lokal}}(\vec{0}) = \vec{E}(\vec{0}) + \frac{4\pi}{3} \vec{P}(\vec{0}) \quad [8]$$

Es ist eine plausible Annahme, dass die obige \sum_j auch für regellose Molekülanordnungen (amorphe Substanzen, Flüssigkeiten, Gase) null ist. Für andere als einfache kubische Gitter ist dieser Beitrag nicht null (s. Literaturangabe in Becker/Sauter), doch schreibt Jackson, dass es eine "gute Arbeitshypothese" ist, dass sie auch für solche Materialien gegenüber $\vec{E}(\vec{0}) + \frac{4\pi}{3} \vec{P}(\vec{0})$ vernachlässigbar ist.

Mit Gl. [1], [8] und

$$\vec{P}(\vec{0}) = \chi_e \vec{E}(\vec{0}) \quad [9]$$

sowie mit $\vec{P}(\vec{0}) = N \langle \vec{p}_{mol} \rangle$ [10]

(Ann.: lauter gleichartige Moleküle; N Zahl der Moleküle pro Volumeneinheit)

$$\vec{P}(\vec{0}) = N \langle \vec{p}_{mol} \rangle = N \chi_{mol} \vec{E}_{lokal}(\vec{0}) = N \chi_{mol} \left(\vec{E}(\vec{0}) + \frac{4\pi}{3} \vec{P}(\vec{0}) \right)$$

$$\vec{P}(\vec{0}) = \frac{N \chi_{mol}}{1 - \frac{4\pi}{3} N \chi_{mol}} \vec{E}(\vec{0})$$
 [11]

χ_e , also gl. (35b) "abgeleitet".

zu Abschnitt XI.3.D

zur Ableitung der Formel (43b):

(Für diejenigen, denen es im Skriptum "zu schnell geht" und denen die formale Beziehung (43a) nicht vertraut ist.)

Für die Ableitung von (43b) muss man $\epsilon(\omega)$ für $\omega \in \mathbb{C}$ definieren und das Verhalten für $\text{Im } \omega \geq 0$ (reelle Achse und "obere Halbebene") untersuchen.

Mit $\omega_r \equiv \text{Re } \omega$, $\omega_i \equiv \text{Im } \omega$ gilt

1)
$$\epsilon(\omega_r + i\omega_i) = 1 + \int_0^{+\infty} dt e^{i\omega_r t} \underbrace{G(t)} e^{-\omega_i t}$$

Ann.: endlich, $\forall t$

\Rightarrow Integral \exists für $\omega_i > 0$ und auch für $\omega_i = 0$,
wenn wir ferner $G(t) \rightarrow 0$ stärker als $\frac{1}{t}$ annehmen
 $t \uparrow +\infty$

2)
$$\frac{d\epsilon(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega = \omega_r + i\omega_i} = i \int_0^{+\infty} dt e^{i\omega_r t} t G(t) e^{-\omega_i t}$$

\Rightarrow Integral und damit Ableitung \exists für $\omega_i > 0$

Als eine in der "oberen Halbebene" endliche und dort überall differenzierbare Funktion ist $\underline{E(\omega)}$ eine in der "oberen Halbebene" reguläre (analytische) Funktion.

Ferner ist $E(\omega)$ auf der reellen Achse endlich.

Mit $E(\omega')$ (Variable nun ω' genannt) ist auch

$$\frac{E(\omega') - 1}{\omega' - \omega}, \quad \omega \in \mathbb{R} \text{ fest, regulär in der "oberen Halbebene",}$$

und der ζ von Abb. 1

ganz im Regularitätsgebiet dieser Funktion verläuft, gilt der Cauchysche Integralsatz:

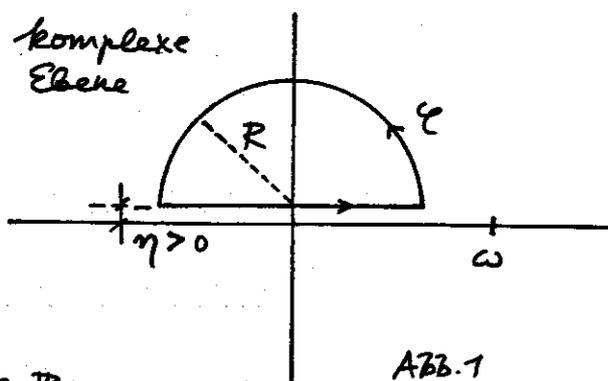


Abb. 1

$$\oint_{\zeta} \frac{E(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' = 0 \quad \text{für } \omega \in \mathbb{R}.$$

Weitere Annahme bzgl. $G(\tau)$: Taylorentwicklung für $\tau = 0+ \exists$

$$G(\tau) = \underbrace{G(0+)}_0 + \tau G'(0+) + \dots, \quad \tau > 0$$

\Rightarrow (Einsetzen in die Definition von $E(\omega)$, kurze elementare Rechnung)

$$\underline{E(\omega') - 1 = -\frac{G'(0+)}{\omega'^2} + O\left(\frac{1}{\omega'^3}\right)} \quad \text{für große } |\omega'| \text{ und } \underline{\text{Im } \omega' > 0}$$

\Rightarrow Integral über den Halbkreis

$(\omega' = R e^{i\eta} + i\eta, \eta > 0)$ "verschwindet" für $R \uparrow +\infty$

wie $\frac{1}{R^2}$, weshalb (Abb. 2)

$$\int_{-\infty + i\eta}^{+\infty + i\eta} \frac{E(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' = 0$$

für $\omega \in \mathbb{R}$

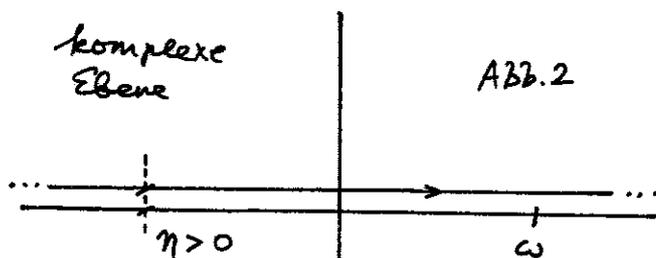


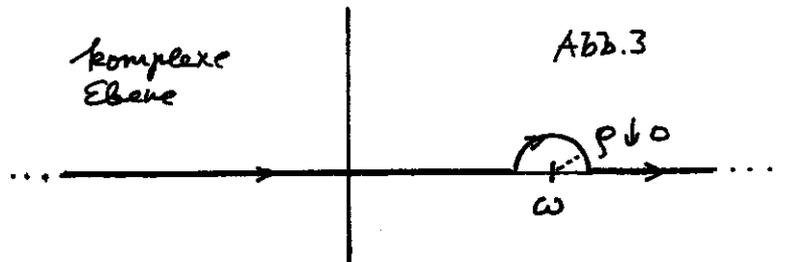
Abb. 2

gelten muss. Im Grenzfall $\eta \downarrow 0$ müssen wir nur

auf den einfachen Pol von $\frac{\epsilon(\omega')-1}{\omega'-\omega}$ bei $\omega'=\omega$ achten, da wir bewiesen haben, daß $\epsilon(\omega')$ auf der reellen Achse endlich ist. Der Pol $\omega'=\omega$ muß beim Grenzübergang "unterhalb" des Integrationsweges bleiben, womit wir (P Hauptwert) für $\eta \downarrow 0$ (Abb.3)

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon(\omega')-1}{\omega'-\omega} d\omega'$$

$$+ \int_{\underbrace{\pi}_{\rho \downarrow 0}} \frac{\epsilon(\omega')-1}{\omega'-\omega} d\omega' = 0 \quad \text{für } \omega \in \mathbb{R}$$



erhalten. Berechnung des Integrals \int_{π}^0 gibt mit

$$\left. \begin{aligned} \omega'-\omega &= \rho e^{i\varphi} \quad (\varphi \text{ von } \pi \text{ bis } 0) \\ d\omega' &= i\rho e^{i\varphi} d\varphi \end{aligned} \right\} \frac{d\omega'}{\omega'-\omega} = i d\varphi$$

(da $\epsilon(\omega')-1$ für $\text{Im}\omega' > 0$ regulär und für $\text{Im}\omega' = 0$ endlich ist)

$$i [\epsilon(\omega)-1] \int_{\pi}^0 d\varphi = -i\pi [\epsilon(\omega)-1]$$

Damit folgt aber

$$\underline{\epsilon(\omega)-1 = \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon(\omega')-1}{\omega'-\omega} d\omega'} \quad \text{, also Gl. (43b).}$$

zu "Leiter":

Im Kapitel XIV (Wellen in Materie) wird gezeigt:

Leiter können (unter bestimmten VS) durch die verallgemeinerte Dielektrizitätsfunktion

$$\eta(\omega) := \epsilon(\omega) + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \quad \text{beschrieben werden.}$$

gleiche Analytizitäts-eigen-schaften wie bei Isolatoren (da gleiche physikal. Mechanismen)

zusätzliche Dissipation von Energie durch Joulesche Wärme

Einsetzen von $\epsilon(\omega) = \eta(\omega) - i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$ in Gl. (45a,b)
gibt dann Gl. (47a,b).

In vielen Büchern (s. z. B. Jackson) wird dann statt $\eta(\omega)$
einfach wieder $\epsilon(\omega)$ geschrieben, d. h. es wird für letzter
einfach $\frac{4\pi\sigma}{\omega}$ zusätzlich in $\text{Im } \epsilon(\omega)$ "aufgenommen".

Benützt man $\eta(\omega)$, so kann man auch in Gl. (40a) $\epsilon(\omega)$
durch $\eta(\omega)$ ersetzen, wenn man zugleich in den FG den
Term $\frac{4\pi}{c} \vec{j} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E}$ weglässt. In der neuen (zu $\eta(\omega)$
gehörigen) Relaxationsfunktion ^{$G(\tau)$} bedeutet dies, daß einfach
ein additiver Beitrag $4\pi\sigma$ hinzukommt, sodaß

$G(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow +\infty} 4\pi\sigma$ (s. Gl. (46)) folgt. Die einfache qualitative

Überlegung dazu, die diesen Zusatzterm ^{in $G(\tau)$} elementar begründet,
lege ich "in Original-Nowotny-Version" als Seite XI-10' bei.

zu Abschnitt XI.3.E

zu Gl. (51): ω_p heißt Plasmafrequenz

zu Gl. (52): Der Beweis (3 Zeilen) ist bei Jackson zu finden.

SIHE DIE ABBILDUNG VON SETTE XI-11 ZU DISPERSION UND
ABSORPTION!

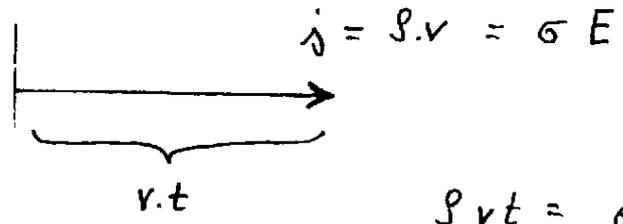
zu Abschnitt XI.4.B

zu Gl. (68): Ausführliche Diskussion in H. Mitter, Elektrodynamik,
B.I. 1980.

Kapitel XI. 3.C : LEITER

$E(t) = E \cdot \theta(t)$ (Einschalten zum Zeitpunkt $t=0$!)

Wir betrachten nun die Ladungsverchiebung in einem Leiter:



$\rho v t = \sigma E t$
 P (Dipolmoment pro Volumens einheit)

Somit folgt:

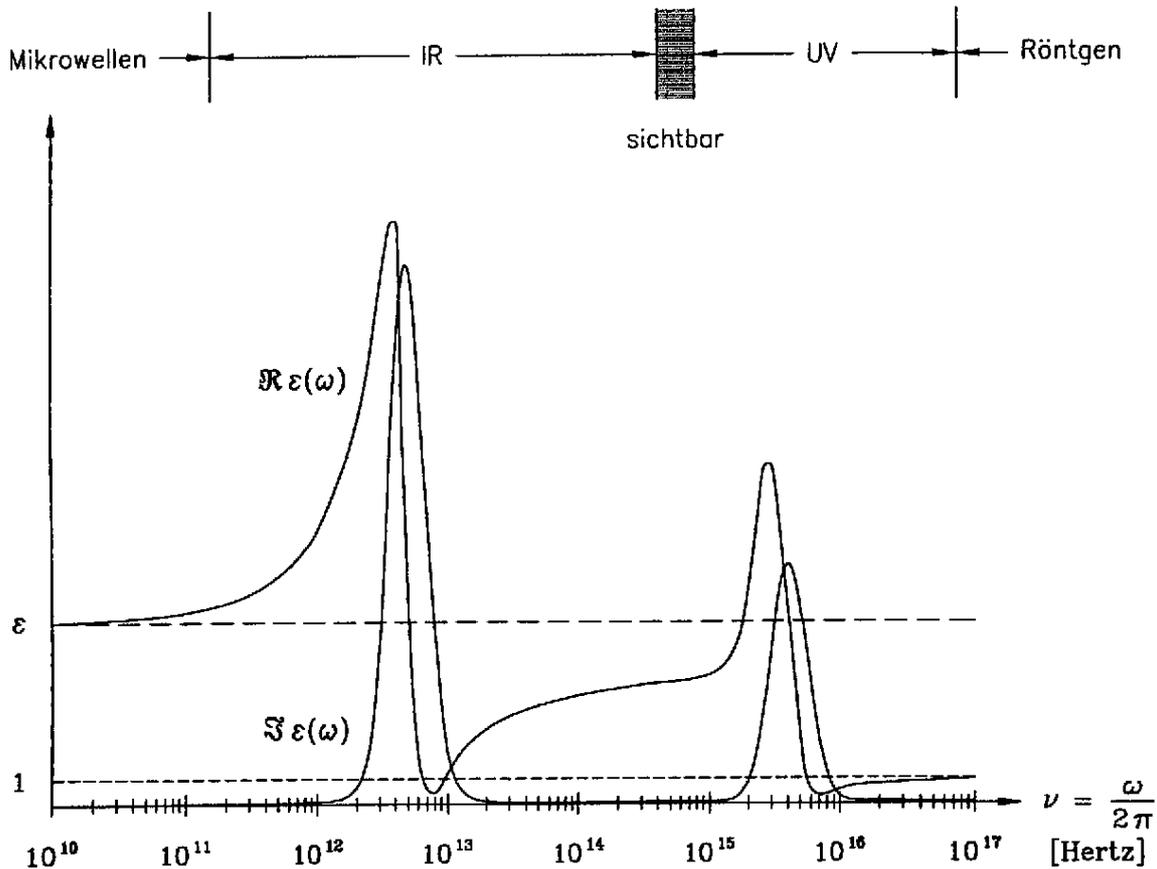
$D = E + 4\pi P \rightarrow \underline{D = E + 4\pi \sigma \cdot E t}$

Dies folgt aus Gleichung 38 mit $E(t) = E \cdot \theta(t)$, wenn wir

$D = E + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau G(\tau) \cdot E(t-\tau)$
 $\underline{G(\tau) = 4\pi \sigma}$ setzen!

Re $\epsilon(\omega)$ und Im $\epsilon(\omega)$ für NaCl

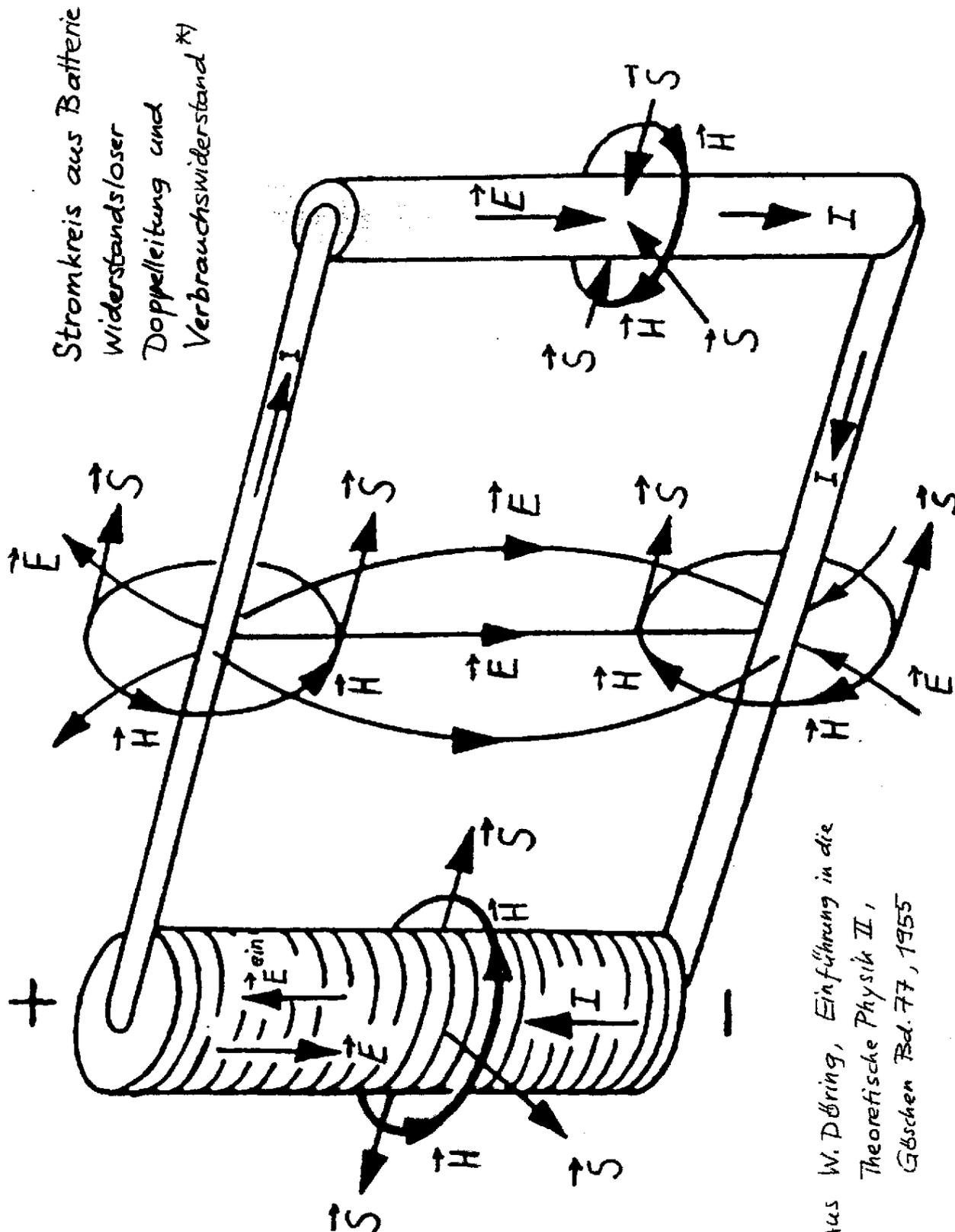
Zusammenhang zwischen Absorption und anomaler Dispersion



Bemerkung zur Permeabilität:

Betrachtet man magnetische Materialien, so kann man in Analogie zu $\epsilon(\omega)$ eine komplexwertige Permeabilitätsfunktion $\mu(\omega)$ einführen und für diese Dispersionsrelationen herleiten. Man muss aber dabei beachten (s. Abschnitt XI.3.A), dass für Frequenzen im optischen Bereich und "darüber", die Permeabilität ihren Sinn verliert und formal $\mu=1$ (also $\text{Im } \mu(\omega) = 0$) zu setzen ist. In der zu Gl. (45a) analogen Beziehung darf dann nur bis zu einer endlichen Frequenz integriert werden (s. Landau-Lifschitz Bd. 8, § 62).

