

**ERGÄNZUNGSBLÄTTER VON Dr. GRAU**  
*zum Skriptum*  
**"ELEKTRODYNAMIK UND RELATIVITÄTSTHEORIE"**  
*von H. Nowotny*

**Kapitel 6-10**

zu Abschnitt VI.1.C

Ergänzung: Berechnung des Magnetfeldes \*)

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \underbrace{(\vec{\beta}_0 \phi(\vec{r}, t))}_{\vec{A}(\vec{r}, t)} \\ &= \vec{\beta}_0 \times (-\text{grad} \phi(\vec{r}, t))\end{aligned}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\text{grad} \phi(\vec{r}, t) - \underbrace{\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}}_{\propto \vec{\beta}_0}$$

$$\Rightarrow \vec{\beta}_0 \times \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{\beta}_0 \times (-\text{grad} \phi(\vec{r}, t))$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\beta}_0 \times \vec{E}(\vec{r}, t)}$$

zu Abschnitt VI.2.A

zu Gl. (34):

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \left( \vec{\nabla} \times \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \\ &= -\frac{1}{c} \int d^3r' \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times \dot{\vec{j}}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{c |\vec{r} - \vec{r}'|^2} \\ &\quad - \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\end{aligned}$$

$$\text{mit } \dot{\vec{a}}(\vec{r}, t) := \frac{\partial \vec{a}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

---

\*) Im Skriptum ist die konstante Teilchengeschwindigkeit mit  $\vec{v}$  bezeichnet ( $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$ ), hier heißt sie  $\vec{v}_0$  ( $\vec{\beta}_0 = \frac{\vec{v}_0}{c}$ ).

Mit 
$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r} + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

folgt

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = -\frac{\vec{r}}{c^2 r^2} \times \int d^3 r' \dot{\vec{j}}(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{cr}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$=: \vec{B}_s(\vec{r}, t)$

Zur Berechnung von  $\vec{E}_s$  gl. (38) (Beachte:  $\vec{q}(\vec{r}, t) = \vec{q}(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r})$ .)

$$(\text{rot } \vec{B}_s)_i = \left[ \vec{\nabla} \times \frac{\ddot{\vec{q}}(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}) \times \vec{r}}{c^2 r^2} \right]_i$$

$$= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \varepsilon_{klm} \frac{\ddot{q}_l(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}) x_m}{c^2 r^2} \right)$$

$\downarrow$  Ableitung gibt  $\frac{1}{r}$ -Term  
 $\downarrow$  Ableitung gibt  $\frac{1}{r^2}$ -Term

$$= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \frac{x_m}{c^2 r^2} \frac{\partial}{\partial x_j} \ddot{q}_l(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\ddot{q}_l(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}) \left(-\frac{x_j}{cr}\right) + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$= \varepsilon_{ikj} \underbrace{\varepsilon_{klm} \ddot{q}_l x_m}_{(\ddot{\vec{q}} \times \vec{r})_k} \frac{x_j}{c^3 r^3} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$= \left( \frac{[\ddot{\vec{q}}(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}) \times \vec{r}] \times \vec{r}}{c^3 r^3} \right)_i + O\left(\frac{1}{r^2}\right) = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_s}{\partial t} \right)_i + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E}_s(\vec{r}, t) = \frac{[\ddot{\vec{q}}(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}) \times \vec{r}] \times \vec{r}}{c^2 r^3} = \vec{B}_s(\vec{r}, t) \times \frac{\vec{r}}{r}$$


---

zu Abschnitt VI.2.C

zu Gl. (47a): Analog wie bei Gl. (IV.11a)<sup>+)</sup> , allerdings kommt ein Term mit  $\dot{\rho}$  dazu, da in der Dynamik  $\text{div } \vec{j}$  nicht null, sondern  $-\dot{\rho}$  ist.

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} (j_i(\vec{r}', t_r) x'_k) = \underbrace{\frac{\partial j_i(\vec{r}', t_r)}{\partial x'_i}}_{-\dot{\rho}(\vec{r}', t_r) \text{ (Kontinuitätsgl.)}} x'_k + j_i(\vec{r}', t_r) \delta_{ik}$$

symbolisch:

$$\underline{\vec{j}(\vec{r}', t_r) = \dot{\rho}(\vec{r}', t_r) \vec{r} + (\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t_r)) \vec{r}'}$$

zu Gl. (47b): Analog wie bei Gl. (IV.13)<sup>+)</sup> .

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\partial}{\partial x'_i} (j_i(\vec{r}', t_r) x'_l x'_e x'_k) &= \underbrace{\frac{\partial j_i(\vec{r}', t_r)}{\partial x'_i}}_{-\dot{\rho}(\vec{r}', t_r)} x'_l x'_e x'_k \\ &+ j_i(\vec{r}', t_r) x'_l \delta_{ie} x'_k + j_i(\vec{r}', t_r) x'_l x'_e \delta_{ik} \end{aligned}$$

symbolisch:

$$\underline{(\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}', t_r) = - (\vec{r} \cdot \vec{j}(\vec{r}', t_r)) \vec{r}' + \dot{\rho}(\vec{r}', t_r) (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{r}' + (\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t_r)) (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{r}'}$$

$$\underline{b) \quad (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}', t_r) = (\vec{r} \cdot \vec{j}(\vec{r}', t_r)) \vec{r}' + (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}', t_r)) \times \vec{r}}$$

a) + b)

$$\underline{(\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}', t_r) = \frac{1}{2} (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}', t_r)) \times \vec{r} + \frac{1}{2} \dot{\rho}(\vec{r}', t_r) (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{r}' + \frac{1}{2} (\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t_r)) (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{r}'}$$

Ableitung nach  $t$  gibt dann Gl. (47b).

Ergänzung zu Abschnitt VI. 2. D

Auf Seite VI-1, VI-2 wurde bewiesen, daß aus

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}, t) = \text{rot } \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = -\frac{\vec{r}}{c^2 r^2} \times \underbrace{\int d^3r' \dot{\vec{j}}(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{cr})}_{\vec{B}_s(\vec{r}, t)} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

folgt. Hier haben wir analog

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{Z}(\vec{r}, t) = \text{rot } \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\dot{\vec{P}}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

woraus daher

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = -\frac{\vec{r}}{c^2 r^2} \times \underbrace{\int d^3r' \dot{\vec{P}}(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{cr})}_{\vec{B}_s(\vec{r}, t)} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

folgt.

$$\begin{aligned} \text{Mit } \vec{Z}(\vec{r}, t) &= \int d^3r' \frac{\vec{P}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{1}{r} \int d^3r' \vec{P}(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{cr}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \end{aligned}$$

ergibt sich dann

$$\vec{Z}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{q}\left(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}\right)}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$


---

Aus dem  $\frac{1}{r}$ -Anteil von  $\vec{Z}(\vec{r}, t)$  in der Entwicklung nach Potenzen von  $\frac{1}{r}$  kann man daher  $\vec{q}\left(t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{r}}{r}\right)$  ablesen und damit  $\vec{B}_s, \vec{E}_s$  und  $\frac{dP}{d\Omega}$  berechnen.