Zu Abschnitt XI.4.C

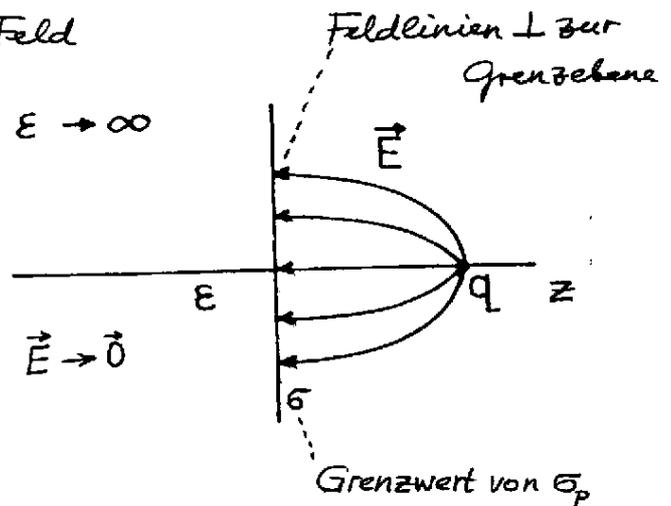
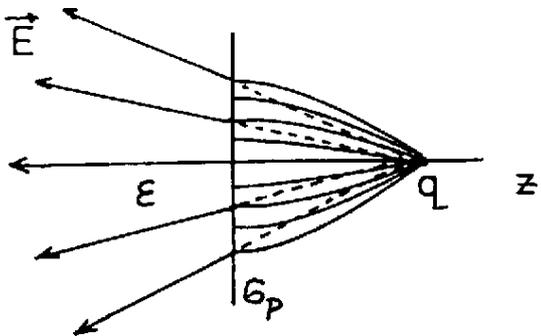


Stromkreis aus Batterie
Widerstandsloser
Doppelleitung und
Verbrauchswiderstand *)

*) Aus W. Döring, Einführung in die
Theoretische Physik II,
Götschen Bd. 77, 1955

zu Abschnitt XII.1.C

Feldlinienverlauf für das \vec{E} -Feld



(Dielektrikum mit $\epsilon \rightarrow \infty$ wirkt wie [idealer] Leiter)

zu Abschnitt XII.1.D

1) Wegen der axialen Symmetrie bzgl. der z-Achse ist von vornherein klar, dass innen und außen

$\phi = \phi(r, \vartheta)$ gilt. Man müsste daher nur nach den $P_l(\cos \vartheta)$ entwickeln.

2) Mit Gl. (25a) folgt

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{3}{\epsilon+2} \vec{E}_0 = \vec{E}_0 - \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \vec{E}_0$$

$$\vec{E}_a(\vec{r}) = \vec{E}_0 + \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{p}}{r^5}$$

1. Term \vec{E}_0 verursacht von freien Ladungen im Unendlichen,

2. Term verursacht von Polarisationsflächenladungen auf der Oberfläche der polarisierten dielektrischen Kugel.

Nach außen wirkt die polarisierte dielektrische Kugel

wie ein Punktdipol mit Moment \vec{p} im Kugelmittelpunkt.

Daß \vec{p} tatsächlich das gesamte induzierte elektrische Dipolmoment der dielektrischen Kugel ist, sieht man,

wenn man für $r < R$ die Polarisation $\vec{P}(\vec{r})$ berechnet und diese über die gesamte Kugel integriert:

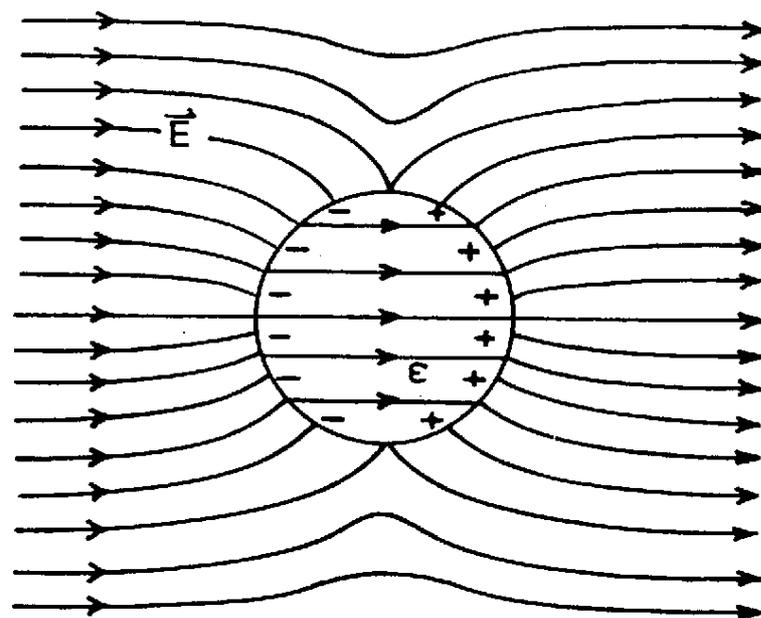
$$\vec{D}_i(\vec{r}) = \vec{E}_i(\vec{r}) + 4\pi \vec{P}(\vec{r}) = \epsilon \vec{E}_i(\vec{r}) \Rightarrow$$

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \vec{E}_0$$

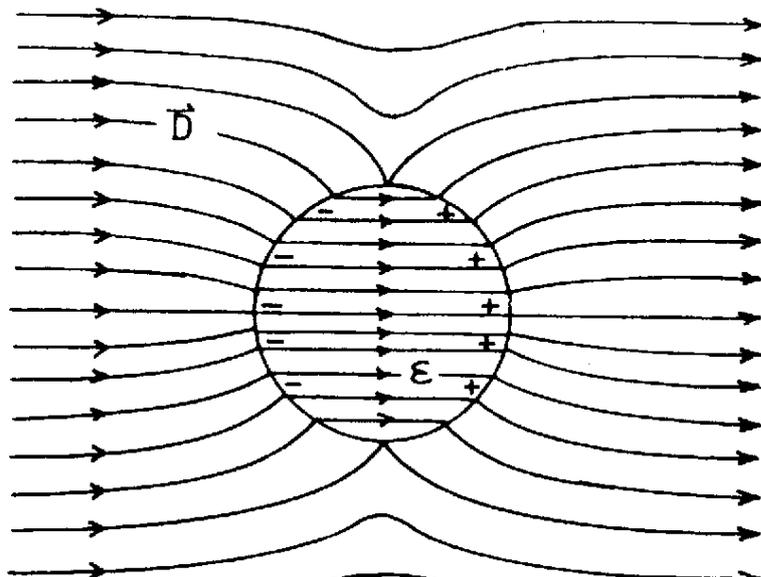
(homogene Polarisation $\Rightarrow \rho_p(\vec{r}) = -\text{div} \vec{P}(\vec{r}) = 0$)

$$\int_{\text{Kugel}} d^3r \vec{P}(\vec{r}) = \frac{4\pi R^3}{3} \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \vec{E}_0 = \vec{p} \quad \checkmark$$

Berechne selbst $\sigma_p(\mathcal{D})$ aus $\sigma_p(\mathcal{D}) = -\text{Div} \vec{P} = P_r(R, \mathcal{D})$.



Beachte die "Brechung" der Feldlinien.



zu Abschnitt XII. 2.B und Abschnitt XII. 4.B
 ~~~~~

In Abschnitt XII. 2.B sind die letzten 6 Zeilen ab  
 "Für die Berechnung..." und in Abschnitt XII. 4.B  
 sind die letzten 4 Zeilen ab "so dass für die Berechnung..."  
 zu streichen.

Während der in Abschnitt XI. 4.B abgeleitete Ausdruck  
 für die Energiedichte Gl. (XI. 63) nicht nur für homogene  
lineare Medien, sondern auch für Medien mit ortsabhängigem  
 $\epsilon$  und  $\mu$  gültig ist, wie Gl. (XI. 57) und Gl. (XI. 60)  
 zeigen, ist der Maxwellsche Spannungstensor von Gl. (XI. 65)  
ausschließlich für homogene lineare Medien gültig,  
 da der Schritt von Gl. (XI. 58) zu Gl. (XI. 61) bei  
 ortsabhängigem  $\epsilon$  und  $\mu$  nicht möglich ist!

Im Fall der Elektrostatik liefert der Spannungstensor Gl. (XI. 65)  
 daher gemäß

$$f_k(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x_i} T_{ik}^{(mat)}(\vec{r}) \quad (*)$$

nur den Term  $\rho(\vec{r}) E_k(\vec{r})$  — wie dies ja auch aus Gl. (XI. 61)  
 ersichtlich ist — und nicht den Ausdruck (34a) bzw. (34b)!

Mit der im Abschnitt II. 2.B für isotrope lineare Medien  
 gefundenen Kraftdichte Gl. (33b), welche auch für  
inhomogene Medien gilt, kann man natürlich mit Hilfe  
 von (\*) einen für isotrope inhomogene lineare

Dielektrika in der Elektrostatik gültigen Spannungstensor  
 $\underline{\underline{T}}_{(mat)}(\vec{r})$  ableiten (s. z.B. Becker/Sauter Bd.1).

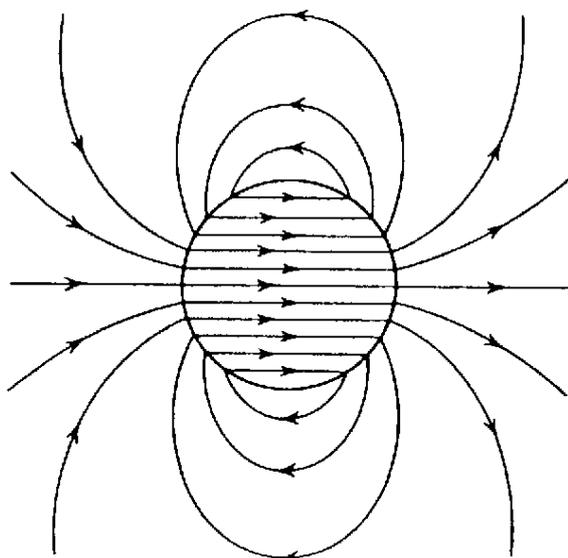
Im Fall der Magnetostatik nichtleitender Medien liefert der Spannungstensor Gl. (XI. 65) entsprechend nicht den Ausdruck von Gl. (78), sondern mer  $f_k(F) = 0$  — wie auch Gl. (XI. 61) zeigt, aus der  $\overset{\leftarrow}{T}_{(mat)}$  Gl. (XI. 65) abgelesen wurde. Ausgehend von Gl. (77b) kann man einen auch für inhomogene (allerdings isotrope) lineare Medien in der Magnetostatik gültigen Spannungstensor ableiten.

zu Abschnitt XII. 2.C

Wenn die Behandlung dieser zwei Beispiele nicht ausreichend genug ist, kann eine ausführlichere Behandlung bei Greiner Bd. 3, Beispiele 7.2 und 7.4, nachlesen oder sich die entsprechenden Vorlesungs-Folien kopieren.

zu Abschnitt XII.3.C

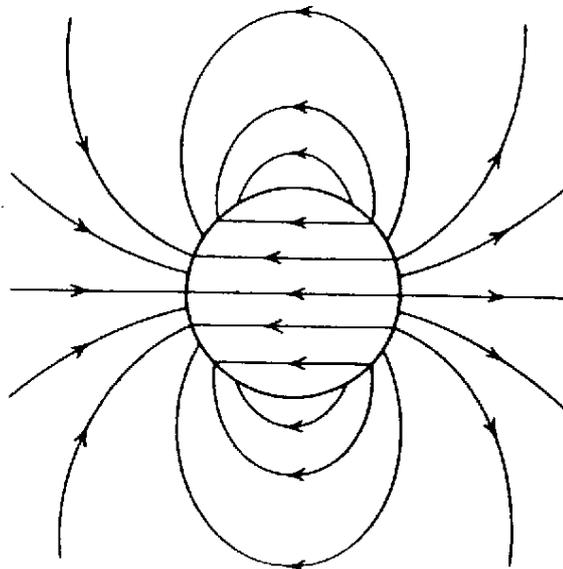
$\vec{B}$ -Feld



$\text{Div } \vec{B} = 0$ , aber

$$\text{Rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{k}_M(\mathcal{V})$$

$\vec{H}$ -Feld



$\text{Rot } \vec{H} = \vec{0}$ , aber

$$\text{Div } \vec{H} = 4\pi M_r(\mathcal{V})$$

Es gilt

$$\underline{r < R: \vec{J}_M(\mathcal{F}) = c \text{rot } \vec{M}(\mathcal{F}) = \vec{0} \quad (\text{da } \vec{M} \text{ konstant f\"ur } r < R)}$$

$$\underline{r = R: \vec{k}_M(\mathcal{V}) = c \text{Rot } \vec{M} = - \left( \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{M} \right) \Big|_{r=R} \quad \text{selbst ausrechnen!}$$

zu Abschnitt XII.4.B

Siehe Seite XII-3, XII-4.

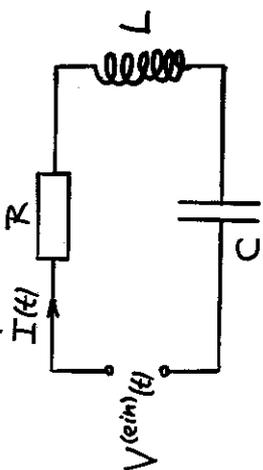
XIII. ELEKTROTECHNIK: LINEARE STROMKREISE  
MIT OHMSCHEN WIDERSTÄNDEN, KONDENSATOREN,  
INDUKTIONSSPULEN UND SPANNUNGSQUELLEN  
IM QUASISTATIONÄREN FALL

FRAGE: Wie kommt man von

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{D}(\vec{r}, t) &= 4\pi \rho(\vec{r}, t) \\ \text{div } \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0 \\ \text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{H}(\vec{r}, t) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{D}(\vec{r}, t) &= \epsilon \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\mu} \vec{B}(\vec{r}, t) \\ \vec{j}(\vec{r}, t) &= \sigma \vec{E}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

für den einfachen Stromkreis



auf

$$RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I(t') dt' = V^{(ein)}(t) \quad ?$$

Die Antwort auf diese Frage ist im Rahmen der theoretischen Physik wichtiger als das, was man in der Elektrotechnik mit derartigen Netzwerkgleichungen an Nützlichem und Interessantem "anstellen" kann. Da das Skriptum (wie fast alle Elektrodynamik-Bücher) auf diese Frage keine nachvollziehbare Antwort gibt, und die getroffenen Naturangewinnungen nicht transparent herausarbeitet, gebe ich im folgenden eine ausführlichere Darstellung. Diese folgt weitgehend

G. Ludwig Einführung in die Grundlagen der theoretischen Physik, Bd. 2, Kapitel VIII, § 6  
 Bertelsmann Universitätsverlag, Düsseldorf 1974

# XIII.1. Das quasistationäre elektromagnetische Feld

## XIII.1. A\*. Grundgleichungen

### 1) Lokalisierte Quellverteilung im Vakuum

In Coulombbeziehung gilt (s. Abschnitt II.2.C):

$$\underline{\underline{\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_C(\vec{r}, t) + \vec{E}_T(\vec{r}, t)}}$$

C... longitudinaler oder Coulomb-  
anteile

T... transversaler oder induzierter  
Anteil

mit

|                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\text{div } \vec{E}_C(\vec{r}, t) = 4\pi\rho(\vec{r}, t)$ $\text{rot } \vec{E}_C(\vec{r}, t) = \vec{0}$ $\text{div } \vec{E}_T(\vec{r}, t) = 0$ $\text{rot } \vec{E}_T(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$ | $\text{div } \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$ $\text{rot } \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}$ |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

XIII-2

Potentiale:  $\phi_C(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{A}_T(\vec{r}, t)$  mit  $\text{div } \vec{A}_T(\vec{r}, t) = 0$

$$\vec{E}_C(\vec{r}, t) = -\text{grad } \phi_C(\vec{r}, t) \quad , \quad \Delta \phi_C(\vec{r}, t) = -4\pi\rho(\vec{r}, t)$$

$$\phi_C(\vec{r}, t) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{E}_T(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_T(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\square \vec{A}_T(\vec{r}, t) = -\frac{4\pi}{c} \left[ \vec{j}(\vec{r}, t) - \frac{1}{4\pi} \text{grad } \frac{\partial \phi_C(\vec{r}, t)}{\partial t} \right]$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{rot } \vec{A}_T(\vec{r}, t)$$

$$=: \vec{j}_T(\vec{r}, t)$$

$$\vec{A}_T(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}_T(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

quasistationärer Fall

d charakteristische Lineardimension der Quellverteilung

$\omega$  charakteristische Kreisfrequenz für die zeitliche Änderung der Quellverteilung,  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$  zugehörige Wellenlänge

ANNAHME  $d \ll \lambda$

z.B.: LW-Bereich:  $\omega \sim 10^6 \text{ Hz} = 1 \text{ MHz}$ ,  $d \ll 2 \text{ km}$

UKW-Bereich:  $\omega \sim 10^9 \text{ Hz} = 1 \text{ GHz}$ ,  $d \ll 2 \text{ m}$

XIII-3

⇒ Retardierung für Aufpunkte in nicht zu großer Entfernung von der Quellverteilung und insbesondere innerhalb der Quellverteilung vernachlässigbar, d.h.

$$\Rightarrow \vec{A}_T(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}_T(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Welcher Vernachlässigung in den FG für  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  entspricht dies? Es bedeutet, daß

$$\Delta \vec{A}_T(\vec{r}, t) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_T(\vec{r}, t)$$

gilt, also Vernachlässigung von

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_T(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_T(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

gegen den in  $\frac{4\pi}{c} \vec{j}_T(\vec{r}, t)$  enthaltenen Term  $\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_c(\vec{r}, t)}{\partial t}$

$$\frac{4\pi}{c} \vec{j}_T(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \text{grad} \frac{\partial \phi_c(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

⇒ Grundgleichungen für den quasistationären Fall (Vakuum)

nur Coulombanteil des Maxwellterms!

|                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\text{div} \vec{E}_c(\vec{r}, t) = 4\pi \rho(\vec{r}, t)$ $\text{rot} \vec{E}_c(\vec{r}, t) = \vec{0}$ $\text{div} \vec{E}_T(\vec{r}, t) = 0$ $\text{rot} \vec{E}_T(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$ | $\text{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$ $\text{rot} \vec{B}(\vec{r}, t) = \underbrace{\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_c(\vec{r}, t)}{\partial t}}_{\frac{4\pi}{c} \vec{j}_T(\vec{r}, t)}$ |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_c(\vec{r}, t) + \vec{E}_T(\vec{r}, t)$$

$$\vec{E}_c(\vec{r}, t) = -\text{grad} \phi_c(\vec{r}, t) \quad \text{mit} \quad \phi_c(\vec{r}, t) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_T(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_T(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \text{rot} \vec{A}_T(\vec{r}, t) \end{aligned} \right\} \text{mit} \quad \vec{A}_T(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}_T(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Weg:  $\rho \rightarrow \phi_c \rightarrow \vec{E}_c$ ,  $\vec{j}, \vec{E}_c \rightarrow \vec{j}_T \rightarrow \vec{A}_T \rightarrow \vec{E}_T, \vec{B}$

2) Materie mit linearen MG, freie und gebundene Quellen lokalisiert

XIII-6

MG:  $\vec{P}(r,t) = \chi_e \vec{E}(r,t)$

quasistationärer Fall

konsequenterweise von  $\rho_p(r,t) = -\text{div} \vec{P}(r,t)$ ,  $\vec{j}_p(r,t) = \frac{\partial \vec{P}(r,t)}{\partial t}$   
ebenfalls nur Coulombanteil beibehalten

Dann gilt ( $\rho, \vec{j}$  freie Quellen):

$\vec{E}(r,t) = \vec{E}_c(r,t) + \vec{E}_T(r,t)$

$\chi_e \frac{\partial \vec{E}_c(r,t)}{\partial t} + \chi_e \frac{\partial \vec{E}_T(r,t)}{\partial t}$   
 $-\chi_e \text{div} \vec{E}_c(r,t) - \chi_e \text{div} \vec{E}_T(r,t)$

FG:

|                                                                                     |                                                                                                                  |
|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\text{div} \vec{D}_c(r,t) = 4\pi \rho(r,t)$                                        | $\text{div} \vec{B}(r,t) = 0$                                                                                    |
| $\text{rot} \vec{E}_c(r,t) = \vec{0}$                                               | $\text{rot} \vec{H}(r,t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(r,t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}_c(r,t)}{\partial t}$ |
| $\text{div} \vec{E}_T(r,t) = 0$                                                     | $=: \frac{4\pi}{c} \vec{j}(r,t)$                                                                                 |
| $\text{rot} \vec{E}_T(r,t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(r,t)}{\partial t}$ |                                                                                                                  |

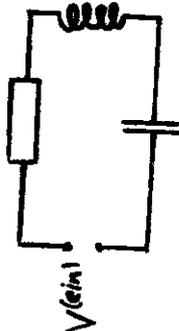
MG:

$\vec{D}_c(r,t) = \epsilon \vec{E}_c(r,t)$ ,  $\vec{H}(r,t) = \frac{1}{\mu} \vec{B}(r,t)$ ,  $\vec{j}(r,t) = \sigma \vec{E}(r,t)$

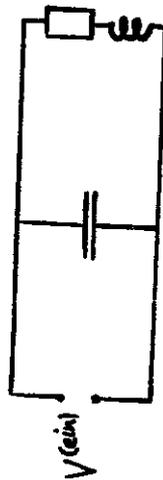
XIII-7

Diese Gleichungen bilden die physikalische Basis für die (näherungsweise) Behandlung elektrotechnischer Stromkreise.

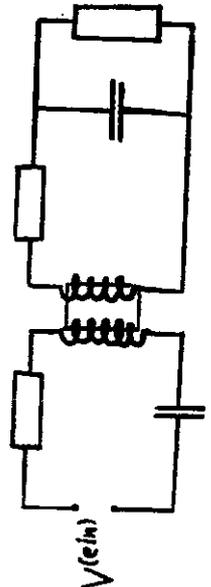
Einfachster Fall: ein linearer Stromkreis ohne Verzweigungen; z.B.



"Nächstkomplizierter" Fall: ein linearer Stromkreis mit Verzweigungen; z.B.



Allgemeiner Fall: mehrere, untereinander induktiv oder (und) kapazitiv gekoppelte Stromkreise mit oder ohne Verzweigungen; z.B.



Beachte: Die Forderung der Quasistationarität bedeutet für  $d \sim 1m \Rightarrow \omega \ll 10 \text{ MHz}$ .

XIII. 1. B\*. Linearer Stromkreis ohne Verzweigungen

Wegen  $\text{rot } \vec{H}(r,t) = \frac{1}{c} \vec{J}(r,t)$

ist die durch

$$\vec{J}(r,t) = \vec{j}(r,t) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}_c(r,t)}{\partial t}$$

definierte "Stromdichte" quellenfrei:

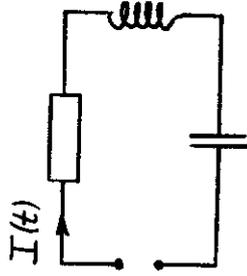
$$\text{div } \vec{J}(r,t) = 0$$

⇒

Die durch

$$I(t) = \int_{\text{Querschnitt}} d^2\vec{f} \cdot \vec{J}(r,t)$$

definierte "Stromstärke" ist für gegebenes  $t$  für jeden Querschnitt gleich (Querschnitt = Drahtquerschnitt bzw. Querschnitt eines Kondensators) [Umlaufsinn festlegen!]



Bemerkung zu  $\vec{J}(r,t)$ : Grund für "..."

$$\vec{J}(r,t) = \vec{j}(r,t) + \frac{\partial \vec{P}_c(r,t)}{\partial t} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}_c(r,t)}{\partial t}$$

$\vec{j}_p, c(r,t)$

Coulombanteil des  
Polarisationsstromes

Coulombanteil des  
Maxwelltermes  
(des "Verschiebungs-  
stromes" des Vakuums")

Coulombanteil des sog.  
"Verschiebungsstromes"  
im Medium

Ferner ist wegen

$$\text{rot } \vec{E}_c(r,t) = \vec{0}$$

Gilt nur für  $\vec{E}_c$ ,  
nicht für  
 $\vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_T$  !

$$\oint \vec{E}_c(r,t) \cdot d\vec{r} = 0 \quad \text{für einen}$$

beliebigen geschlossenen Weg,  
insbesondere bei Integration über den  
(über die Spannungsquelle) geschlossenen  
Stromkreis

Die "integralen" Beziehungen

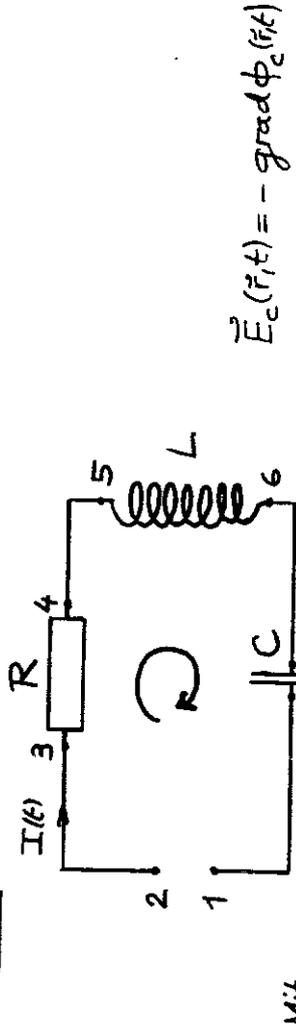
$I(t) = \int_{\text{Querschnitt}} d^2\vec{f} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t)$  gleich für alle Querschnitte  
 $\oint \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = 0$  bei Integration längs des Stromkreises inklusive Spannungsquelle

nützen wir für die Ableitung des sog.

allgemeinen Ohmschen Gesetzes

$$RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I(t') dt' = V^{(ein)}(t)$$

aus.



Mit  $\int_j \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = \int_j \phi_{cj}(t) - \phi_{ck}(t)$  wird

$$\int_3^4 + \int_4^5 + \int_5^6 + \int_6^7 + \int_7^8 + \int_8^1 = - \int_1^2$$

zu: "Summe aller Spannungsabfälle" an Leitungen, Ohmschen Widerständen, Induktionsspulen und Kondensatoren = eingepreigte Spannung, s. später <sup>\*) bzgl.  $\phi_c(\vec{r}, t)$</sup>

Spannungsquelle

(hier)

Der interne Aufbau wird nicht behandelt und daher wird  $\int_1^2$  nicht berechnet. Vielmehr wird

$$- \int_1^2 \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = \phi_{c2}(t) - \phi_{c1}(t) =: V^{(ein)}(t)$$

gesetzt.

Symbolisch:  $\downarrow V^{(ein)}$

1 2

Bemerkung: Ist es nicht möglich, eine solche Beziehung

(näherungsweise) anzuschreiben, so steht dem

betreffenden Element des Stromkreises nicht

der Name "Spannungsquelle" zu. Die Frage

der Realisierung ist eine andere.

Zuleitungsdrähte, Ohmscher Widerstand,

Induktionsspule und Kondensator

Für diese "Wegstücke" wird  $\int_j \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r}$  berechnet,

was aber nur unter weiteren Näherungsannahmen

möglich ist.

Näherungsannahmen:

1) In den Zuleitungsdrähten, Ohmschen Widerständen und Spulendrähten wird

$$\vec{J}(r,t) = \vec{J}(r,t) = \sigma (\vec{E}_c(r,t) + \vec{E}_T(r,t))$$

gesetzt, d.h. der "Verschiebungsstrom" wird gegen den Leitungsstrom vernachlässigt.

Physikalisch bedeutet dies die Vernachlässigung der Kapazität dieser Stromkreisteile.

Bemerkung: Für einen Wechselstrom gilt ( $\omega$  Kreisfrequenz)

$$\left| \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| = \left| \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right| = \frac{\epsilon \omega}{4\pi \sigma}$$

die Näherung ist also für

$$\omega \ll \frac{4\pi \sigma}{\epsilon} \sim 10^{18} \text{ Hz für metallische Leiter}$$

gerechtfertigt. Wegen der Forderung der

Quasistationarität mussten wir aber schon für

$d \sim 1\text{m}$  die Erfüllung von  $\omega \ll 10\text{MHz} = 10^7\text{Hz}$  verlangen.

2) In den Zuleitungsdrähten und

Spulendrähten wird die Leitfähigkeit gegenüber jener in den Ohmschen Widerständen als so

groß angenommen, daß in den Zuleitungs- und Spulendrähten

$$\vec{E}(r,t) = \vec{E}_c(r,t) + \vec{E}_T(r,t) = \vec{0}$$

gesetzt werden kann.

Physikalisch bedeutet dies die Vernachlässigung des Ohmschen Widerstandes dieser Stromkreisteile.

3) In den Zuleitungsdrähten wird überdies

$$\vec{E}_T(r,t) = \vec{0}$$

gesetzt.

Physikalisch bedeutet dies die Vernachlässigung der Auswirkungen der Induktion auf die Zuleitungen (Skineneffekt und Induktivität)

Bemerkung: In Abschnitt XIV.3.C wird gezeigt,

daß der Skineneffekt für einen Kupferdraht mit

1mm Durchmesser vernachlässigt werden kann,

wofür  $\omega \ll 10\text{kHz} = 10^4\text{Hz}$  ist.

Für  $\omega \gtrsim 20\text{kHz}$  spricht man i.a. von Hochfrequenztechnik.

4) Die Ohmschen Widerstände seien an solchen Stellen in den Stromkreis eingebaut, daß man (unter den angenommenen Bedingungen für die betrachteten Frequenzen) auch in ihnen

$$\vec{E}_T(\vec{r}, t) = \vec{0}$$

setzen kann.

Physikalisch bedeutet dies die Vernachlässigung der Induktion in den Ohmschen Widerständen.

5) Auch die Kondensatoren seien an solchen Stellen eingebaut, daß man zwischen ihren Platten

$$\vec{E}_T(\vec{r}, t) = \vec{0}$$

setzen kann.

Zuleitungsdrähte

$$\left. \begin{array}{l} 2) \\ 3) \end{array} \right\} \vec{E}_c(\vec{r}, t) = \vec{0}$$



$$\Rightarrow \int_j^k \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = \phi_{cj}(t) - \phi_{ck}(t) = 0$$

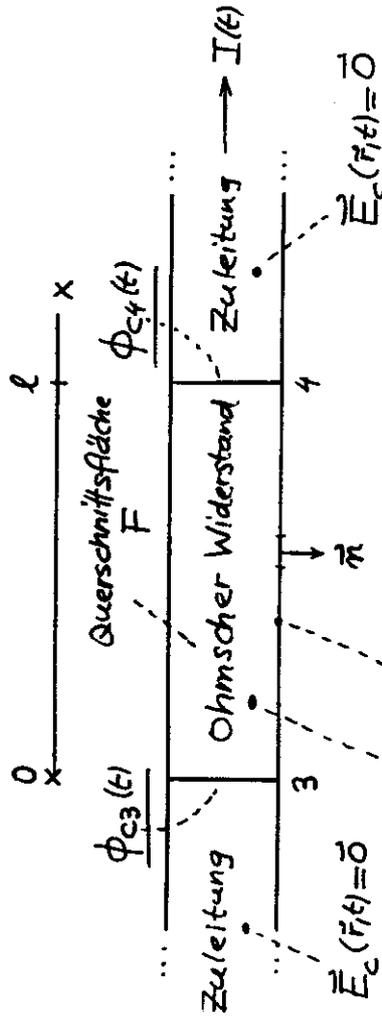
kein Spannungsabfall bzgl.  $\phi_c(\vec{r}, t)$

Ohmscher Widerstand



$$\int_3^4 \vec{E}_c(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = \phi_{c3}(t) - \phi_{c4}(t) = ?$$

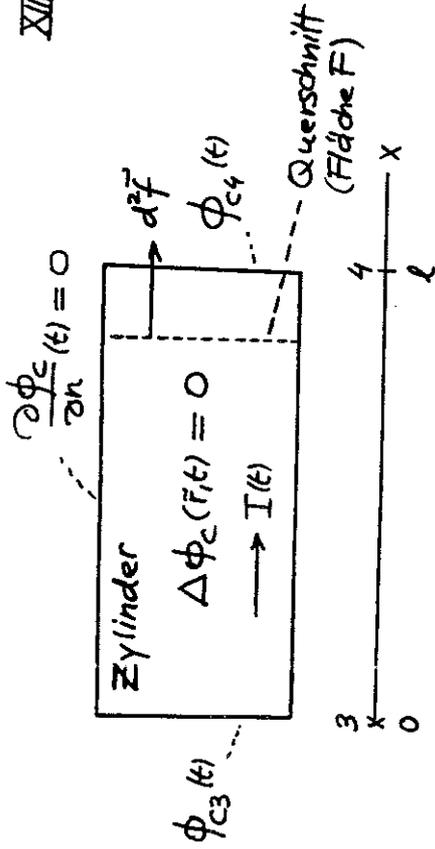
Spezialfall betrachtet: Kreiszyklindergeometrie



$$\vec{n} \cdot \vec{j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi_c}{\partial n}(t) = 0 \text{ auf Mantelfläche}$$

$$\text{div } \vec{j}(\vec{r}, t) = \text{div } \vec{j}(\vec{r}, t) = \sigma \text{ div } \vec{E}_c(\vec{r}, t)$$

$$= -\sigma \Delta \phi_c(\vec{r}, t) = 0$$



Zeige selbst: Daraus folgt, daß im Inneren des Ohmschen Widerstandes

ein homogenes zeitabhängiges Feld

$$\vec{E}_c(r,t) = \frac{1}{l} [\phi_{c3}(t) - \phi_{c4}(t)] \vec{e}_x$$

herrscht. ( $\phi_c = \phi_c(x,t)$  lineare Fkt. von x)

$$\Rightarrow \int_3^4 \vec{E}_c(r,t) \cdot d\vec{r} = \phi_{c3}(t) - \phi_{c4}(t) \quad \text{Wursten wir schon...}$$

Damit können wir aber auch den Zusammenhang zwischen Spannungsabfall am Widerstand und Stromstärke I(t) herstellen:

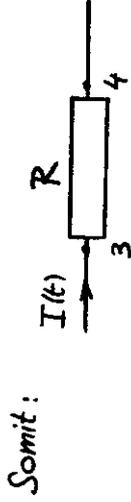
$$I(t) = \int_{\text{Querschnitt}} d^2\vec{f} \cdot \vec{j}(r,t) = \int_{\text{Querschnitt}} d^2\vec{f} \cdot \vec{j}(r,t)$$

$$= \int_{\text{Querschnitt}} d^2\vec{f} \cdot \vec{E}_c(r,t) = \int_{\text{Querschnitt}} d^2\vec{f} \cdot \frac{1}{l} [\phi_{c3}(t) - \phi_{c4}(t)] \vec{e}_x = \frac{1}{l} [\phi_{c3}(t) - \phi_{c4}(t)] \int_{\text{Querschnitt}} d^2\vec{f} \cdot \vec{e}_x = \frac{1}{l} [\phi_{c3}(t) - \phi_{c4}(t)] F$$

=:  $\frac{1}{R}$ , R Ohmscher Widerstand (Zylinder)

$$\phi_{c3}(t) - \phi_{c4}(t) = RI(t)$$

Ohmsches Gesetz im engeren Sinne



$$\int_3^4 \vec{E}_c(r,t) \cdot d\vec{r} = \phi_{c3}(t) - \phi_{c4}(t) = RI(t)$$

Spannungsabfall am Ohmschen Widerstand

Induktionsspule



im Spulendraht gemäß Näherung 2) (s. XIII-13) im Spulendraht, wobei

$$\vec{E}(r,t) = \vec{E}_c(r,t) + \vec{E}_T(r,t) = \vec{0} \quad \text{gilt, somit:}$$

$$\int_5^6 \vec{E}_c(r,t) \cdot d\vec{r} = - \int_5^6 \vec{E}_T(r,t) \cdot d\vec{r}$$

Der technisch konstruktive Sinn einer "Induktions=Spule" besteht darin, im unmittelbaren Spulenbereich ein großes "induziertes" Feld  $\vec{E}_T(r,t)$  zu "erzeugen", während  $\vec{E}_T(r,t)$  außerhalb der Spule vernachlässigbar klein ist - ausgenommen bei der induktiven

Koppelung an einen anderen Stromkreis,  
 wo das "Hinauswirken" beabsichtigt ist  
 und durch einen gemeinsamen magnetisierbaren  
 Spulenkern mit einer Induktionsspule des  
 anderen Stromkreises erzielt wird.

Deshalb kann man statt  $\int_5^6 \vec{E}_T(r,t) \cdot d\vec{r}$

→  $\oint \vec{E}_T(r,t) \cdot d\vec{r}$  schreiben, wobei der Weg

durch den Spulendraht von "5" nach "6"

durch einen beliebigen Weg außerhalb der

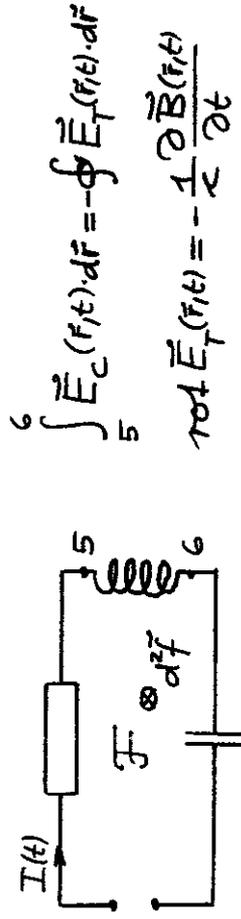
Spule verlaufenden Weg geschlossen wird.

Auf Grund der Näherungsannahmen 3), 4), 5)

und einer analogen Annahme für die

Spannungsquelle kann man auch über

den gegebenen Stromkreis integrieren:



⇒  $\oint \vec{E}_T(r,t) \cdot d\vec{r} = - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int d^2\vec{r} \cdot \vec{B}(r,t) =: V^{(ind)}$

$\Phi(t)$  magnetischer  
 Fluss durch  $\vec{F}$

In der Magnetostatik (stationärer  
 Strom) hatten wir in Abschnitt IV.3

$\text{div } \vec{B}(r) = 0$

$\text{rot } \vec{B}(r) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(r)$

⇒ für Stromkreis gilt  $\frac{1}{c} \Phi = LI$

mit dem Selbstinduktionskoeffizienten

$L = \frac{1}{c^2} \oint \oint \frac{d\vec{r} \cdot d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

HIER GILT:

$\text{div } \vec{B}(r,t) = 0$

$\text{rot } \vec{H}(r,t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(r,t)$

$\vec{B}(r,t) = \mu \vec{H}(r,t)$

⇒ für Stromkreis gilt

$\frac{1}{c} \Phi(t) = LI(t)$

mit  $L = \frac{\mu}{c^2} \oint \oint \frac{d\vec{r} \cdot d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

Bemerkung: Unter den gegebenen Bedingungen

ist der Selbstinduktionskoeffizient L des  
Stromkreises (näherungsweise) der Spule

zuzuordnen, weshalb man L zur Spule schreibt.

Somit:



$$\int_5^6 \vec{E}_c(r,t) \cdot d\vec{r} = \phi_{c5}(t) - \phi_{c6}(t)$$

$$= \frac{1}{c} \frac{d\Phi(t)}{dt} = -V^{(ind)}(t) = L \frac{dI(t)}{dt}$$

Kondensator Spezialfall betrachtet: Plattenkonden-  
sator

$$\int_7^8 \vec{E}_c(r,t) \cdot d\vec{r} = \phi_{c7}(t) - \phi_{c8}(t)$$



$$I(t) = \int_{P_2} d^2\vec{f} \cdot \vec{J}(r,t) = \frac{1}{4\pi} \int_{P_2} d^2\vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{D}_c(r,t)}{\partial t} = \frac{d}{dt} \int_{P_2} d^2\vec{f} \cdot \frac{\vec{D}_c(r,t)}{4\pi} = \int_{P_2} d^2\vec{f} \cdot \epsilon(r,t)$$

$\phi_1(t) = \phi_{c8}(t)$   
 $\phi_2(t) = \phi_{c7}(t)$   
 Plattenfläche A  
 $d^2\vec{f}$   
 $Q_1(t) = Q(t)$   
 $Q_2(t) = -Q(t)$

$$\Rightarrow Q(t) = - \int_{t_0}^t I(t') dt'$$

mit  $Q(t_0) = 0$

div  $\vec{E}(r) = 4\pi\rho$

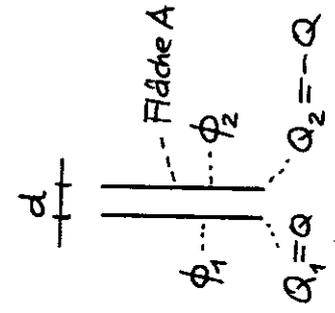
rot  $\vec{E}(r) = \vec{0}$

$\Rightarrow$  für Plattenkondensator gilt

$Q = C(\phi_1 - \phi_2)$

mit der Kapazität

$C = \frac{A}{4\pi d}$



HIER GILT:

div  $\vec{D}_c(r,t) = 4\pi\rho(r,t)$   
rot  $\vec{E}_c(r,t) = \vec{0}$   
 $\vec{D}_c(r,t) = \epsilon \vec{E}_c(r,t)$

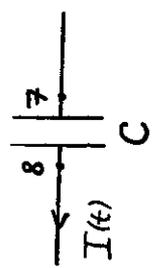
$\Rightarrow$  für Plattenkondensator folgt

$Q(t) = C(\phi_1(t) - \phi_2(t))$

mit

$C = \frac{\epsilon A}{4\pi d}$

$\phi_2(t) \parallel \phi_1(t)$

Somit: 

$$\int_7^8 \vec{E}_c(r,t) \cdot d\vec{r} = \phi_{c7}(t) - \phi_{c8}(t) = -\frac{1}{C} Q(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I(t') dt'$$



zu Abschnitt XIII. 2.A

zu Gl. (27): Die Summe  $\sum_n$  auf der linken Gleichungsseite ist über alle innerhalb einer Stromschleife ("Masche") befindlichen komplexen Widerstände  $Z_n(\omega)$  zu erstrecken;  $I_n$  ist dabei der durch  $Z_n(\omega)$  fließende Teilstrom (der natürlich in einer "Masche" für mehrere oder sogar alle  $n$  gleich sein kann).

zu Abschnitt XIII. 2.B

zu Gl. (39):

Die Definition von  $P_{\text{blind}}$  ist  $(I(t), V^{(\text{ein})}(t))$  s. Gl. (33)

$$P_{\text{blind}} := \left\langle \operatorname{Re} V^{(\text{ein})}(t) \cdot \operatorname{Re} \frac{dI(t)}{d(\omega t)} \right\rangle$$

Mit  $\frac{dI(t)}{d(\omega t)} = I_0 i e^{i\omega t} = -I_0 \sin \omega t + i I_0 \cos \omega t$

$$\operatorname{Re} \frac{dI(t)}{d(\omega t)} = -I_0 \sin \omega t$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} V^{(\text{ein})}(t) \cdot \operatorname{Re} \frac{dI(t)}{d(\omega t)} &= I_0 V_0 \sin \varphi \sin^2 \omega t \\ &\quad - I_0 V_0 \cos \varphi \sin \omega t \cos \omega t \end{aligned}$$

folgt dann Gl. (38):

$$\underline{P_{\text{blind}}} = \frac{1}{2} I_0 V_0 \sin \varphi = \underline{I_{\text{eff}} V_{\text{eff}} \sin \varphi}.$$

Ferner folgt dann aus Gl. (34)

$$P(t) = \underbrace{P_{\text{wirk}} (1 + \cos 2\omega t)}_{\text{"täglich zugeführt"}} - \underbrace{P_{\text{blind}} \sin 2\omega t}_{\text{"pendelt"}}$$

zu Gl. (40), (41):

$$\begin{aligned} \text{Mit } V^{(\text{ein})} &= Z(\omega) I = (R(\omega) + iX(\omega)) I \\ &= \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \exp\left[i \arctan \frac{X(\omega)}{R(\omega)}\right] I \end{aligned}$$

folgt (Argument  $\omega$  weggelassen)

$$\underline{\tan \varphi = \frac{X}{R}}, \quad \underline{\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}}, \quad \underline{\sin \varphi = \frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}}}$$

$$V_{\text{eff}} = \sqrt{R^2 + X^2} I_{\text{eff}}$$

$$V_{\text{eff}} \cos \varphi = R I_{\text{eff}}, \quad V_{\text{eff}} \sin \varphi = X I_{\text{eff}}$$

$$\underline{P_{\text{wirk}} = I_{\text{eff}} V_{\text{eff}} \cos \varphi = R I_{\text{eff}}^2} \quad (R = R(\omega))$$

$$\underline{P_{\text{blind}} = I_{\text{eff}} V_{\text{eff}} \sin \varphi = X I_{\text{eff}}^2} \quad (X = X(\omega))$$

zu Abschnitt XIV. 1. C  
~~~~~