Zu Abschnitt VI. 2. E

zu Gl. (65):

$$\ddot{\vec{q}}\left(t_r, \frac{\vec{r}}{r}\right) = -qa\vec{e} + \dots, \quad 0 < t_r < T$$

Dipolnäherung)

$$\left(\ddot{\vec{q}}(t_r) \times \frac{\vec{r}}{r}\right)^2 = q^2 a^2 \sin^2 \mathcal{D}, \quad 0 < t_r < T$$

( $\mathcal{D}$  Winkel zwischen  $\vec{e}$  und  $\frac{\vec{r}}{r}$ )

Wählt man für die Winkelintegration die Richtung von  $\vec{e}$  als z-Richtung, so folgt

$$\begin{aligned} P(t_r) &= \frac{1}{4\pi c^3} q^2 a^2 \int_{[4\pi]} d\Omega \sin^2 \mathcal{D} = \frac{2q^2 a^2}{3c^3}, \quad 0 < t_r < T. \\ &\quad \underbrace{\int_{[4\pi]} d\Omega \sin^2 \mathcal{D}}_{2\pi \cdot 2\left(1 - \frac{1}{3}\right)} \\ &= \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

Zur Anwendung der elektrischen Dipolnäherung:

Zeige selbst: 1)  $\ddot{\vec{m}}(t_r) = \vec{0}$ , 2)  $\frac{1}{6c} \ddot{\vec{Q}}(t_r, \frac{\vec{r}}{r})$  ist um die Ordnung  $\frac{v_0}{c}$  kleiner als  $\ddot{\vec{p}}(t_r)$ .

zu Abschnitt VI.3.A

zu Gl. (75): Anstelle der im Skriptum angeschriebenen Beziehung gehört

$$\vec{q}(t_r, \frac{\vec{r}}{r}) = \ddot{\vec{p}}(t_r) + \ddot{\vec{m}}(t_r) \times \frac{\vec{r}}{r} + \frac{1}{6c} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \ddot{\vec{Q}}(t_r) + \dots$$

ODER

$$\vec{q}(t_r, \frac{\vec{r}}{r}) = e^{-i\omega t_r} \left[ \ddot{\vec{p}} + \ddot{\vec{m}} \times \frac{\vec{r}}{r} - \frac{ik}{6} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \ddot{\vec{Q}} + \dots \right] + c.c.$$

mit  $\ddot{\vec{p}}$ ,  $\ddot{\vec{m}}$ ,  $\ddot{\vec{Q}}$  gemäß Gl. (76), (83) und (90) oder (93).

(Gl. (90) bzw. (93) liefern zwar verschiedene  $\ddot{\vec{Q}}$ , aber gleiches  $\ddot{\vec{Q}} \times \frac{\vec{r}}{r}$  und daher gleiches  $\vec{B}_s, \vec{E}_s, \frac{dP}{d\Omega}$ .)

zu Abschnitt VI.3.B

Für einen in der festen Raumrichtung  $\vec{e}$  "schwingenden" elektrischen Dipol gilt

$$\ddot{\vec{p}}(t) = p(t) \vec{e} = p_0 \cos(\omega t - \delta) \vec{e} = \vec{p} e^{-i\omega t} + c.c.,$$

$$|2\vec{p}|^2 = p_0^2.$$

Für Gl. (81) wurde speziell  $\vec{e} = \vec{e}_z$  gewählt.

Die folgende Bemerkung 1 bezieht sich auf den allgemeinen schwingenden elektrischen Dipol ( $\vec{e}$  allgemein).

Bemerkung 1: Die Komponenten  $p_x, p_y, p_z$  des komplexen Vektors  $\vec{p}$  besitzen dann Phasendifferenzen 0 oder  $\pi$ .

Bemerkung 2: Ein Beispiel eines elektrischen Dipols, dessen Moment  $\vec{p}(t)$  im Laufe der Zeit die Richtung ändert, wäre ein in der  $xy$ -Ebene rotierender Dipol. In diesem Fall wäre  $p_z = 0$  und die Phasendifferenz von  $p_x, p_y$  wäre  $\frac{\pi}{2}$ . In diesem Fall gilt  $\langle \frac{dP}{d\Omega} \rangle \propto (1 + \cos^2\vartheta)$ .

Bemerkung 3: Die aus Gl. (81) durch Winkelintegration erhaltene Formel (82) für  $\langle P \rangle$  gilt für beliebige elektrische Dipole, d.h. bei beliebigen Phasenbeziehungen zwischen  $p_x, p_y, p_z$ . (Gl. (82) lässt sich also aus Gl. (80) bei beliebigem  $\vec{p}$  ableiten.)

zu Abschnitt VI. 3. D

Rechnung zu Gl. (96):

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{Q} = \begin{pmatrix} Q_{xx} \frac{x}{r} \\ Q_{yy} \frac{y}{r} \\ Q_{zz} \frac{z}{r} \end{pmatrix}$$



$$\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{Q} \times \frac{\vec{r}}{r} = \begin{pmatrix} (Q_{yy} - Q_{zz}) \frac{yz}{r^2} \\ (Q_{zz} - Q_{xx}) \frac{zx}{r^2} \\ (Q_{xx} - Q_{yy}) \frac{xy}{r^2} \end{pmatrix}$$

$$\left| \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{Q} \times \frac{\vec{r}}{r} \right|^2 = |Q_{yy} - Q_{zz}|^2 \frac{y^2 z^2}{r^4} + \text{zyklisch}$$

Zu Gl. (97):

Alle Winkelintegrale besitzen den Wert  $\frac{4\pi}{15}$ , somit

folgt

$$\langle P \rangle = \frac{ck^6}{360} \frac{4}{3} \left\{ |Q_{zz} - Q_{xx}|^2 + |Q_{yy} - Q_{zz}|^2 + |Q_{xx} - Q_{yy}|^2 \right\}$$

Diese Formel sowie Gl. (96) gelten unabhängig davon, ob man  $\vec{Q}$  gemäß Gl. (90) oder gemäß Gl. (93) definiert. Verwendet man die Definition von Gl. (93), so kann man den Ausdruck für  $\langle P \rangle$  wegen  $Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0$  noch umformen und Gl. (97) erhalten.

Bemerkung: Gl. (96) und (97) gelten nur für einen

"schwingenden" elektrischen Quadrupol (Hauptachsenrichtungen von  $\vec{Q}(t)$  zeitunabhängig), für Gl. (96) ist außerdem vorausgesetzt, dass die Koordinatenachsen mit den Hauptachsenrichtungen zusammenfallen.

Für einen allgemeinen elektrischen Quadrupol muss man Gl. (95) verwenden, aus der (s. Jackson)

$$\langle P \rangle = \frac{ck^6}{360} \sum_{ij} |2Q_{ij}|^2$$

folgt, sofern die Definition von  $\vec{Q}$  gemäß Gl. (93) verwendet wird.

Beispiel zu Gl. (96):

Bzgl. der z-Achse rotations-symmetrischer "schwingender"  
elektrischer Quadrupol (im Hauptachsensystem)

Definition von  $\hat{Q}$  mit  $\text{Sp } \hat{Q} = 0$  verwendet:

Rotations-symmetrie  $\Rightarrow Q_{xx} = Q_{yy} \Rightarrow$  mit

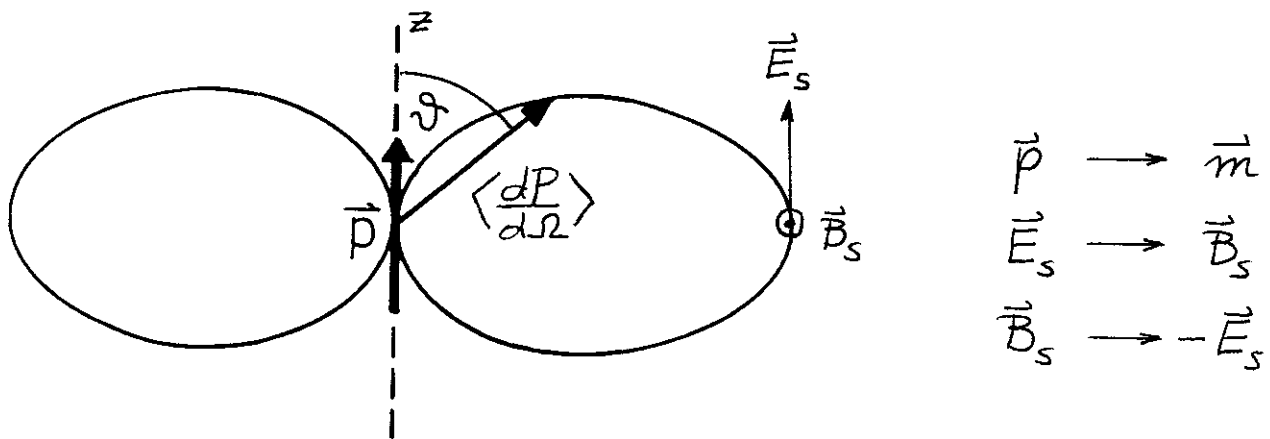
$$Q_{zz} =: Q \quad \text{folgt} \quad Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2}Q$$

und Gl. (96) ergibt

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle &= \frac{\kappa}{21\pi} \frac{k^6}{36} \left\{ \frac{9}{4} |Q|^2 \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta \cos^2\varphi \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{4} |Q|^2 \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta \sin^2\varphi \right. \\ &\quad \left. + 0 \right\} \end{aligned}$$

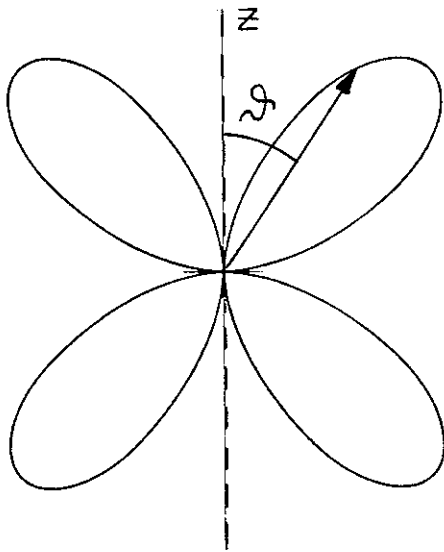
$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle(\vartheta) = \frac{\kappa k^6}{128\pi} |2Q|^2 \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta$$

"Schwingender" elektrischer bzw. magnetischer Dipol



$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle \propto \sin^2 \vartheta$$

Rotationssymmetrischer "schwingender" elektrischer Quadrupol



$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle \propto \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta$$

zu Abschnitt VII.1. A

zu S. 104 letzter Absatz:

Da die Wellenfronten nicht ideal eben <sup>sind</sup> und die beim Fernrohr ankommenden Teilwellen nicht ganz parallel laufen, kommt es bei beliebigen Laufzeitdifferenzen (inkl. null) zur Ausbildung von Interferenzstreifen.

Da die Laufzeitdifferenz für verschiedene Stellungen der Apparatur aber verschieden groß ist, müßte es bei Drehung der Apparatur um 90° zu einer Verschiebung der Interferenzstreifen kommen. Eine solche Verschiebung wurde nicht beobachtet (s. Foto von Joos).

Rechnung dazu:

Laufzeitdifferenz für ursprüngl. Stellung der Apparatur (s. Gl. (2), (3)):

$$\Delta t_A = t_1 - t_2 = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Bei um 90° gedrehter Apparatur ( $l_1 \leftrightarrow l_2$ ):

$$\Delta t_E = \bar{t}_1 - \bar{t}_2 = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{2l_2}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Mit  $l_1 = l_2 \stackrel{=l}{\text{folgt}}$ , daß es zu einer Verschiebung um

$$n = \frac{c(\Delta t_A - \Delta t_E)}{\lambda} = \frac{4l}{\lambda} \left( \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \approx \frac{2l}{\lambda} \frac{v^2}{c^2} \text{ Streifen kommen müßte.}$$

G. Joos

Lehrbuch der Theoretischen Physik

Geest &amp; Portig 1959

Das Resultat der Versuche von MICHELSON und MORLEY, die ungefähr unter den der obigen Rechnung zugrunde gelegten Bedingungen ausgeführt wurden, ergab das Fehlen einer solchen Streifenverschiebung. Als im Jahr 1925 D. MILLER von einem positiven Effekt, der einer Geschwindigkeit von 10 km/sec entsprach, berichtete, setzten an verschiedenen Orten Nachprüfungen ein. Im Zeiss-Werk zu Jena konnte Verf. mit sehr vollkommenen Hilfsmitteln nachweisen, daß ein positiver Effekt kleiner sein müßte als  $\frac{1}{1000}$  Streifenbreite. Fig. 82a gibt die Registrierung des Interferenzstreifensystems wieder, die in der Weise erfolgte, daß senkrecht zu den Interferenzstreifen ein 0,2 mm breiter Spalt *Sp* angebracht war (vgl. Fig. 82b), vor dem während der Rotation des Apparates eine photographische Platte vorbeigeführt wurde. Würden die Interferenzstreifen sich bei der Drehung des Apparates verschieben, so müßte man beim Vorbeiführen der Platte eine Wellenlinie erhalten. Man sieht indes, daß die Streifen schnurgerade verlaufen. *Das Experiment hat also gegen unsere Analogie mit der Akustik, gegen die Existenz eines ruhenden Mediums der Lichtwellen, d. h. gegen die Existenz des Weltäthers oder absoluten Raums entschieden.*

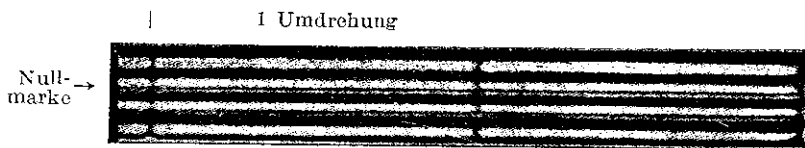


Fig. 82a. Registrierung von Interferenzstreifen während einer Rotation des MICHELSON-Apparates