Da die Ansätze (11a,b) und die daraus gefolgerten Beziehungen (13a-d) formal sehr ähnlich aussehen wie die Ansätze (V. 7a,b) und die daraus gefolgerten Beziehungen (V. 8a,b) sind einige ergänzende Kommentare zu diesem Abschnitt zur Vermeidung von späteren Mißverständnissen angebracht.

Im Fall des Vakuums war \vec{k} ein reeller Vektor und es war $\vec{k}, \vec{E}, \vec{B} = \vec{H}$ ein orthogonales Dreiein (Rechtssystem) mit \vec{E}, \vec{B} "in Phase" und $|\vec{B}| = |\vec{E}|$.

Für festes t hatten \vec{E}, \vec{B} in allen Punkten einer festen Ebene $\perp \vec{k}$ gleiche Werte, weshalb die Bezeichnung ebene Welle eingeführt wurde.

In Materie ist \vec{k} i.a. ein komplexer Vektor, d.h.

$$\vec{k} = \vec{k}_r + i\vec{k}_i$$

mit zwei reellen Vektoren \vec{k}_r, \vec{k}_i .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{k} &\equiv \vec{k}^2 \equiv k^2 = k_r^2 - k_i^2 + 2i\vec{k}_r \cdot \vec{k}_i \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} \eta(\omega) \mu(\omega) \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} \left(\epsilon(\omega) + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right) \mu(\omega) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = e^{i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \cdot e^{-\vec{k}_i \cdot \vec{r}}$$

exponentielle Dämpfung in Richtung von \vec{k}_i

Folgerungen aus den Gln.:

1) $|\vec{H}_0| \neq |\vec{E}_0|$

2) \vec{E}_0, \vec{H}_0 i.a. nicht "in Phase"

3) Ebenen $\perp \vec{k}_r =$ Ebenen konstanter Phase

Ebenen $\perp \vec{k}_i$ (definiert, falls $\vec{k}_i \neq \vec{0}$) = Ebenen konstanter
Amplitude (Betrag)

Die Flächen, auf denen für festes t die Feldstärken selbst überall gleich sind, sind i.a. nicht einmal Ebenen!

Die Bezeichnung "ebene Wellen" in der Überschrift des Abschnittes gehört deshalb unter Anführungszeichen. Es handelt sich um einen (problematischen) Namen für beliebige Lösungen der Bauart (11a,b) mit (13a-d) und (14). Man spricht im Falle $\vec{k} = \text{komplex}$ zur Relativierung dieses Ausdruckes oft von "inhomogenen ebenen Wellen".

4) Dann und nur dann, falls

$\sigma = 0, \epsilon(\omega), \mu(\omega)$ reell

(Isolator und ω aus Transparenzbereich)

ist, ist $k = \sqrt{k_i \cdot k_i}$ reell, und es ist

$\vec{k} = \text{reeller Vektor möglich!}$

Ist \vec{k} ein reeller Vektor, so ist $\vec{k}, \vec{E}, \vec{H}$ ein orthogonales Dreiein (Rechtssystem) mit \vec{E}, \vec{H} in Phase und $|\vec{H}| = \sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{\mu(\omega)}} |\vec{E}|$. Für festes t haben dann $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}$ in allen Punkten einer festen Ebene $\perp \vec{k}$ gleiche Werte, und es handelt sich daher um eine gewöhnliche ("homogene") ebene Welle.

5) Die FG + MG besitzen aber auch im Fall $\sigma=0, \epsilon(\omega), \mu(\omega)$ reell "inhomogene ebene Wellen" als Lösungen.

Aus

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{k} &= k^2 = k_r^2 - k_i^2 + 2i k_r k_i \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \mu(\omega) \quad \text{reell} > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon(\omega) \mu(\omega)} \quad \text{reell}$$

folgt, daß dann lediglich (neben $k_r^2 - k_i^2 = k^2$)

$$k_r k_i = 0$$

erfüllt sein muß.

Eine derartige "inhomogene ebene Welle" spielt bei der Totalreflexion im Abschnitt XIV.2.D eine Rolle!

Das exponentielle Abklingen hat dann nichts mit Dissipation (Extinktion) zu tun!

zu Abschnitt XIV.2.A

zum Absatz vor Gl. (20):

Die in diesem Absatz angeführten Beziehungen genügen noch nicht zur Erfüllung der FG + MG in den beiden Medien. Es müssen noch die Bedingungen

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0, \quad \vec{k}'' \cdot \vec{E}_0'' = 0, \quad \vec{k}' \cdot \vec{E}_0' = 0$$

hinzugenommen werden, welche auch später durch die "Zerlegungen" von Gl. (35), (37) erfüllt werden.

zu Gl. (26) und den daraus gezogenen Folgerungen
bis zum Ende des Abschnitts:

Alle Ausführungen im Skriptum gelten in der dort diskutierten Form uneingeschränkt, wofem

entweder a) das Medium "2" das optisch dichtere ist, d.h. $n'(\omega) > n(\omega)$ gilt,

oder b) das Medium "2" zwar optisch dünner ist, d.h. $n'(\omega) < n(\omega)$ gilt, aber der Einfallswinkel α kleiner als der in Gl. (51) definierte Grenzwinkel α_g ist
(α_g Grenzwinkel der Totalreflexion)

Ist $n'(\omega) < n(\omega)$ und $\alpha > \alpha_g = \arcsin \frac{n'(\omega)}{n(\omega)}$, so

folgt aus den Gln. (20) und (26) folgendes:

Die Aussagen bzgl. \vec{k}'' , und damit das Reflexionsgesetz, bleiben unverändert. Bzgl. \vec{k}' gibt es aber eine wesentliche Änderung.

$$\vec{k} = (k_x, 0, k_z) = k (\sin\alpha, 0, \cos\alpha) \quad \text{Vorgegeben}$$

$$\vec{k}' = (k_x, 0, k_z') \quad \text{gesucht}$$

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{k}' &\equiv k'^2 = k_x^2 + k_z'^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n'^2(\omega) \\ &\stackrel{\parallel}{=} k^2 \sin^2\alpha + k_z'^2 = \underbrace{\frac{\omega^2}{c^2} n^2(\omega)}_{k^2} \frac{n'^2(\omega)}{n^2(\omega)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow k_z'^2 = k^2 \left(\frac{n'^2(\omega)}{n^2(\omega)} - \sin^2\alpha \right) < 0 \Rightarrow k_z' \text{ imaginär!}$$

$$\parallel \sin^2\alpha_g$$

\vec{k}' komplexer Vektor

Welle im Medium "2"

"inhomogene ebene Welle"

("Dichtheit"; s. später)

Als komplexen Vektor kann man \vec{k}' natürlich nicht in der xy -Ebene durch einen Vektorpfeil repräsentieren und man kann auch nicht sagen, dass \vec{k}' mit \vec{k} und \vec{k}'' in einer Ebene liegt.

Stellt man \vec{k}' in der Form (27), d.h.

$$\vec{k}' = k' (\sin\alpha', 0, \cos\alpha')$$

dar, so folgt zwar mathematisch formal wieder das "Brechungsgesetz" Gl. (31b), doch ist dann $\cos\alpha'$ imaginär, also α' ein komplexer Winkel, was sich auch in

$$\sin\alpha' = \frac{\sin\alpha}{\frac{n'(\omega)}{n(\omega)}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_g} > 1$$

manifestiert. Beachte, dass aber $\vec{E}'(\vec{r}, t)$, $\vec{D}'(\vec{r}, t)$, $\vec{H}'(\vec{r}, t) = \vec{B}'(\vec{r}, t)$ auch für das erhaltene komplexe \vec{k}' Lösung der FG+MG

ist! Die Interpretation der entsprechenden inhomogenen Welle ergibt sich durch Einsetzen von \vec{k}' in $e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega t)}$ (s. Gl. (53)).

Welchen Sinn hat es, für den komplexen \vec{k}' -Vektor ebenfalls $\vec{k}' = k'(\sin \alpha', 0, \cos \alpha')$ zu schreiben, wenn dann α' komplex ist und daher auch keine anschauliche Bedeutung besitzt?

Würde man nicht so vorgehen, so müsste man die gesamte Rechnung der Abschnitte XIV.2.B, XIV.2.C

zweimal ausführen: einmal für den Fall mit reellem \vec{k}' -Vektor (Reflexion und Brechung), einmal für den Fall mit komplexem \vec{k}' -Vektor (Totalreflexion).

Dies kann man sich ersparen, indem man auch im letzteren Fall $\vec{k}' = k'(\sin \alpha', 0, \cos \alpha')$ und

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{n'(\omega)}{n(\omega)} \quad \text{formal benützt. Da Sinus und Cosinus}$$

analytische Funktionen im Komplexen sind, gelten alle auf diese Weise abgeleiteten Formeln für beide Fälle, und man muss die Fallunterscheidung erst am Ende der Rechnung machen.

zu Abschnitt XIV.2.B

zu Gl. (37):

Im Fall der Totalreflexion ist \underline{k}' ein komplexer Vektor und man kann in der Zerlegung (37) von $\underline{\vec{E}}_0'$ natürlich \underline{E}_p' nur unter Anführungszeichen als "Parallelkomponente" bezeichnen. Beachte aber, daß die Bedingung $\underline{k}' \cdot \underline{\vec{E}}_0' = 0$ mit dieser Zerlegung von $\underline{\vec{E}}_0'$ auch für komplexes \underline{k}' (wie erforderlich) erfüllt ist.

zur Ableitung der Gln. (39), (40):

Zur Ableitung dieser Gln. wurden nur die Stetigkeitsbedingungen für die Tangentialkomponenten von $\underline{\vec{E}}$ und $\underline{\vec{H}}$ verwendet; Gl. (32) (Stetigkeit der Normalkomponente von $\underline{\vec{D}}$) und die z-Komponente von Gl. (34) (Stetigkeit der Normalkomponente von $\underline{\vec{B}} = \underline{\vec{H}}$) wurden nicht ausgewertet.

Falls die Lösungsansätze für die Felder in den Medien 1,2 nicht zum Widerspruch führen sollen (womit sie wertlos wären), so müssen die nicht ausgewerteten Anschluss-
Reflexions- und
bedingungen (zusammen mit dem Brechungsgesetz) zu Gln. führen, welche zu den bereits erhaltenen Gln. (39), (40) redundant sind. Daß sie das tatsächlich sind, ist zu zeigen.

$$\text{Es gilt: } \vec{E}_0 \cdot \vec{e}_z = E_p \sin \alpha$$

$$\vec{E}_0'' \cdot \vec{e}_z = E_p'' \sin \alpha''$$

$$\vec{E}_0' \cdot \vec{e}_z = E_p' \sin \alpha'$$

$$(\vec{k} \times \vec{E}_0) \cdot \vec{e}_z = E_s k \sin \alpha$$

$$(\vec{k}'' \times \vec{E}_0'') \cdot \vec{e}_z = E_s'' k'' \sin \alpha''$$

$$(\vec{k}' \times \vec{E}_0') \cdot \vec{e}_z = E_s' k' \sin \alpha'$$

Somit folgt aus Gl. (32):

$$\underbrace{\varepsilon(\omega)}_{\frac{c^2}{\omega^2} k^2} (\vec{E}_0 + \vec{E}_0'') \cdot \vec{e}_z = \underbrace{\varepsilon'(\omega)}_{\frac{c^2}{\omega^2} k'^2} \vec{E}_0' \cdot \vec{e}_z$$

$$E_p \sin \alpha + E_p'' \sin \alpha'' = E_p' \sin \alpha'$$

$\sin \alpha$ $\frac{k}{k'} \sin \alpha$

$$k^2 (E_p + E_p'') \sin \alpha = k'^2 \frac{k}{k'} \sin \alpha E_p'$$

$$k (E_p + E_p'') = k' E_p' \quad \text{ist wegen } k'' = k \text{ mit (40b) identisch } \checkmark$$

Und aus der z-Komponente von Gl. (34) folgt:

$$\underbrace{(\vec{k} \times \vec{E}_0) \cdot \vec{e}_z}_{E_s k \sin \alpha} + \underbrace{(\vec{k}'' \times \vec{E}_0'') \cdot \vec{e}_z}_{E_s'' k'' \sin \alpha''}_{k \sin \alpha} = \underbrace{(\vec{k}' \times \vec{E}_0') \cdot \vec{e}_z}_{E_s' k' \sin \alpha'}_{k \sin \alpha}$$

$$E_s + E_s'' = E_s' \quad \text{ist mit (39b) identisch } \checkmark$$

zu Abschnitt XIII.2.C

Ergänzungen zu Reflexions- und Transmissionskoeffizient

<f> Zeitmittel von $f(t)$ über eine Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Definition: Reflexions- und Transmissionskoeffizient

$$R = \frac{\langle -S_z'' \rangle}{\langle S_z \rangle}, \quad T = \frac{\langle S_z' \rangle}{\langle S_z \rangle}$$

Beachte die Orientierung der z-Achse in Abb. 14.1!

(Im Falle der Totalreflexion ist die Zeichnung hinsichtlich \vec{k}' obsolet.)

Satz: Es gilt

$$R = \frac{|\vec{E}_0''|^2}{|\vec{E}_0|^2} = \frac{|E_p''|^2 + |E_s''|^2}{|E_p|^2 + |E_s|^2}, \quad T = 1 - R$$

Beweis:

$$1) \quad S_z = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H})_z = \frac{c}{4\pi} (E_x H_y - E_y H_x)$$

$$\begin{aligned} E_x H_y &= (E_{0x} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c.) (H_{0y} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c.) \\ &= E_{0x} H_{0y}^* + E_{0x} H_{0y} e^{2i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c. \end{aligned}$$

$$\langle E_x H_y \rangle = E_{0x} H_{0y}^* + c.c.$$

$$\langle S_z \rangle = \frac{c}{4\pi} (\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^*)_z + c.c.$$

$$\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^* = \vec{E}_0 \times \frac{c}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}_0^*) = \frac{c}{\omega} \vec{k} |\vec{E}_0|^2,$$

$$\text{da } \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$$

$$(\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^*)_z = \underbrace{\frac{c}{\omega} k \cos \alpha}_n |\vec{E}_0|^2$$

$$\langle S_z \rangle = \frac{\kappa}{2\pi} n(\omega) \cos \alpha |\vec{E}_0|^2 \quad \text{und analog}$$

$$\langle -S_z'' \rangle = \frac{\kappa}{2\pi} n(\omega) \cos \alpha |\vec{E}_0''|^2 \quad (\vec{k}'' = k(\sin \alpha, 0, -\cos \alpha))$$

$$\Rightarrow R = \frac{\langle -S_z'' \rangle}{\langle S_z \rangle} = \frac{|\vec{E}_0''|^2}{|\vec{E}_0|^2} \quad \checkmark$$

2) $S_{1z} = S_{2z}$ für $z=0$, da Tangentialkomponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke stetig

$$\Rightarrow \langle S_{1z} \rangle = \langle S_{2z} \rangle \quad \text{für } z=0$$

$$\quad \quad \quad \parallel$$

$$\quad \quad \quad S'_z$$

Zeige selbst:

$$\langle S_{1z} \rangle = \langle S_z \rangle + \langle S_z'' \rangle$$

(Interferenzterm ist null!)

Damit folgt dann

$$\langle S_z \rangle + \langle S_z'' \rangle = \langle S'_z \rangle \quad \left| \frac{1}{\langle S_z \rangle} \right.$$

(Da alle Terme von z unabhängig sind \rightarrow s. oben bzgl. $\langle S_z \rangle$ und $\langle S_z'' \rangle$ - muß man hier nicht mehr "für $z=0$ " dazuschreiben.)

$$1 + \frac{\langle S_z'' \rangle}{\langle S_z \rangle} = \frac{\langle S'_z \rangle}{\langle S_z \rangle} \quad \checkmark$$

$$\quad \quad \quad \underbrace{\quad \quad} \quad \quad \underbrace{\quad \quad}$$

$$\quad \quad \quad -R \quad \quad \quad T$$

Zu Abschnitt XIV. 2. D

Ergänzung zur Totalreflexion:

Nach Gl. (53) ist die Phasengeschwindigkeit der im (optisch dünneren) Medium 2 in x-Richtung laufenden inhomogenen Welle durch

$$v_{ph}' = \frac{\omega}{k'} \frac{\sin \alpha_g}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon'(\omega)}} \frac{\sin \alpha_g}{\sin \alpha} < \frac{c}{\sqrt{\epsilon'(\omega)}}$$

gegeben, und für die "Eindringtiefe" der Welle gilt

$$d' = \frac{1}{k' \sqrt{\left(\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_g}\right)^2 - 1}} = \frac{\sin \alpha_g}{\sqrt{\epsilon'(\omega)} \frac{\omega}{c} \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha_g}}$$

1) $\alpha \downarrow \alpha_g$: $v_{ph}' \uparrow \frac{c}{\sqrt{\epsilon'(\omega)}}$, $d \uparrow \infty$

2) α nicht zu nahe bei α_g (einige Winkelminuten Differenz genügen): $d \sim \lambda' = \frac{2\pi}{k'}$ ("dielektrische")

Die Beziehungen (s. Gl. (54))

$$|E_p''| = |E_p|, \quad |E_s''| = |E_s|$$

folgen mit Gl. (52b) unmittelbar aus den Fresnelschen Formeln (42) und (45), da die Quotienten auf den rechten Gleichungsseiten, ^{dann} beide die mathematische

Form

$$\frac{a - ib}{a + ib} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} e^{-i \arctan \frac{b}{a}}}{\sqrt{a^2 + b^2} e^{i \arctan \frac{b}{a}}} = e^{-2i \arctan \frac{b}{a}}$$

(allerdings mit verschiedenen a, b) besitzen.

Damit folgt aber (s. Seite XIV-9)

$$\underline{R=1, T=0}, \text{ deshalb der Name } \underline{\text{"Totalreflexion"}}.$$

Wie ist aber dann die im Medium 2 in x-Richtung strömende Energie ins Medium 2 hineingekommen?

Während des dem Einschalten der Lichtquelle folgenden Einschwingvorganges ist Energie durch die Grenzfläche hindurchgeströmt. (Bei endlichem Querschnitt des einfallenden Strahls erfolgt Energieeintritt und Energieaustritt in schmalen Randzonen des Strahls ^{stationären Fall,} auch im "dazwischen" läuft diese Energie im Medium 2 die Grenzfläche entlang.)

zu Abschnitt XIV. 3. A

zu Gl. (61): Quadrieren von Gl. (60) liefert die Gl.

$$n^2 - \kappa^2 = \epsilon\mu, \quad 2n\kappa = \frac{4\pi\sigma}{\omega} \mu \Rightarrow$$

$$n^2 \mid n^2 - \epsilon\mu - \kappa^2 = 0, \quad n^4 - \epsilon\mu n^2 - \underbrace{n^2 \kappa^2}_{\left(\frac{2\pi\sigma}{\omega} \mu\right)^2} = 0$$

Wählt man jene Lösung dieser quadratischen Gl. für n^2 , die für $\sigma \downarrow 0$ gegen $\epsilon\mu$ strebt, so erhält man Gl. (61a), und mit $n^2 - \kappa^2 = \epsilon\mu$ folgt Gl. (61b).

zu Abschnitt XIV. 3. B

zu Gl. (68):

Quadrieren von Gl. (64b) gibt

$$1 - \left(\frac{\sin \alpha}{n + ik} \right)^2 = q^2 e^{2i\gamma} = q^2 (\cos 2\gamma + i \sin 2\gamma)$$

$$= 1 - \frac{\sin^2 \alpha (n - ik)^2}{(n^2 + k^2)^2} = 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{(n^2 + k^2)^2} (n^2 - k^2 - 2in k)$$

\Rightarrow Gl. (68)

Bemerkung: Es ist jene Lösung von Gl. (68) zu wählen, für die in Gl. (65) der letzte Faktor für positives z exponentiell abklingt.

Ergänzung (zur Vertiefung des Verständnisses, "was passiert"):

zu Gl. (65): Die Strecke, auf der die Amplitude auf den e -ten Teil abklingt, heißt Eindringtiefe δ .

Es gilt

$$\delta = \delta(\alpha) = \frac{\kappa}{\omega q (n \sin \gamma + k \cos \gamma)} \quad \text{Beachte: } q = q(\alpha)$$

$$\gamma = \gamma(\alpha)$$

(s. Gl. (68))

Nach elementarer, aber mühevoller Rechnung

findet man (wenn man außerdem $\mu = 1$ setzt)

für schlechte Leiter, d.h. $\frac{4\pi\sigma}{\omega} \ll \epsilon$

$$\delta(\alpha) \approx \frac{\kappa}{2\pi\sigma} \sqrt{\epsilon - \sin^2 \alpha} \quad \begin{matrix} \longrightarrow +\infty \\ \sigma \downarrow 0 \end{matrix}$$

α fest: δ wird mit wachsendem σ kleiner

σ fest: δ wird mit wachsendem α kleiner

für sehr gute Leiter, d.h. $\frac{4\pi\sigma}{\omega} \gg \epsilon$ (Metalle)

$$\delta(k) \approx \frac{\kappa}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}} \quad \text{sehr klein ("Skinneffekt")}$$

s. Abschnitt XIV.3.C)

zu Gl. (67): Analog: Elementare, aber längere Rechnung.

Mit $\mu=1$ erhält man

für schlechte Leiter

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta'} \approx \frac{\sqrt{\epsilon'}}{1 - \frac{\epsilon}{\epsilon - \sin^2 \alpha} \frac{1}{8} \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2}$$

$\sigma=0$: Dielektrikum (Isolator)

$\alpha' = \beta'$, gewöhnliches Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \sqrt{\epsilon'} = n \quad (\text{Übergang Vakuum} \rightarrow \text{Medium})$$

α fest: β' wird mit wachsendem σ kleiner

für sehr gute Leiter (Metalle):

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta'} \approx \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}} \Rightarrow \sin \beta' \approx \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}} \approx \beta' \approx 0$$

Sehr kleiner Brechungswinkel, die Welle läuft bei beliebigem Einfallswinkel α praktisch in z -Richtung und wird auf einer sehr kurzen Strecke extinguiert.

Zu Abschnitt XIV.3.C

Ergänzung zu Gl. (74a), (74b) und Gl. (76), (78):

$$I = 2\pi\sigma \int_0^R dr r E(r)$$

$$\underbrace{\frac{d^2 E(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE(r)}{dr}} + \frac{\alpha^2}{\delta^2} E(r) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE(r)}{dr} \right)$$

$$rE(r) = - \frac{\delta^2}{2i} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE(r)}{dr} \right)$$

$$I = i\pi\sigma\delta^2 \left[r \frac{dE(r)}{dr} \right]_{r=0}^{r=R}$$

$$\underline{I = i\pi\sigma\delta^2 R E'(R)}$$

$$\Rightarrow \underline{Z(\omega) := \frac{E(R)l}{I} = -i \frac{l}{\pi R \sigma \delta^2} \frac{E(R)}{E'(R)}}$$

und mit Gl. (77)

$$\underline{\frac{Z(\omega)}{Z(0)} = -i \frac{R}{\delta^2} \frac{E(R)}{E'(R)}}$$

Im Fall $\delta \ll R$ gilt Gl. (75), woraus

$$E'(R) = \frac{1-i}{\delta} E(R) \Rightarrow \frac{1}{\delta} \frac{E(R)}{E'(R)} = \frac{1+i}{2}$$

und (76), (78) folgt.

zu Gl. (72), (75):

Es gilt (s. Jahnke-Emde-Tab. etc.)

$$J_0((1+i)\xi) \underset{\xi \rightarrow +\infty}{\propto} \frac{1}{\sqrt{\xi}} e^{-i\xi} e^{\xi}$$

zu Abschnitt XIV.1.A

zu Gl. (2a):

Nach Abschnitt XIV.1.C gilt für eine gewöhnliche ebene Welle (Kreiswellenzahlvektor \vec{k} reell, $\vec{k} = k \vec{n}$ mit reellem Einheitsvektor \vec{n} = Ausbreitungsvektor)

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c.$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c.$$

$$\vec{k} = k \vec{n}, \quad k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} \cdot \vec{E}_0 = 0$$

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \frac{\omega}{c} \mu \vec{H}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{H}_0 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\vec{n} \times \vec{E}_0)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \underbrace{(\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^*)}_{\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\vec{E}_0|^2 \vec{n}} + \underbrace{(\vec{E}_0 \times \vec{H}_0)}_{\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \vec{E}_0^2 \vec{n}, \text{ da } \vec{n} \cdot \vec{E}_0 = 0} e^{2i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c.$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (|\vec{E}_0|^2 + \vec{E}_0^2 e^{2i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c.) \vec{n}$$

$$|\vec{S}(\vec{r}, t)| = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (|\vec{E}_0|^2 + \vec{E}_0^2 e^{2i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c.)$$

$$I = \langle |\vec{S}(\vec{r}, t)| \rangle = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} 2|\vec{E}_0|^2 = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |2\vec{E}_0|^2$$

zu Abschnitt XIV.1.B

zu Gl. (9): Verallgemeinerung auf beliebige Lichtwege $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$

$$\delta_1 - \delta_2 = \frac{\omega}{c} \left(\int_{\mathcal{C}_1} n ds - \int_{\mathcal{C}_2} n ds \right) \quad (\text{Dabei kann } n \text{ längs der Wege variieren.})$$

zu Abschnitt XV.2

Dieser Abschnitt "verträgt" einige zusätzliche Erklärungen, Diskussionen und Abbildungen. Um nicht alles doppelt schreiben zu müssen, kopiere ich meine VO-Folien.

Diese enthalten implizit auch die nötigen Korrekturen des Skriptums, die ich vorweg noch extra anfüge.

zu Abschnitt XV.2.A

Nach Gl. (18): Bei der Auswertung von Gl. (18) unterscheidet man für $r \gg d \gg \lambda$, $R \gg d \gg \lambda$ die Fälle

$$a) \frac{r}{d} \gg \frac{d}{\lambda} \gg 1, \frac{R}{d} \gg \frac{d}{\lambda} \gg 1 \quad (\text{Fraunhoferbeugung}),$$

$$b) \frac{r}{d} \not\gg \frac{d}{\lambda}, \frac{R}{d} \not\gg \frac{d}{\lambda} \quad (\text{Fresnelbeugung}),$$

wobei r (R) die Entfernung des Aufpunktes (oder Lichtquelle) vom Mittelpunkt der Öffnung S_1 ist.

zu Abschnitt XV.2.C

Warum habe ich in der VO statt eines in y -Richtung unendlich langen Spaltes der Breite a eine Rechtecksöffnung mit den Seiten a, b betrachtet?

Für die Fraunhoferbeugung an einer Rechtecksöffnung

mit $b > a$ müssen die VS $\frac{r}{b} \gg \frac{b}{\lambda} \gg 1$ und

$\frac{R}{b} \gg \frac{b}{\lambda} \gg 1$ erfüllt sein. Man kann also nicht $b = +\infty$

setzen und r und R endlich lassen! Wachsendes b

erfordert entsprechend wachsendes r, R . Für den im Skriptum angenommenen Fall $u_0(r) = \frac{e^{ik|\bar{R}-r|}}{|\bar{R}-r|}$ (s. Gl. (19))

würde also mit $b \rightarrow +\infty$ $u_0(0) = \frac{e^{ikR}}{R}$ gegen null streben, d.h. die Konstante C in Gl. (30) wäre null!

Ich habe deshalb auf den Folien $u_0(r) = A_0 \frac{e^{ik|\bar{R}-r|}}{|\bar{R}-r|}$ geschrieben. Lässt man ~~den~~ b über alle Grenzen wachsen, so kann man dann ein endliches C in Gl. (30) erhalten, indem man auch $|A_0|$ entsprechend wachsen lässt.

Bemerkung zu Abschnitt XV.2.B

In der Literatur wird i.a. Gl. (25) als Babinet'sches Prinzip oder Theorem bezeichnet.