Fig. 82b

TABLE 15-2

Theory		Light propagation experiments							Experiments from other fields					
		Aberration	Fizeau convection coefficient	Michelson-Morley	Kennedy-Thorndike	Moving sources and mirrors	De Sitter spectroscopic binaries	Michelson-Morley, using sunlight	Variation of mass with velocity	General mass-energy equivalence	Radiation from moving charges	Meson decay at high velocity	Trouton-Noble	Unipolar induction, using permanent magnet
Ether theories	Stationary ether, no contraction	A	A	D	D	A	A	D	D	N	A	N	D	D
	Stationary ether, Lorentz contraction	A	A	A	D	A	A	A	A	N	A	N	A	D
	Ether attached to ponderable bodies	D	D	A	A	A	A	A	D	N	N	N	A	N
Emission theories	Original source	A	A	A	A	A	D	D	N	N	D	N	N	N
	Ballistic	A	N	A	A	D	D	D	N	N	D	N	N	N
	New source	A	N	A	A	D	D	A	N	N	D	N	N	N
Special theory of relativity		A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A

Legend: A, the theory agrees with experimental results.  
 D, the theory disagrees with experimental results.  
 N, the theory is not applicable to the experiment.

TABLE 15-3

	Emission theory	Classical ether theory	Special theory of relativity
Reference system	No special reference system	Stationary ether is special reference system	No special reference system
Velocity dependence	The velocity of light depends on the motion of the source	The velocity of light is independent of the motion of the source	The velocity of light is independent of the motion
Space-time connection	Space and time are independent	Space and time are independent	Space and time are interdependent
Transformation equations	Inertial frames in relative motion are connected by a Galilean transformation	Inertial frames in relative motion are connected by a Galilean transformation	Inertial frames in relative motion are connected by a Lorentz transformation

Zu Abschnitt VII.1.D

zu S. 106 Punkt 2:

Beweis:  $S: n_1x + n_2y + n_3z + p = 0$

$S' \rightarrow S$ : lineare Transformation (s. Punkt 1):

$$x = a_1x' + b_1y' + c_1z' + d_1t' + e_1$$

$$y = a_2x' + b_2y' + c_2z' + d_2t' + e_2$$

$$z = a_3x' + b_3y' + c_3z' + d_3t' + e_3$$

$\Rightarrow$

$$S': (n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3)x'$$

$$+ (n_1b_1 + n_2b_2 + n_3b_3)y'$$

$$+ (n_1c_1 + n_2c_2 + n_3c_3)z'$$

$$+ \underbrace{(n_1d_1 + n_2d_2 + n_3d_3)}_{0, \text{ falls } \vec{n} \cdot \vec{d} = 0} t'$$

$$0, \text{ falls } \vec{n} \cdot \vec{d} = 0$$

$$+ (n_1e_1 + n_2e_2 + n_3e_3) + p = 0$$

$$\text{mit } \vec{d} = (d_1, d_2, d_3),$$

wobei offensichtlich  $\vec{d} \parallel \vec{v}$  sein muss

zu S. 106 Punkt 3:

Für diesen Punkt wurden Koordinatenursprünge und Zeitnullpunkte bzgl.  $S$  und  $S'$  stillschweigend so gewählt, daß  $x = y = z = 0, t = 0$  auf  $x' = y' = z' = 0, t' = 0$  abgebildet wird. Es werden also nur homogene lineare Transformationen zugelassen.

Dann gilt der Satz: Folgt für eine lineare homogene Transformation, daß  $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$

impliziert, dass  $c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0$  gilt (und umgekehrt), so folgt  $c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ .

Beweis: lineare homogene Transformation gibt

$$\begin{aligned} c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 &= A c^2 t^2 + B x^2 + C y^2 + D z^2 \\ &\quad + I c t x + J c t y + K c t z \\ &\quad + L y z + M z x + N x y \equiv P \end{aligned}$$

a) Notwendige Bedingungen dafür, dass  $P$  für jene reellen  $ct > 0$ ,  $x, y, z$  null ist, für die  $s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$  null ist:

$$(ct, x, y, z) = (1, \pm 1, 0, 0)$$

$$\Rightarrow A + B \pm I = 0, \quad \underline{B = -A}, \quad \underline{I = 0}$$

Analog:

$$\underline{C = -A}, \quad \underline{J = 0}$$

$$\underline{D = -A}, \quad \underline{K = 0}$$

Damit ist man bei

$$P = A (c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2) + L y z + M z x + N x y$$

angelangt.

$$(ct, x, y, z) = (\sqrt{2}, 0, 1, 1) \Rightarrow \underline{L = 0}$$

analog:

$$\underline{M = 0}$$

$$\underline{N = 0}$$

$$\Rightarrow s'^2 = P = A s^2$$

$$b) s'^2 = A(|\vec{v}|) s^2, \quad \text{"Reziprozität": } s^2 = A(|\vec{v}'|) s'^2$$

↑  
Isotropie!

$$\Rightarrow A^2(|\vec{v}|) = 1, \quad A(|\vec{v}|) = \pm 1$$

Grenzfall  $|\vec{v}| \downarrow 0$ : - ausgeschlossen



zu Gl. (5):

$$c^2 t'^2 - x'^2 = c^2 (Bt - Dx)^2 - A^2 (x - vt)^2 = c^2 t^2 - x^2$$

$$\Rightarrow B^2 - \frac{v^2}{c^2} A^2 = 1, \quad A^2 - \frac{c^2}{v} BD = 0, \quad A^2 - c^2 D^2 = 1$$

bes. mit  $\beta := \frac{v}{c}$

$$\beta A^2 = cBD, \quad B^2 = 1 + \beta^2 A^2, \quad c^2 D^2 = A^2 - 1$$

$$\beta^2 A^4 = c^2 D^2 B^2 = (A^2 - 1)(1 + \beta^2 A^2)$$

$$0 = A^2(1 - \beta^2) - 1, \quad A = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$B^2 = 1 + \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = \frac{1}{1 - \beta^2}, \quad B = A,$$

$$\beta A = cD, \quad D = \frac{v}{c^2} A$$

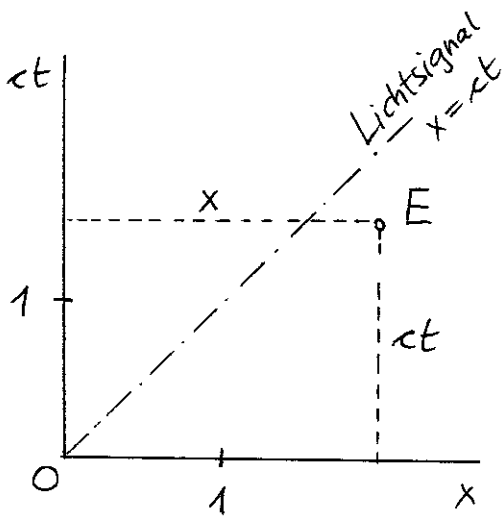
zu Abschnitt VII.2.A

zur geometrischen Veranschaulichung der Standard-LT  
(Minkowskidiagramme)

Da der Begriff des Vierervektors im Skriptum erst in einem späteren Abschnitt eingeführt wird, wird hier eine zum Skriptum alternative Darstellung gegeben, bei der das Wort "Vektor" nicht vorkommt.