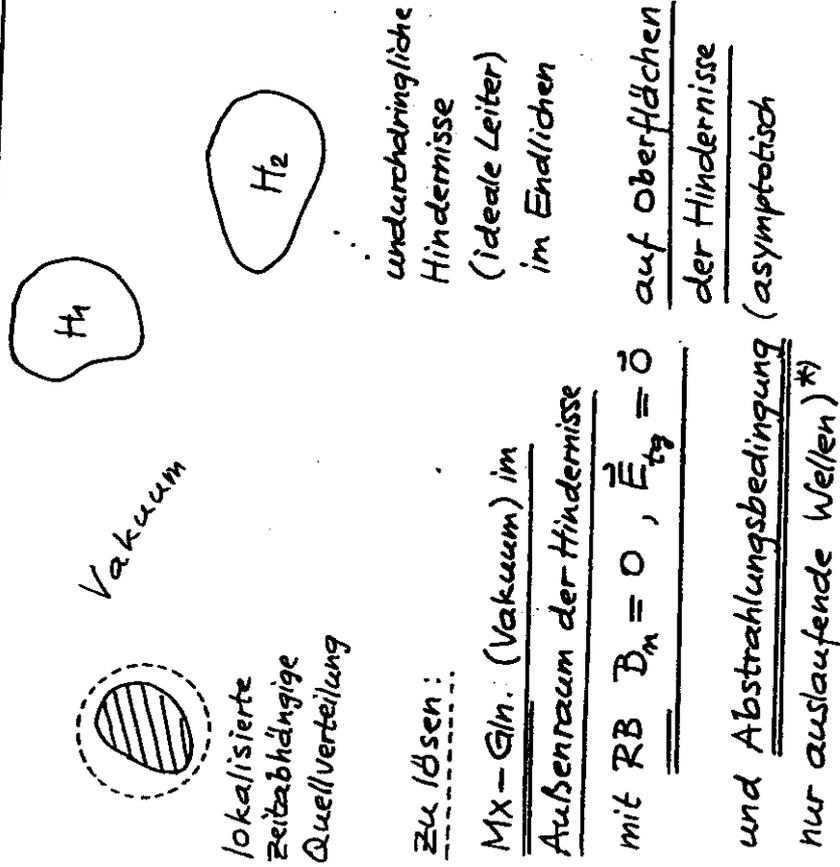
! ACHTUNG : Es folgt Seite XV-11, da Numerierung der Folien beibehalten. !

XV. 2. Beugungstheorie

Beugungsproblem in der Maxwelltheorie

a) im weiteren Sinn :

Bestimmung des elm. Feldes einer lokalisierten zeitabhängigen Quellverteilung im Vakuum bei Anwesenheit undurchdringlicher Hindernisse.



*1) Hier nicht angedr. s. Stumpf / Schuler, Elektrodynamik, Vieweg 1973, Abschnitt 12.6.

Stationärer Fall

Quellen und Felder zeitlich harmonisch
(eingeschwungener Zustand)

Für den stationären Fall gibt es einen Existenz-
und Eindeutigkeitsatz sowie exakte Lösungen
für ein einziges kugelförmiges oder ein
einziges zylinderförmiges Hindernis.

b) im engeren Sinn

- Quelle = "Lichtquelle" (Strahlungsquelle)
d.h. Quellverteilung so weit von Hindernissen
entfernt, daß im Bereich der Hindernisse nur
mehr Wellenfeld (Strahlungsfeld) berücksichtigt
werden muß
- Lineardimensionen der Hindernisse und
Abstände zwischen den Hindernissen
groß gegen die Wellenlänge(n) der von
der "Lichtquelle" emittierten Strahlung

⇒ "Lichtintensität" kann im Bereich der Hindernisse
und "hinter" den Hindernissen in niedrigster
Näherung nach den Gesetzen der
geometrischen Optik berechnet werden

Aufgabe der Beugungstheorie ist dann die
Berechnung der "Lichtintensität" in der Nähe
der geometrischen Schattengrenzen, wo die
geometrische Optik versagt und es zu
typischen Interferenzmustern kommt.

Beugung im engeren Sinn: viele Näherungsverfahren
wurden entwickelt.

Einfachstes Näherungsverfahren (neben Huygensschem
Prinzip): Skalares Kirchhoffverfahren: anwendbar
für ebene Beugungsschirme mit Öffnungen, Berechnung
der "Lichtintensität" aus einer skalaren
Feldfunktion ("Lichterregung").

Bemerkung: Unter den Annahmen der Beugung
im engeren Sinn spielen Polarisationsinflüsse
auf die Intensität keine merkliche Rolle, weshalb
die Beschreibung durch Vektorfelder nicht
unerlässlich ist. ●

XV. 2. A. Skalares Kirchhoffverfahren

$u(\vec{r}, t)$ "Lichterregung" (Feldfunktion) komplexwertig

FG in quellenfreien Raumbereichen (POSTULAT)

$$\square u(\vec{r}, t) = 0 \tag{11}$$

Stationärer Fall

zeitlich harmonische "Lichtquelle", eingeschwungener Zustand

$$u(\vec{r}, t) = u(\vec{r}) e^{-i\omega t} \tag{12}$$

"Lichtintensität" (POSTULAT)

$$I(\vec{r}) = |u(\vec{r})|^2$$

(11): in quellenfreien Raumbereichen

$$(\Delta + k^2) u(\vec{r}) = 0 \tag{13}$$

mit

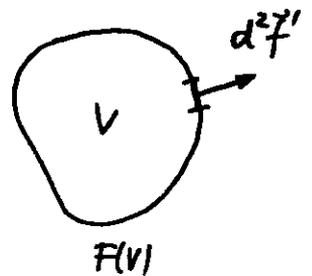
$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Kirchhoffidentität

2. Greenscher Satz (s. Gl. (I. 12b))

$$\int_V d^3r' [u(\vec{r}') \Delta' \chi(\vec{r}') - \chi(\vec{r}') \Delta' u(\vec{r}')] \tag{14}$$

$$= \oint_{F(V)} d^2\vec{r}' \cdot [u(\vec{r}') \vec{\nabla}' \chi(\vec{r}') - \chi(\vec{r}') \vec{\nabla}' u(\vec{r}')] \tag{14}$$



Wahl: $u(\vec{r}')$ "Lichterregung"

$$\chi(\vec{r}') = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Parameter}}}{G(\vec{r}, \vec{r}')} \tag{14}$$

irgendeine Greenfunktion des Helmholtzoperators mit der Eigenschaft $G(\vec{r}', \vec{r}) = G(\vec{r}, \vec{r}')$, d.h.

$$(\Delta + k^2) G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \tag{14}$$

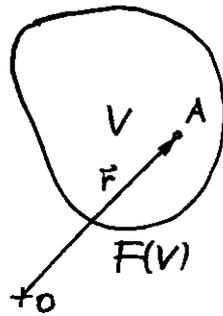
bzw.

$$(\Delta' + k^2) G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \tag{14}$$

$$\int_V d^3r' [\underbrace{\mu(\vec{r}') \Delta' G(\vec{r}, \vec{r}')}_{-4\pi \delta(\vec{r}-\vec{r}') - k^2 G(\vec{r}, \vec{r}')} - \underbrace{G(\vec{r}, \vec{r}') \Delta' \mu(\vec{r}')}_{-k^2 \mu(\vec{r}')}]$$

VS: keine Quellen in V

$$= \oint_{F(V)} d^2\vec{f}' \cdot [\mu(\vec{r}') \vec{\nabla}' G(\vec{r}, \vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{\nabla}' \mu(\vec{r}')] \quad \text{L}$$



⇒ für Punkte \vec{r} innerhalb des quellenfreien Volumens V gilt

$$\mu(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{F(V)} d^2\vec{f}' \cdot [G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{\nabla}' \mu(\vec{r}') - \mu(\vec{r}') \vec{\nabla}' G(\vec{r}, \vec{r}')] \quad (15)$$

Wahl von Kirchhoff: Greenfunktion für den unendlichen Raum

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (16)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}' G(\vec{r}, \vec{r}') = -ik \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \left(1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (16a)$$

XV-16

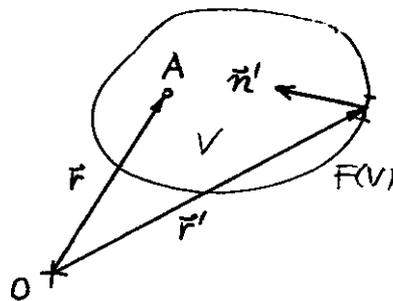
Einsetzen gibt mit $d^2\vec{f}' = -\vec{n}' d^2f'$ die

Kirchhoffidentität

$$\mu(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{F(V)} d^2f' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \left[\frac{\partial \mu(\vec{r}')}{\partial n'} + ik \left(1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \frac{\vec{n}' \cdot (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \mu(\vec{r}') \right]$$

(17)

Lichtquelle



Beachte:

$$e^{\frac{i(k|\vec{r}-\vec{r}'| - \omega t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}$$

kann als Kugelwelle interpretiert werden, die vom Punkt \vec{r}' zum Aufpunkt \vec{r} "läuft": Huygens!

1

2) Jede Lösung der inhomogenen Helmholtzgleichung für eine beliebige Quellfunktion und beliebige RB und asymptotische Bdg.

erfüllt für Punkte \vec{r} in einem quellenfreien Volumen V Gl. (17) identisch.
Deshalb Kirchhoffidentität!

XV-17

Kirchhoffverfahren

Kirchhoffs Überlegung: "Wüßte ich für eine Beugungsanordnung die exakten Randwerte $u(\vec{r}')$ und $\frac{\partial u(\vec{r}')}{\partial n'}$ auf einer geschlossenen Fläche F , in deren Innerem keine Lichtquelle ist, so könnte ich aus der Identität (17) die exakte Lichterregung $u(\vec{r})$ für Aufpunkte im Inneren von F berechnen." (Stimmt \checkmark) Weiter:

"Gelingt es mir, aus physikalischen Überlegungen für die Randwerte von $u(\vec{r})$ und $\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n}$ gute Näherungswerte zu finden*, so wird das Einsetzen in die Identität (17) gute Näherungswerte für $u(\vec{r})$ für Aufpunkte im Inneren von F liefern." ("Wird" ist nicht gewährleistet, nur "kann".)

Bemerkung: Die Helmholtzgleichung gestattet nicht die simultane Vorgabe von Funktion und Normalableitung auf einer geschlossenen Oberfläche. (Überbestimmung). Ersetzt man die exakten Randwerte durch näherungsweise, so ist nicht

*1) d.h. Werte, die ich für gute Näherungswerte halte!

gewährleistet, daß sich für Punkte im

Inneren auch nur eine geringfügige Änderung ergibt, da auf Grund der Überbestimmung Stabilität nicht gewährleistet ist.

Darin besteht der "mathematische Mangel Nr.1" des Kirchhoffverfahrens.

Kirchhoffsche "Standardanordnung", für die Kirchhoff Näherungsannahmen für die Randwerte angegeben hat, auf die daher das

Kirchhoffsche Verfahren anwendbar ist:

ebener undurchdringlicher Beugungsschirm (idealer Leiter) mit einer oder mehreren Öffnungen und der Lichtquelle auf einer Seite des Schirms; gesucht ist die

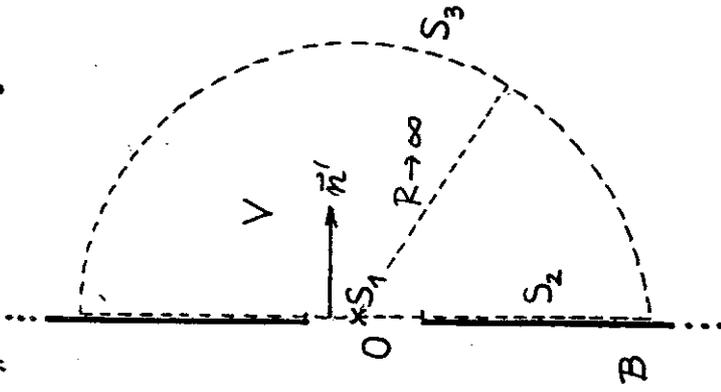
Lichtintensität auf der anderen Seite des Beugungsschirmes



Lichtquelle

Lichtintensität?

Kirchhoffsche Näherungsannahmen



1) S_1 (Öffnung): für $u(F')$, $\frac{\partial u(F')}{\partial n'}$ werden jene

Werte genommen, die dort vorliegen würden, wenn es überhaupt keinen Beugungsschirm gäbe (ungestörte von L einfallende Welle)

2) S_2 (unmittelbar hinter dem undurchdringlichen Schirmteil):

es wird $u(F') = 0$, $\frac{\partial u(F')}{\partial n'} = 0$

gesetzt

3) S_3 (Halbkugelfläche mit $R \rightarrow \infty$):

$$u(F') \sim_{r' \rightarrow \infty} f(\vartheta', \varphi') \frac{e^{i k r'}}{r'}$$

Bemerkungen:

1) In den Abbildungen wird immer nur eine Öffnung gezeichnet, es können aber auch mehrere Öffnungen vorhanden sein.

2) Ist d die Lineardimension der Öffnung, so muß $d \gg \lambda$

gelten (Beugungsproblem im engeren Sinn!)

Unter dieser VS ist die Kirchhoffsche Annahme 1) physikalisch plausibel. Eine merkliche Abweichung

von den "ungestörten" Werten ist nur in einer kleinen Randzone der Öffnung zu erwarten.

3) Sind mehrere Öffnungen vorhanden, so muß die Lineardimension jeder Öffnung $\gg \lambda$ sein und auch die Abstände der Öffnungen $\gg \lambda$ sein.

4) Die "unproblematischste" Annahme ist 3).

Sie ersetzt die Abstrahlungsbedingung der MX-Theorie.

5) Auch die Annahme 2) ($u=0$, $\frac{\partial u}{\partial n'}=0$ auf S_2 , d.h. unmittelbar hinter dem undurchlässigen Schirmteil) leuchtet physikalisch

ein.

ABER: Mathematisch ist diese Annahme mit der Helmholtzgleichung nicht verträglich:
 "mathematischer Mangel Nr.2 des Kirchhoff = verfahrens".

Ist nämlich $u(F')$ und $\frac{\partial u(F')}{\partial n'}$ auf einem beliebigen endlichen Teilstück von $F(V)$ null und ist u Lösung der Helmholtzgleichung, so folgt $u(F) \equiv 0$ für $\forall F$ in V !

Trotz der mathematischen Inkonsistenzen erhält man aber mit dem Kirchhoffverfahren Ergebnisse, die mit dem Experiment sehr gut übereinstimmen.

"Verstehen" kann man das insofern, als ein modifiziertes Kirchhoffverfahren, das die

"mathematischen Mängel Nr.1, 2" der originalen Kirchhoffverfahrens nicht aufweist, praktisch

dieselben Ergebnisse liefert: s. Jackson Abschnitt 9.8

Man setzt dabei in Gl. (15) nicht die Greensche Funktion für den unendlichen Raum, sondern die Dirichletsche Greenfunktion $G_D(F, F')$ ein und

erhält als modifizierte Kirchhoffidentität

$$u(F) = \frac{1}{4\pi} \int_{F(V)} d^3F' u(F') - \frac{\partial G_D(F, F')}{\partial n'}$$

Die Kirchhoffschen Annahmen 1), 2) können dann durch entsprechende Annahmen für $u(F')$ allein ersetzt werden, sodass die mathematischen Inkonsistenzen beseitigt sind!

Einsetzen der Kirchhoffschen Annahmen in die Kirchhoffidentität

$$\int_{F(V)} d^3F' u(F') = \int_{S_1} + \int_{S_2} + \int_{S_3}$$

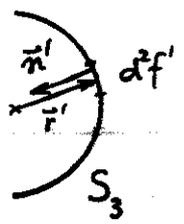
\parallel wegen 2)
 0

wie $\frac{1}{R}$ gegen null wegen 3)

Beweis: nächste Seite

ungestörte Werte $u_0(F'), \frac{\partial u_0(F')}{\partial n'}$ einsetzen!

Für Punkte \vec{r}' auf S_3 gilt für $R=r' \rightarrow \infty$:



$$\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \left\{ \underbrace{-\frac{\partial u(\vec{r}')}{\partial n'}}_{\frac{\partial u(\vec{r}')}{\partial r'}} - ik \left(1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \frac{\vec{n}' \cdot (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} u(\vec{r}') \right\} d^2f'$$

$$\sim \frac{e^{ikr'}}{r'} \left\{ \underbrace{\left(ik - \frac{1}{r'} \right) f(\Omega') \frac{e^{ikr'}}{r'}}_{f(\Omega') \frac{e^{ikr'}}{r'}} + O\left(\frac{1}{r'^3}\right) - ik \left(1 + \frac{i}{kr'}\right) \left[f(\Omega') \frac{e^{ikr'}}{r'} + O\left(\frac{1}{r'^2}\right) \right] \right\} r'^2 d\Omega'$$

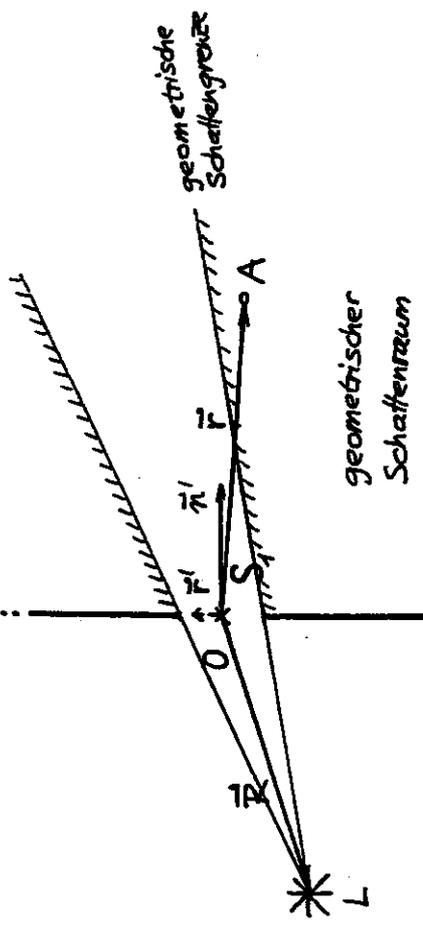
$$\sim \frac{e^{ikr'}}{r'} \left\{ \underbrace{\left(ik - \frac{1}{r'} \right) f(\Omega') \frac{e^{ikr'}}{r'}}_{O(1)} + O\left(\frac{1}{r'^3}\right) - ik \left(1 + \frac{i}{kr'}\right) \left[f(\Omega') \frac{e^{ikr'}}{r'} + O\left(\frac{1}{r'^2}\right) \right] \right\} r'^2 d\Omega'$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{O(1)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{bekannt}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{bekannt}}$

$$u(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_1} d^2f' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \left[\frac{\partial u_0(\vec{r}')}{\partial n'} + ik \left(1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \frac{\vec{n}' \cdot (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} u_0(\vec{r}') \right]$$

(18)

Punktformige Lichtquelle angenommen



Damit "Lichteregung" im Punkt \vec{r}' der Öffnung (und in infinitesimaler Umgebung)

gemäß Kirchhoffannahme 1

$$u_0(\vec{r}') = A_0 \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

(19)

$$\Rightarrow \frac{\partial u_0(\vec{r}')}{\partial n'} = \underbrace{\vec{n}' \cdot \text{grad}' u_0(\vec{r}')}_{(19a)}$$

$$= A_0 \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \left(-ik + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \underbrace{\frac{\vec{n}' \cdot (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{(-ik) \left(1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)}$$

$$u(\vec{r}) = -\frac{ik}{4\pi} A_0 \int_{S_1} d^2f' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{r}'|}}{|\vec{R}-\vec{r}'|} \cdot$$

$$\cdot \left[\left(1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \frac{\vec{n}' \cdot (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \left(1 + \frac{i}{k|\vec{R}-\vec{r}'|}\right) \frac{\vec{n}' \cdot (\vec{R}-\vec{r}')}{|\vec{R}-\vec{r}'|} \right]$$

→ Reziprozitätssatz der Kirchhoffschen Beugungstheorie

Setzt man die Lichtquelle in den Punkt \vec{r} , so "erzeugt" sie im Punkt \vec{R} die gleiche Intensität $I = |u|^2$ wie die im Punkt \vec{R} befindliche Lichtquelle im Punkt \vec{r} "erzeugt".

Kirchhoffsche Beugungsformel

Weitere Annahmen: (A1) $R \gg d$ und $r \gg d$

(A2) Beschränkung auf Aufpunkte \vec{r} , welche nicht bzw. nicht zu weit im geometrischen Schattenraum liegen

Beachte: $d \gg \lambda$ wurde schon bisher vorausgesetzt.

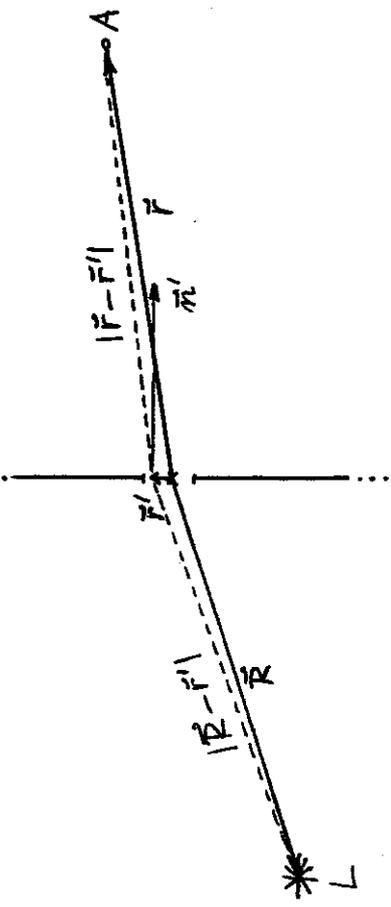
$R \gg d \gg \lambda, r \gg d \gg \lambda \Rightarrow$

$$1 + \frac{i}{k|\vec{R}-\vec{r}'|} = 1 + \frac{i}{2\pi} \frac{\lambda}{|\vec{R}-\vec{r}'|} \approx 1$$

$$1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|} = 1 + \frac{i}{2\pi} \frac{\lambda}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx 1$$

(21)

für alle Punkte \vec{r}' der Öffnung und alle ins Auge gefassten Aufpunkte \vec{r}



2) Wegen $d \gg \lambda$ variieren $|\vec{R}-\vec{r}'|, |\vec{r}-\vec{r}'|$ über die Öffnung um viele Wellenlängen, sodass

$$e^{ik|\vec{R}-\vec{r}'|}, e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (k = \frac{2\pi}{\lambda})$$

über die Öffnung stark oszillieren,

wogegen im Integral die Faktoren $\frac{1}{|\vec{R}-\vec{r}'|}, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

$$\frac{1}{|\vec{R}-\vec{r}'|} \approx \frac{1}{R}, \quad \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{1}{r}$$

gesetzt werden können.

Analog kann für \vec{F}' in der Öffnung

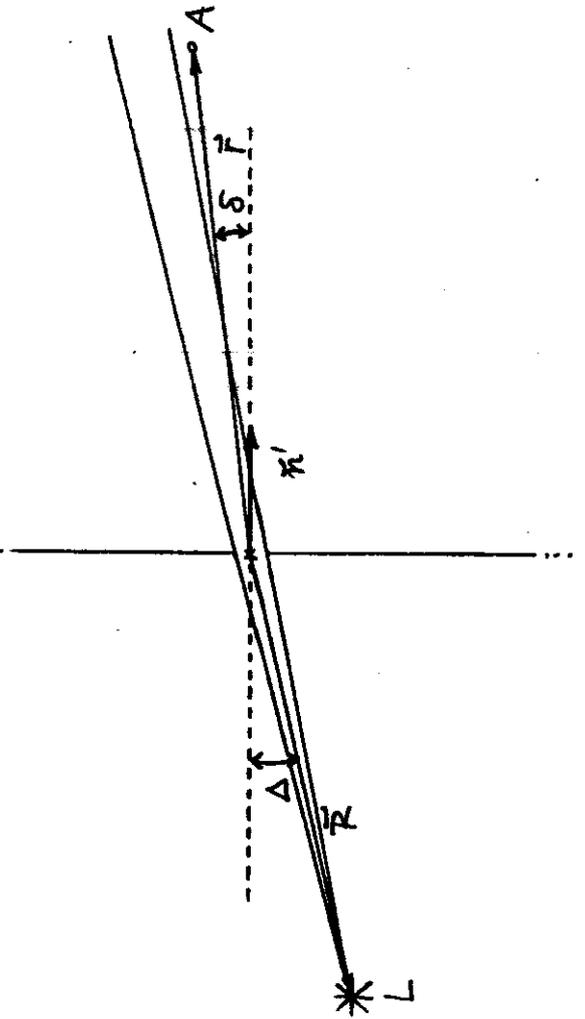
$$\frac{\vec{n}' \cdot (\vec{R} - \vec{F}')}{|\vec{R} - \vec{F}'|} \approx \frac{\vec{n}' \cdot \vec{R}}{R}, \quad \frac{\vec{n}' \cdot (\vec{F} - \vec{F}')}{|\vec{F} - \vec{F}'|} \approx \frac{\vec{n}' \cdot \vec{F}}{r}$$

gesetzt werden.

Wegen der Beschränkung auf Aufpunkte A, welche nicht weit im geometrischen Schattenraum bzw. nicht weit im geometrischen Schattenraum liegen, gilt überdies

$$\frac{\vec{n}' \cdot \vec{F}}{r} \approx - \frac{\vec{n}' \cdot \vec{R}}{R} \quad (23)$$

(d.h. $\cos \delta \approx \cos \Delta$)



Zusammenfassung:

$$u(\vec{F}) = - \frac{ik}{4\pi} A_0 \int_{S_1} d^2f' \frac{e^{ik|\vec{F}-\vec{F}'|}}{|\vec{F}-\vec{F}'|} \frac{e^{ik|\vec{R}-\vec{F}'|}}{|\vec{R}-\vec{F}'|}$$

aus Integral

$$\cdot \left[\underbrace{\left(1 + \frac{i}{k|\vec{F}-\vec{F}'|}\right)}_1 \frac{\vec{n}' \cdot (\vec{F}-\vec{F}')}{|\vec{F}-\vec{F}'|} - \underbrace{\left(1 + \frac{i}{k|\vec{R}-\vec{F}'|}\right)}_1 \frac{\vec{n}' \cdot (\vec{R}-\vec{F}')}{|\vec{R}-\vec{F}'|} \right]$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$\frac{\vec{n}' \cdot \vec{F}}{r} \qquad \qquad \qquad - \frac{\vec{n}' \cdot \vec{F}}{r}$$

aus Integral

$$2 \vec{n}' \cdot \frac{\vec{F}}{r}$$

Kirchhoffsche Beugungsformel

$$u(\vec{F}) = - \frac{ik}{2\pi} \left(\vec{n}' \cdot \frac{\vec{F}}{r} \right) \frac{A_0}{rR} \int_{S_1} d^2f' e^{ik(|\vec{F}-\vec{F}'| + |\vec{R}-\vec{F}'|)}$$

XV. 2.B. Komplementäre Beugungsschirme. Babinet'sches Theorem

Definition: Zwei Beugungsschirme B_1, B_2 heißen komplementär, wenn B_2 undurchdringlich ist, wo B_1 eine Öffnung besitzt, und dort eine Öffnung hat, wo B_1 undurchdringlich ist.

Die folgenden Aussagen gelten im Rahmen der skalaren Kirchhofftheorie unter der allgemeinen

VS $d \gg \lambda$ und den Kirchhoffschen Annahmen 1), 2), 3), aber ohne weitere Annahmen (etwa bzgl. r, \vec{r}), d.h. unter Zugrundelegung von Gl. (18):

$$u_1(\vec{r}) \approx -\frac{1}{4\pi} \int_{S_2} d^2f' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \left[\frac{\partial u_0(\vec{r}')}{\partial n'} + ik \left(1 + \frac{i}{k|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \frac{\vec{n}' \cdot (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} u_0(\vec{r}') \right]$$

Aus dieser Beziehung und der Kirchhoffidentität für u_0 (Gl. (17) mit $u = u_0$) folgt das

Babinet'sche Theorem (25)
 $u_0(\vec{r}) = u_1(\vec{r}) + u_2(\vec{r})$

ohne Beugungsschirm B_1 für Schirm für komplementären Schirm B_2

Was hat man davon?

Eine Aussage erhält man daraus immer dann, wenn in einer Situation für den Aufpunkt A mit dem Ortsvektor \vec{r} eine der 3 Größen $u_0(\vec{r}), u_1(\vec{r}), u_2(\vec{r})$ null ist.

Beispiel 1: Angenommen hinter dem Schirm B_1 sei am Aufpunkt \vec{r} die "Lichterregung" u_1 null:

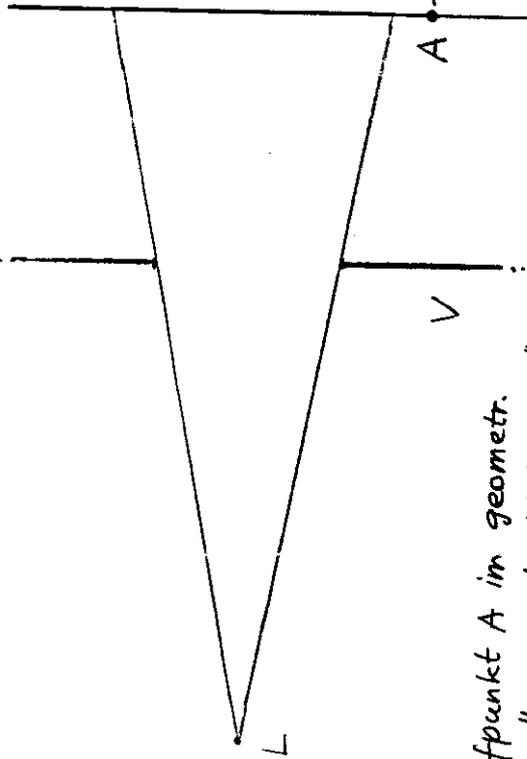
$$u_1(\vec{r}) = 0 \quad (\vec{r} \text{ fester Aufpunkt})$$

$$\Rightarrow u_2(\vec{r}) = u_0(\vec{r}), \quad I_2(\vec{r}) = I_0(\vec{r})$$

D.h.: Stellt man statt B_1 den komplementären Schirm B_2 auf, so hat man im betreffenden Aufpunkt \vec{r} eine bestimmte Intensität $I_2(\vec{r})$. Entfernt man B_2 , so ändert sich die Intensität in diesem Aufpunkt nicht!

Beispiel 2: Das von einer punktförmigen Lichtquelle ausgehende Licht wird durch eine "Vorbende" auf einen bestimmten Raumwinkel eingeschränkt.

Die Öffnung der "Vorbende" sei so groß, daß die Beugung an ihr vernachlässigt werden kann, und man dementsprechend auf einem Auffänger eine scharf ausgeleuchtete Fläche hat (geometrischer Schatten ohne beobachtbare Interferenzen).



Aufpunkt A im geometr.

Schattenraum der Vorblende: "Vorblende"

Auffänger

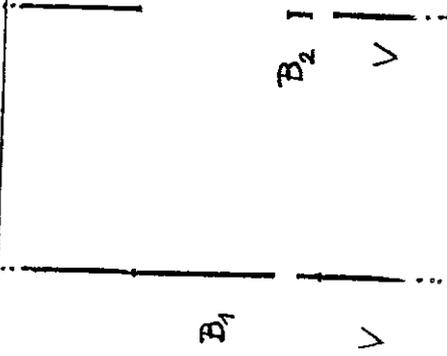
$\Rightarrow u_1(\vec{r}) = -u_2(\vec{r})$

$I_1(\vec{r}) = I_2(\vec{r})$, $\forall \vec{r}$ im geometrischen

(26)

Schattenraum der Vorblende

\Rightarrow gleiches Beugungsmuster auf dem Auffänger im Schattenbereich der Vorblende, wenn man in die Öffnung der Vorblende einmal einen Beugungsschirm B_1 und einmal den dazu komplementären Schirm B_2 einsetzt; z.B.



XV. 2. C. Fraunhoferbeugung

Kirchhoffsche Beugungsformel (24):

$$u(\vec{r}) = -\frac{ik}{2\pi} (\vec{n}' \cdot \vec{F}) \frac{A_0}{rR} \int_{S_1} d^2f' e^{ik(|\vec{R}-\vec{r}'| + |\vec{R}-\vec{f}'|)}$$

Wurde unter den Annahmen

$$R, r \gg d \gg \lambda$$

(*)

abgeleitet. Unter diesen Annahmen ist aber auch eine Entwicklung von $|\vec{R}-\vec{r}'|$, $|\vec{f}-\vec{f}'|$ für Punkte der Öffnung nach Potenzen von $\frac{r'}{R}$ bzw. $\frac{f'}{r}$ möglich:

$$|\vec{R}-\vec{r}'| = \sqrt{(\vec{R}-\vec{r}')^2} = \sqrt{R^2 - 2\vec{R}\vec{r}' + r'^2} \quad \text{gibt}$$

$$|\vec{R}-\vec{r}'| = R - \frac{\vec{R}\cdot\vec{r}'}{R} + \frac{R^2 r'^2 - (\vec{R}\cdot\vec{r}')^2}{2R^3} + \dots \quad (27')$$

und analog

\hookrightarrow Fraunhoferbeugung

$$|\vec{f}-\vec{f}'| = r - \frac{\vec{f}\cdot\vec{f}'}{r} + \frac{r^2 f'^2 - (\vec{f}\cdot\vec{f}')^2}{2r^3} + \dots \quad (27)$$

\hookrightarrow Fraunhoferbeugung

Definition: Von Fraunhoferbeugung spricht man, wenn es genügt, in den Entwicklungen (27'), (27) die ersten zwei Terme zu berücksichtigen.

Beachte: Die Erfüllung der Bdn. (*) reicht dafür nicht aus! Es muß dafür mehr erfüllt sein, u. zwar

$$\boxed{\frac{R}{d}, \frac{r}{d} \gg \frac{d}{\lambda} \gg 1} \quad (**)$$

Nur unter dieser VS ist der Zusatzterm

$$k \left[\frac{R^2 r^2 - (R \cdot F)^2}{2R^3} + \frac{r^2 r^2 - (F \cdot F)^2}{2r^3} \right]$$

im Argument der Exponentialfunktion für Punkte der Öffnung sicher "klein" und daher vernachlässigbar:

$$k \frac{r^2 r^2 - (F \cdot F)^2}{2r^3} \Big|_{\max} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{r^2 r^2 (1 - \cos^2(k \cdot F \cdot F))}{2r^3} \Big|_{\max}$$

$$= \frac{r'}{\lambda} \frac{r'}{r} \pi \sin^2(k \cdot F \cdot F) \Big|_{\max} \quad r' \leq \frac{d}{2}$$

$$\approx \frac{d}{\lambda} \frac{\pi}{4} \sin^2(k \cdot F \cdot F) \leq \frac{\pi}{4}, \text{ analog 1. Term}$$

$$\underbrace{\leq 1}_{\leq 1}$$

Gilt also (**), so kann man im Integranden setzen:

$$|\bar{r} - \bar{r}'| + |\bar{r} - \bar{r}'| \approx r + R - \frac{\bar{r} \cdot \bar{r}'}{r} - \frac{\bar{r} \cdot \bar{r}'}{R} \quad (28)$$

$$e^{ik[|\bar{r} - \bar{r}'| + |\bar{r} - \bar{r}'|]} \approx e^{ikr} e^{ikR} e^{-ik(\frac{\bar{r} \cdot \bar{r}'}{r} + \frac{\bar{r} \cdot \bar{r}'}{R})} \cdot \bar{r}'$$

← (aus Integral)

Fraunhoferbeugung

$$u(F) = -\frac{ik}{2\pi} A_0 \frac{e^{ikR}}{R} \frac{e^{ikr}}{r} (\bar{n} \cdot \bar{F}) \int_{S_1} d^2 f' e^{-ik(\frac{\bar{r} \cdot \bar{r}'}{r} + \frac{\bar{r} \cdot \bar{r}'}{R})} \cdot \bar{r}'$$

Interpretation! $\mu_0(\delta)$ Konsistenz (29) mit Kirchhoffannahme 3)

Rechtecksöffnung

$$\bar{F} = (\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{r} \right)$$

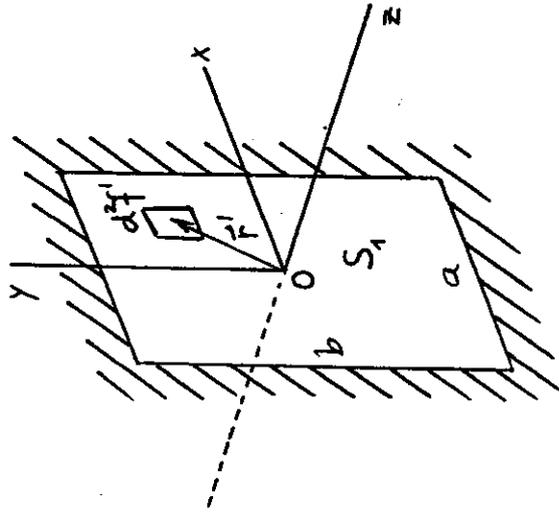
$$\bar{n}' = (0, 0, 1)$$

$$d^2 f' = dx' dy'$$

$$S_1 \dots z' = 0$$

$$x' \in \left[-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}\right]$$

$$y' \in \left[-\frac{b}{2}, +\frac{b}{2}\right]$$



Annahme: Lichtquelle auf z-Achse

$$\bar{R} = (0, 0, -1), \quad \bar{R} \cdot \bar{r}' = 0$$

$$\Rightarrow \bar{n}' \cdot \bar{F} = \gamma, \quad \left(\bar{F} + \frac{\bar{R}}{R} \right) \cdot \bar{r}' \Big|_{z'=0} = \alpha x' + \beta y' + \frac{z}{r}$$

$$u(F) = -\frac{ik}{2\pi} A_0 \frac{e^{ikR}}{R} \frac{e^{ikr}}{r} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dx' \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy' e^{-ik(\alpha x' + \beta y' + \frac{z}{r})}$$