1. Schritt: ct- und x-Achse willkürlich senkrecht gezeichnet

Beachte: Solange wir im Minkowski-Raum keine Metrik eingeführt haben, sind Begriffe wie "senkrecht" im Minkowski-Raum noch nicht definiert! Senkrecht in unserer Zeichenebene muss daher auch nicht senkrecht im Minkowski-Raum bedeuten. Ferner eine Einheit der Länge (z.B. cm) gewählt.



$$E: S: (ct, x)$$

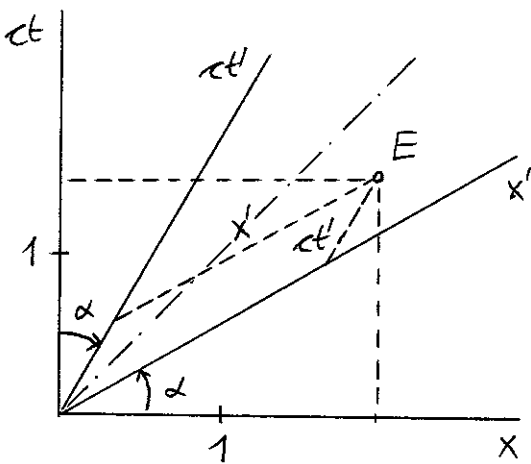
2. Schritt: Lage der  $ct'$ - und  $x'$ -Achse in diesem Diagramm

$$\underline{x'-Achse: ct' = 0}$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) = 0 \Rightarrow \underline{ct = \beta x} \quad \text{Gerade durch } 0 \text{ mit dem Anstieg } \beta$$

$$\underline{ct'-Achse: x' = 0}$$

$$x' = \gamma(x - \beta ct) = 0 \Rightarrow \underline{ct = \frac{1}{\beta} x} \quad \text{Gerade durch } 0 \text{ mit dem Anstieg } \frac{1}{\beta}$$



$$E: S': (ct', x')$$

Man kann aber  $ct', x'$  erst angeben, wenn man die Einheiten auf der  $ct'$ - und  $x'$ -Achse kennt!

Beachte: Daß die  $ct'$ -Achse in der Zeichnung nicht auf der  $x'$ -Achse senkrecht steht, impliziert ebenfalls nichts bzgl. der Geometrie im Minkowski-Raum. ●

$$\alpha = \arctan \beta < \frac{\pi}{4}, \text{ da } \beta < 1$$

### 3. Schritt: Eichkurven für Ort und Zeit

(Einheiten auf  $x'$ - und  $ct'$ -Achse, aber auch auf allen entsprechenden Achsen beliebiger weiterer Inertialsysteme)

$$c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2$$

Einheit auf der positiven  $x'$ -Achse:  $x' = 1, ct' = 0$

⇒ Schnitt des Hyperbelastes

$$\underline{x^2 - c^2t^2 = 1, x > 0} \quad \underline{\text{"Eichkurve für den Ort"}}$$

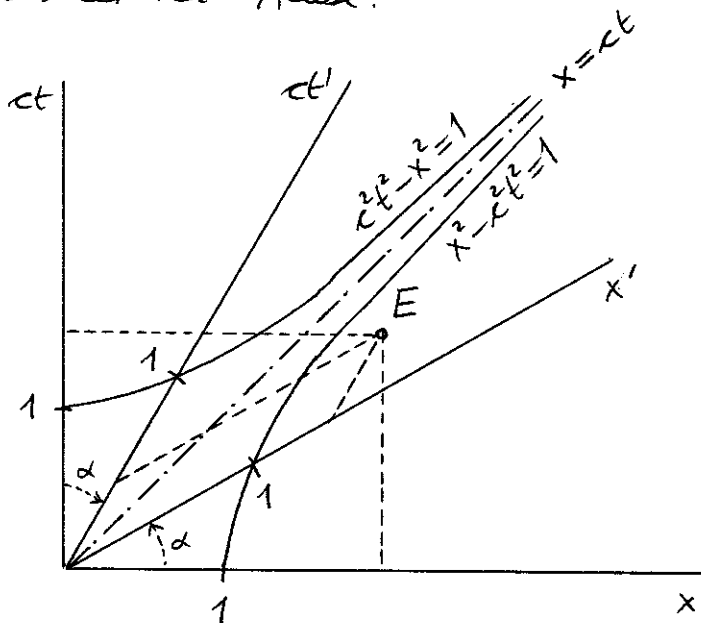
mit der  $x'$ -Achse.

Einheit auf der positiven  $ct'$ -Achse:  $x' = 0, ct' = 1$

⇒ Schnitt des Hyperbelastes

$$\underline{c^2t'^2 - x'^2 = 1, ct' > 0} \quad \underline{\text{"Eichkurve für die Zeit"}}$$

mit der  $ct'$ -Achse.



zu Abschnitt VII. 2.B

Ergänzungen, die das Verständnis erleichtern sollen.

Längendefinition (angewandter für Stab, sinngemäß für beliebiges Objekt)

Länge eines Stabes in einem Inertialsystem = räumlicher Abstand von Stabanfang und Stabende, und zwar einer bzgl. dieses Inertialsystems gleichzeitigen Lage von Anfang und Ende, gemessen in diesem Inertialsystem.

"Maßstab": Stab, welcher in seinem Ruhesystem seine Länge im Laufe der Zeit nur vernachlässigbar ändert.

Längenkontraktion von Maßstäben:

Fall 1: Maßstab ruht in S:  $\Delta x = L_0$  Ruhlänge

$$\text{Länge in } S' : L' = \Delta x' \Big|_{\Delta t' = 0}$$

$$\text{Standard-LT: } \Delta x = \gamma(v) (\Delta x' + v \Delta t') \Rightarrow$$

$$L' = \Delta x' \Big|_{\Delta t' = 0} = \frac{\Delta x}{\gamma(v)} = \frac{L_0}{\gamma(v)} < L_0$$