Auf ebener

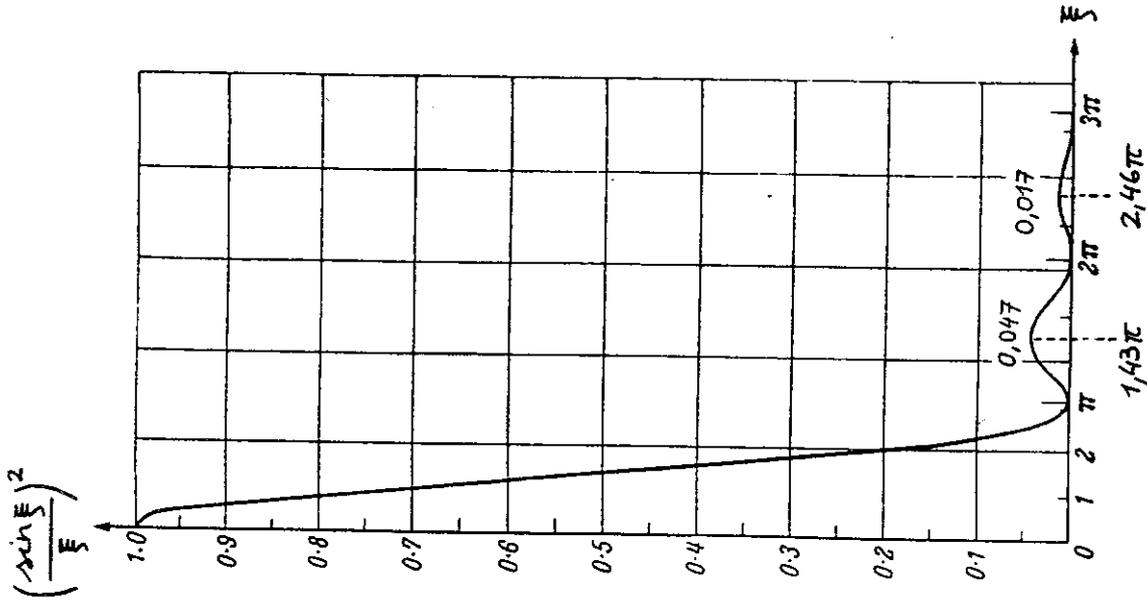
"Auffänger parallel zur Schirmebene (Ebene z=0) in "ferner Fernzone":

r nur schwach richtungsabhängig ($\approx z_0$)
 β nur schwach richtungsabhängig (≈ 1)

für Richtungen $\bar{F} \approx (0, 0, 1)$

Intensitätsverlauf auf Auffänger

$$I(\alpha, \beta) = C \frac{I_0(\alpha)}{I_0(\beta)} \left(\frac{\sin \frac{\pi \alpha a}{\lambda}}{\frac{\pi \alpha a}{\lambda}} \right)^2 \left(\frac{\sin \frac{\pi \beta b}{\lambda}}{\frac{\pi \beta b}{\lambda}} \right)^2 \quad (31')$$



s. das Beugungsbild Seite XV-43

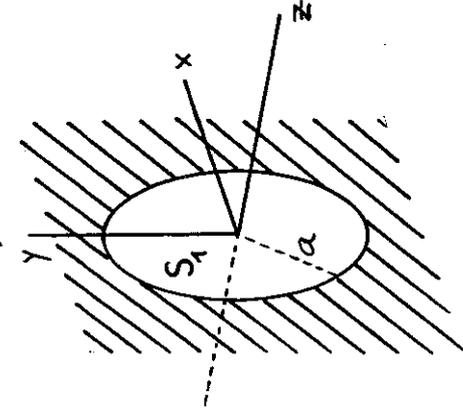
Die Intensität ist null entlang den zur y-Achse parallelen Linien

$$\frac{\pi \alpha a}{\lambda} = n_1 \pi \text{ bzw. } \frac{x}{r} = \alpha = n_1 \frac{\lambda}{a}, \quad n_1 = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (31a')$$

und entlang den zur x-Achse parallelen Linien

$$\frac{x}{r} = \beta = n_2 \frac{\lambda}{b}, \quad n_2 = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Kreisöffnung



Annahme: Lichtquelle auf der z-Achse \Rightarrow axiale Symmetrie bzgl. z-Achse
 Auffänger parallel zur Schirmebene \Rightarrow es genügt, die Intensität für Punkte in Richtungen

$$\vec{r} = (\alpha, 0, r) \text{ zu berechnen}$$

$$\vec{r}' = (0, 0, 1), \quad d^2 f' = \rho' d\rho' d\varphi', \quad S_1 \dots z' = 0$$

$$\vec{r}' \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \rho' \approx 1$$

$$\left(\frac{\vec{r}}{r} + \frac{\vec{r}'}{r} \right) \cdot \vec{r}' \Big|_{z'=0} = \alpha \rho' \cos \varphi'$$

$$u(\vec{r}) = -\frac{ik}{2\pi} A_0 \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{R} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}'}}{r} \int_0^a \int_0^{2\pi} \rho' d\rho' d\varphi' e^{-i\vec{k}\alpha\rho' \cos\varphi'} \quad (32a)$$

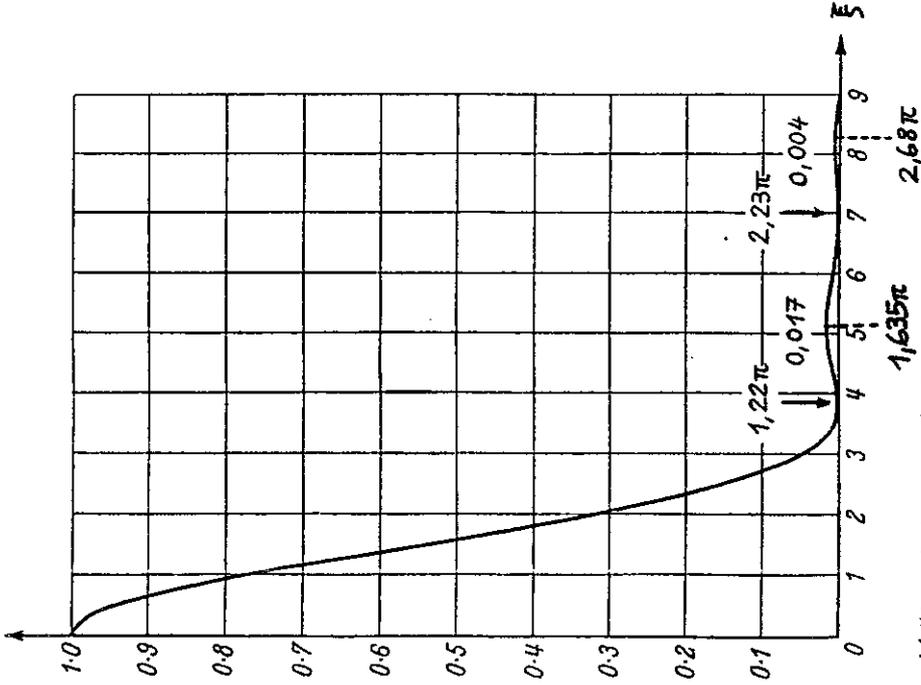
... analog wie bei Rechtecksöffnung \approx konst.

$$\int_0^\xi d\eta \eta J_0(\eta) = \xi J_1(\xi) \quad (32b)$$

\Rightarrow Intensitätsverlauf auf Auffänger

$$I(\alpha) = C \left(\frac{2J_1\left(\frac{2\pi\alpha a}{\lambda}\right)}{\frac{2\pi\alpha a}{\lambda}} \right)^2 \quad (33)$$

$$\left(\frac{2J_1(x)}{x}\right)^2$$



1. Intensitätsminimum bei

$$\frac{2\pi\alpha a}{\lambda} = 1,22\pi \quad \text{bzw.} \quad \frac{x}{r} = \alpha = 0,61 \frac{\lambda}{a} \quad (33a)$$

s. das Beugungsbild Seite XV-43

XV. 2. D. Fresnelbeugung

Definition: Von Fresnelbeugung spricht man, wenn in den Entwicklungen (27'), (27) die ersten drei Terme berücksichtigt werden müssen.

Fresnelbeugung liegt vor, wenn zwar

$$R, r \gg d \gg \lambda$$

erfüllt ist, Lichtquelle und Aufpunkt aber nicht so weit von der Schirmöffnung weg sind, wie dies für Fraunhoferbeugung verlangt wurde. (D.h., daß $\frac{R}{d}, \frac{r}{d} \gg \frac{d}{\lambda}$ nicht erfüllt ist.)

Man hat dann in die Kirchhoffsche Beugungsformel (24) im Integranden

$$|\bar{r}-\bar{r}'| \approx r + R - \frac{\bar{r}\cdot\bar{r}'}{r} - \frac{\bar{R}\cdot\bar{r}'}{R} + \frac{r^2 r'^2 - (\bar{r}\cdot\bar{r}')^2}{2r^3} + \frac{R^2 R'^2 - (\bar{R}\cdot\bar{R}')^2}{2R^3} \quad (34)$$

einsetzen.

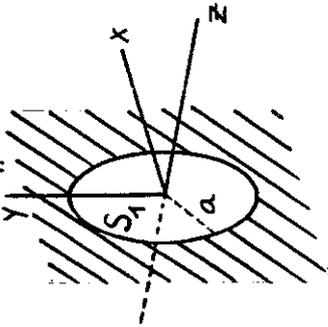
Fresnelbeugung

$$u(P) = -\frac{ik}{2\pi} A_0 \frac{e^{ikR}}{R} \frac{e^{ikr}}{r} (\pi' \cdot \bar{r}) \cdot \int_{S_1} d^2f' e^{-ik(\bar{r} + \frac{\bar{r}'}{R})\cdot\bar{r}'} e^{ik(\frac{1}{2r} + \frac{1}{2R})r'^2} e^{-ik\left(\frac{(\bar{r}\cdot\bar{r}')^2}{2r^3} + \frac{(\bar{R}\cdot\bar{R}')^2}{2R^3}\right)}$$

Fresnelbeugung: auch für geometrisch einfache Öffnungen (Rechteck, Kreis) sehr kompliziert

Einfaches Beispiel:

Kreisöffnung



Annahmen:

- 1) Lichtquelle auf der z-Achse
- 2) Aufpunkt auf der z-Achse

$$\vec{R} = (0, 0, -1)$$

$$\vec{r} = (0, 0, 1)$$

$$\vec{\pi}' = (0, 0, 1)$$

$$\Rightarrow \vec{\pi}' \cdot \vec{r} = 1, \quad \vec{R} \cdot \vec{r}' = 0, \quad \vec{r} \cdot \vec{r}' = 0$$

$$\vec{r} = (0, 0, r), \quad u(\vec{r}) = u(r)$$

$$u(r) = -\frac{ik}{2\pi} A_0 \frac{e^{ikr}}{R} \frac{e^{ikr}}{r} \int_{S_1} d^2f' e^{ik \left(\frac{1}{2r} + \frac{1}{2R} \right) r'^2} \quad (36)$$

$$d^2f' = \rho' d\rho' d\varphi', \quad S_1 \dots z'=0, \quad \varphi' \in [0, 2\pi], \quad \rho' \in [0, a]$$

↓

$$u(r) = -\frac{ik}{2\pi} A_0 \frac{e^{ikr}}{R} \frac{e^{ikr}}{r} \int_0^a \int_0^{2\pi} d\rho' d\varphi' \rho' e^{ik \left(\frac{1}{2r} + \frac{1}{2R} \right) \rho'^2}$$

$r'^2 = \rho'^2$ auf S_1

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right)} \left(e^{ik \left(\frac{1}{2r} + \frac{1}{2R} \right) a^2} - 1 \right)$$

$$u(r) = -A_0 \frac{e^{ik(r+R)}}{rR} \frac{rR}{r+R} \left(e^{ik \frac{r+R}{2rR} a^2} - 1 \right)$$

$$|e^{i\frac{\pi}{2}} - 1|^2 = 4 \sin^2 \frac{\pi}{2}$$

Intensitätsverlauf längs der z-Achse

für $r, R \gg a \gg \lambda$

$$I(r) = |A_0|^2 \left(\frac{2 \sin \frac{\pi a^2 (r+R)}{2\lambda r R}}{r+R} \right)^2 \quad (37)$$

$$\frac{\pi a^2 (r+R)}{2\lambda r R} = n\pi \quad \text{bzw.} \quad a^2 \frac{r+R}{rR} = 2n\lambda, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow I(r) = 0 \quad \text{Dunkelheit}$$

Beachte:

1) Es dürfen natürlich für gegebenes R, a mit $R \gg a \gg \lambda$ nur solche $n \in \mathbb{N}$ eingesetzt werden, für welche $r \gg a$ erfüllt ist.

2) Unter den Bedingungen der Fraunhoferbeugung gilt

$$0 < \frac{\pi a^2 (r+R)}{2\lambda r R} = \frac{\pi}{2} \frac{a}{\lambda} \left(\frac{a}{r} + \frac{a}{R} \right) \ll \frac{\pi}{2} \Rightarrow I(r) \neq 0$$

Fresnelsche Zonenlinse

$$I(r) = 0 \text{ falls } a^2 \frac{r+R}{rR} = 2n\lambda, n \in \mathbb{N} \quad (38)$$

Ist $\frac{a^2}{\lambda} \frac{r+R}{2rR}$ hinreichend groß (z.B. ~ 10)

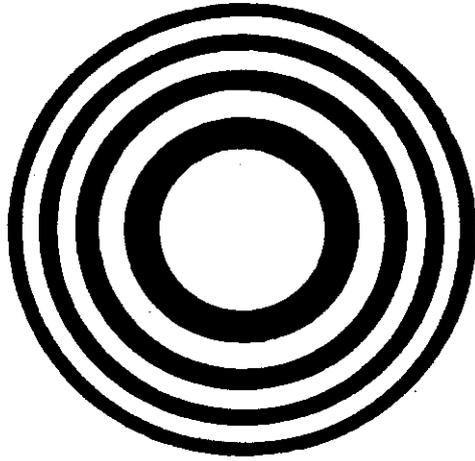
wobei $r, R \gg a \gg \lambda$ erfüllt sein muß, so kann

man durch Abdeckung geeigneter Kreisringzonen

die Helligkeit im Aufpunkt ähnlich steigern wie

wenn man eine geeignete Sammellinse in die Öffnung

gibt.



† z.B.: $\frac{a}{\lambda} = 1000, \frac{r}{a} = \frac{R}{a} = 100$

Aus Born/Wolf: Principles of Optics

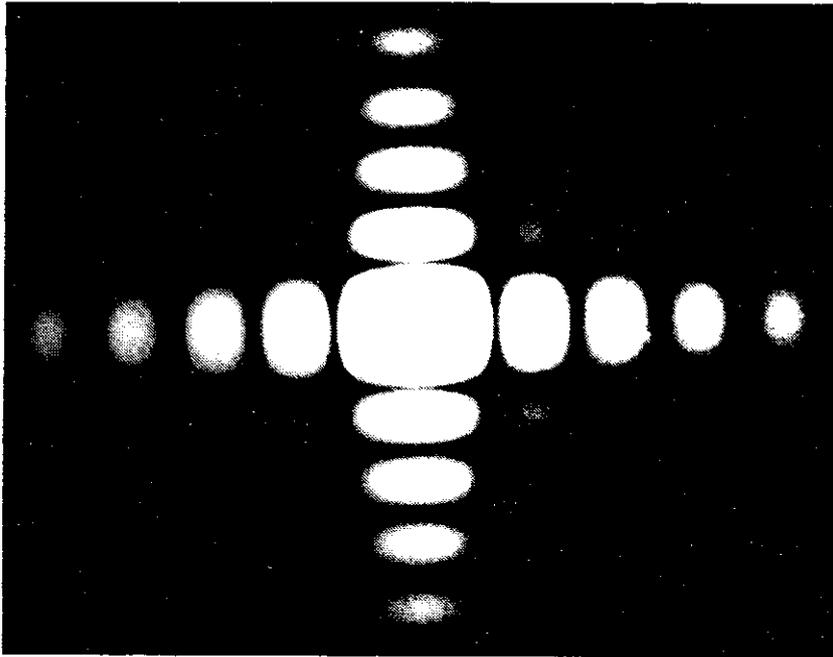


Fig. 8.10. FRAUNHOFER diffraction pattern of a rectangular aperture $8 \text{ mm} \times 7 \text{ mm}$, magnification $50\times$, mercury yellow light $\lambda = 5790 \text{ \AA}$. To show the existence of the weak secondary maxima the central portion was overexposed.

(After H. LIPSON, C. A. TAYLOR, and B. J. THOMPSON.)

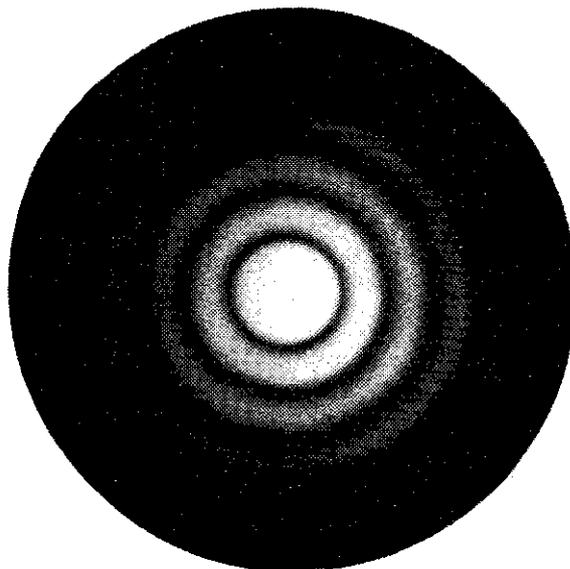


Fig. 8.12. FRAUNHOFER diffraction pattern of a circular aperture (the AIRY pattern) 6 mm in diameter, magnification $50\times$, mercury yellow light $\lambda = 5790 \text{ \AA}$. To show the existence of the weak subsidiary maxima, the central portion was overexposed.

(After H. LIPSON, C. A. TAYLOR, and B. J. THOMPSON.)