Fall 2: Maßstab ruht in S':  $\Delta x' = L_0$  Ruhlänge

$$\text{Länge in } S : L = \Delta x \Big|_{\Delta t = 0}$$

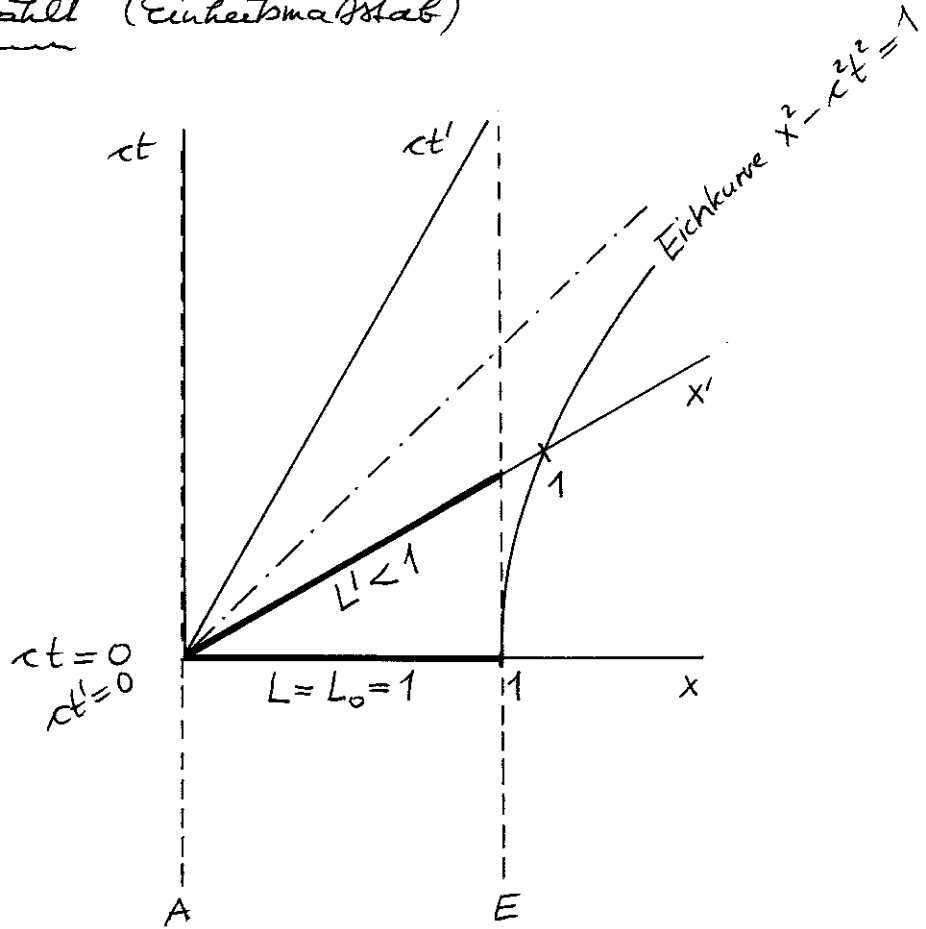
$$\text{Standard-LT: } \Delta x' = \gamma(v) (\Delta x - v \Delta t) \Rightarrow$$

$$L = \Delta x \Big|_{\Delta t = 0} = \frac{\Delta x'}{\gamma(v)} = \frac{L_0}{\gamma(v)} < L_0$$

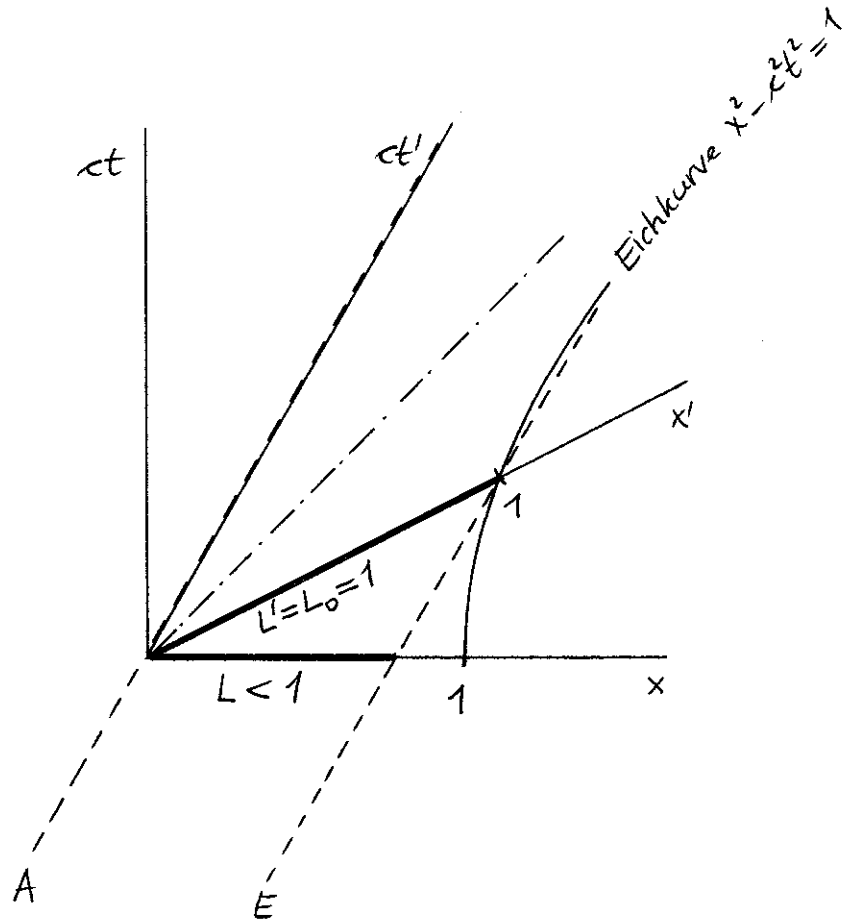
Minkowskidiagramme dazu:

$L_0 = 1$  gewählt (Einheitsmaßstab)

zu Fall 1:



zu Fall 2:



## Zeitdilatation für Standarduhren

Fall 1: Uhr ruht in S :  $\Delta t$  =  $\Delta \tau$  Eigenzeitintervall der Uhr

Zeitintervall  $\Delta T'$ , um das die (untereinander synchronisierten) Uhren von  $S'$  vorrücken, während die in  $S$  ruhende Uhr um  $\Delta \tau$  vorrückt:

Standard-LT

$$\Delta t' = \gamma(v) \left( \Delta t - \frac{v \Delta x}{c} \right) \Rightarrow$$

$$\Delta T' = \Delta t' \Big|_{\Delta x=0} = \gamma(v) \Delta t = \gamma(v) \Delta \tau$$

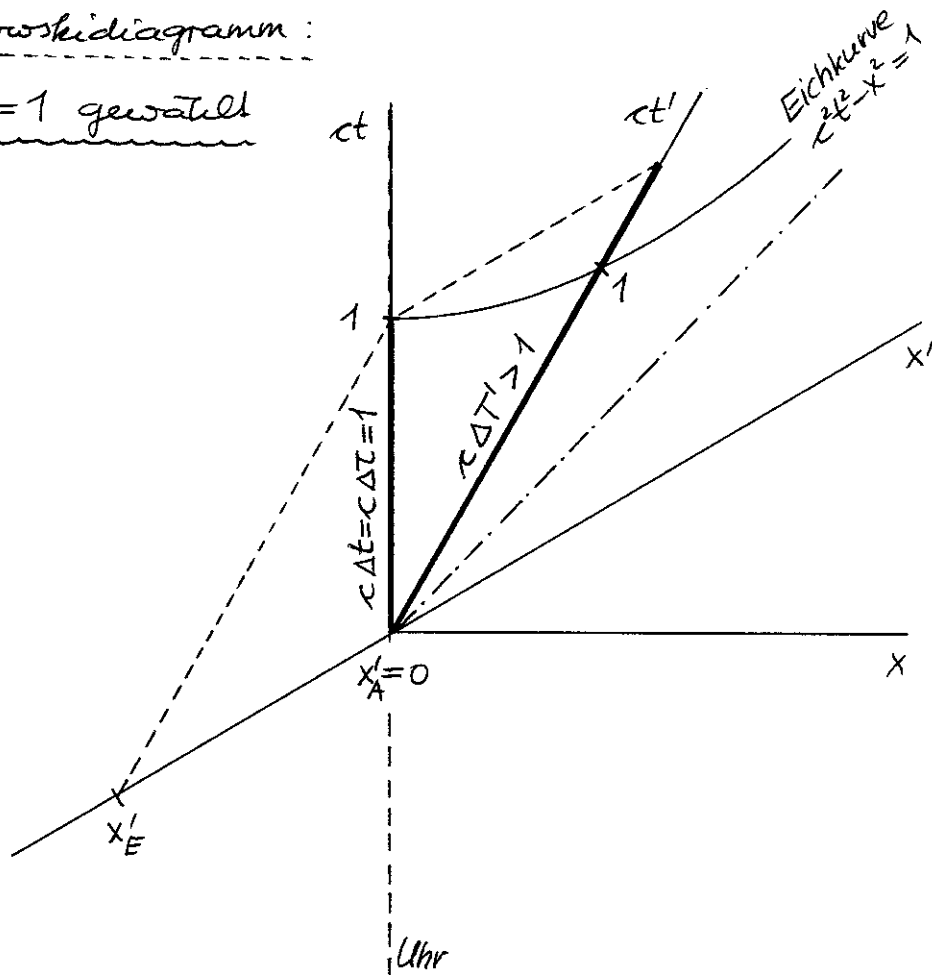
$$\underline{\underline{\Delta \tau = \frac{\Delta T'}{\gamma(v)} < \Delta T'}}$$

Beachte:  $t_A = \tau_A$  und  $t_E = \tau_E$ , welche  $\Delta t \Big|_{\Delta x=0} = \tau_E - \tau_A = \Delta \tau$  bestimmen, sind zwei aufeinanderfolgende Ablesungen an einer Uhr (der betrachteten, in  $S$  ruhenden Uhr).

$T'_A = t'_A$  und  $T'_E = t'_E$ , welche  $\Delta t' \Big|_{\Delta x=0} = t'_E - t'_A = \Delta T'$  bestimmen, werden an zwei verschiedenen Uhren von  $S'$  abgelesen (welche allerdings untereinander synchronisiert sind); Orte dieser Uhren von  $S'$ :  $x'_A, x'_E \neq x'_A$ ; s. Minkowskidiagramm). Messen der Zeitdilatation durch Vergleich von nur zwei Uhren ist nur möglich, wenn sich zumindest eine von ihnen beschleunigt bewegt, damit sich die Uhren trennen und wieder zusammenkommen können (s. später).

Minkowskidiagramm:

$c\Delta\tau = 1$  gewählt



Fall 2: Uhr ruht in  $S'$ :  $\Delta t' = \Delta\tau$  Eigenzeitintervall der Uhr

Standard-LT

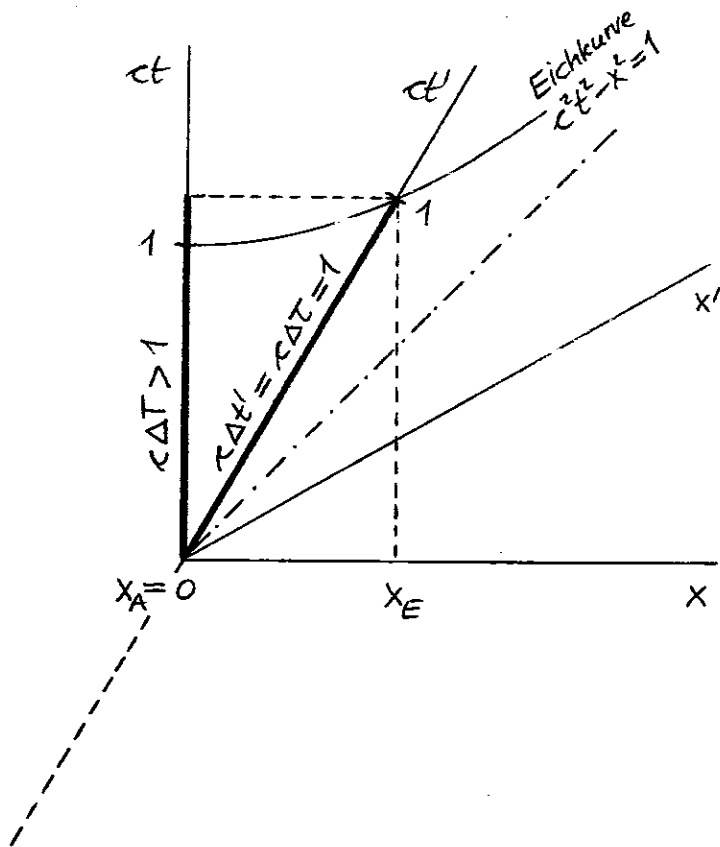
$$c\Delta t = \gamma(v) \left( c\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c} \right) \Rightarrow$$

$$\Delta T = \Delta t \Big|_{\Delta x' = 0} = \gamma(v) \Delta t' = \gamma(v) \Delta\tau$$

$$\underline{\underline{\Delta\tau = \frac{\Delta T}{\gamma(v)} < \Delta T}}$$

Minkowskidiagramm:

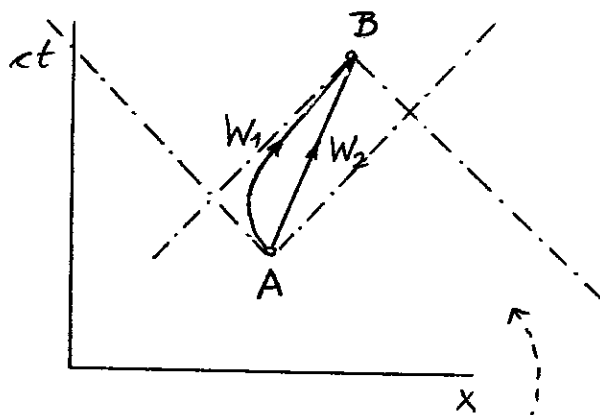
$c\Delta\tau = 1$  gewählt



Zu Abschnitt VIII.2.D

Ergänzung: Zeitdilatation zwischen zwei Standarduhren

(= beschleunigungsunempfindlichen Uhren), die sich an einem Ereignis A trennen und an einem Ereignis B wieder zusammenkommen ("Zwillingsproblem")



$$\Delta \tau_{AB}^{W_1} < \Delta \tau_{AB}^{W_2} \quad \text{im obigen Beispiel}$$

$$\Delta \tau_{AB}^{W_i} = \int_A^B dt = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{1 - \frac{u_i^2(t)}{c^2}} dt, \quad i=1,2$$



Ein Experiment dazu: "Maryland-Experiment"

Kopie aus H. Hänsel / W. Neumann, Physik,

Bd. Elektrizität, Optik, Raum und Zeit

Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 1993

$U_1$ , in einem Inertialsystem  $S$  ---,  $U_2$

Beschreibt eine der Uhren eine geschlossene Bahn, d. h., kehrt diese Uhr nach einer endlichen Zeit zum Ort der anderen Uhr zurück, so muß sie gegenüber dieser nachgehen. Ein entsprechendes Experiment wurde 1976 von einer Forschungsgruppe der Universität Maryland durchgeführt (Maryland-Experiment). Dabei wurde der Gang einer Atomuhr auf der Erde mit dem Gang einer in einem Flugzeug mitfliegenden Atomuhr verglichen. Die Flughöhe betrug etwa 10 km, die Flugzeit ca. 15 h. Die Höhe und die Geschwindigkeit des Flugzeuges wurden ständig gemessen und der Gang der beiden Uhren mit Hilfe von Laserimpulsen von 0,1 ns Dauer laufend verglichen. Der Einfluß der Gravitationsrotverschiebung wurde eliminiert (vgl. Abschnitt 14.3.2.3.1 und Abb. 14.16). Zur Realisierung des Zeitvergleichs sendete die Bodenstation einen Laserimpuls zum Flugzeug, der von dort wieder zur Bodenstation reflektiert wurde. Der Zeitpunkt des Eintreffens wurde von den Borduhren direkt registriert. Von der Bodenstation wurde dieser Zeitpunkt aus der Sendezeit und der Empfangszeit am Boden ermittelt. Aufeinanderfolgende Zeitvergleiche lieferten eine stetig zunehmende Differenz  $\Delta t'$ , die in Abbildung 14.4 über der Flugzeit dargestellt ist. Innerhalb der Fehlergrenze bestätigt dieses Experiment die Beziehung (S 14.5).

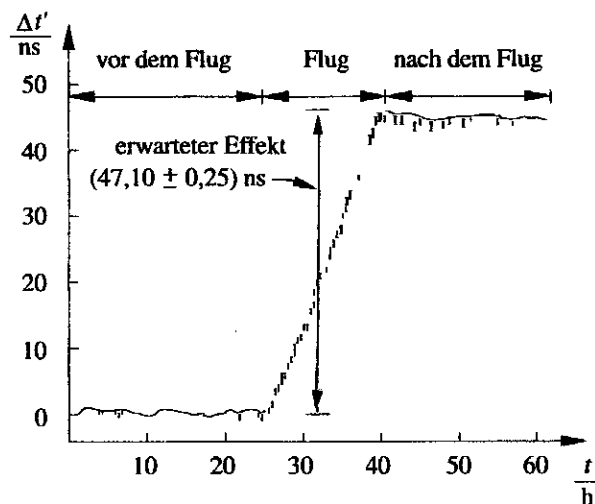


Abb. 14.4 Meßergebnis des Maryland-Experimentes

$\Delta t'$  bedeutet dabei die Differenz der Eigenzeiten der beiden Standarduhren (= Atomuhren) in Abhängigkeit von der Zeit im Inertialsystem  $S$ , also

$$\Delta t' = \tau_2(t) - \tau_1(t).$$

zu Abschnitt VII.3.B

Alternative, welche zweckmäßiger ist, da ja die Vierergeschwindigkeit bereits definiert wurde!

Transformation der Teilchengeschwindigkeit bei beliebiger Teilchenbewegung für Systeme in Standardkonfiguration mit Hilfe der Vierergeschwindigkeit

Standard-LT der Vierergeschwindigkeit

$$\underline{u'^{\mu}} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} u^{\alpha}, \quad (\Lambda^{\mu}_{\alpha} \equiv \text{st} \Lambda^{\mu}_{\alpha})$$

mit  $(u^{\mu}) = \gamma(u) (c, \vec{u})$  } Hierbei kann  $\vec{u} = \vec{u}(t)$ ,  
 $(u'^{\mu}) = \gamma(u') (c, \vec{u}')$  }  $\vec{u}' = \vec{u}'(t')$  sein.

$$\underline{0}: \quad u'^0 = \gamma(v) (u^0 - \frac{v}{c} u^1)$$

$$\underline{1}: \quad u'^1 = \gamma(v) (u^1 - \frac{v}{c} u^0)$$

$$\underline{2}: \quad u'^2 = u^2$$

$$\underline{3}: \quad u'^3 = u^3$$

lineare Transformation!

$$\underline{0} \Rightarrow \gamma(u') c = \gamma(v) \gamma(u) (c - \frac{v}{c} u_x)$$

$$\underline{\gamma(u')} = \gamma(v) \gamma(u) \left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right) \quad (*)$$

$$\underline{\gamma(u)} = \gamma(v) \gamma(u') \left(1 + \frac{v u'_x}{c^2}\right) \quad (\text{"Reziprozität"}) \quad (49)$$

$$\underline{1} \Rightarrow \gamma(u') u'_x = \gamma(v) \gamma(u) (u_x - v) \quad \text{und mit } (*)$$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}} \quad (\text{nichtlineare Transformation})$$

$$\text{bzw.} \quad u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}} \quad (47a)$$

$\underline{2} \Rightarrow f(u') \mu'_y = f(u) \mu_y$  und mit (\*)

$$\mu'_y = \frac{\mu_y}{\gamma(v) \left(1 - \frac{v \mu'_x}{c^2}\right)} \quad \text{bzw.} \quad \mu_y = \frac{\mu'_y}{\gamma(v) \left(1 + \frac{v \mu'_x}{c^2}\right)} \quad (47b)$$

Analog:

$$\mu'_z = \frac{\mu_z}{\gamma(v) \left(1 - \frac{v \mu'_x}{c^2}\right)} \quad \text{bzw.} \quad \mu_z = \frac{\mu'_z}{\gamma(v) \left(1 + \frac{v \mu'_x}{c^2}\right)} \quad (47c)$$

zu Abschnitt VIII.4

S. die folgenden Kopien der VO-Folien.

Als Zusatzinformation zu diesem Thema (nicht Prüfungstoff)

1. das Vorbereitungspraktikum von Meinrad Häfner.

## VII. 4. Sichtbarkeit der Längenkontraktion?

Längenkontraktion in Bewegungsrichtung

Beispiel 1: Ruhssystem: Objekt ist Kugel

Vom Radius  $R_0$

Bezugssystem, in dem sich das Objekt

mit  $v$  bewegt: Objekt ist Rotations-

ellipsoid mit Halbachsen  $\frac{R_0}{\gamma(v)}$ ,  $R_0$ ,  $R_0$

Beispiel 2: Ruhssystem: Objekt ist Würfel

mit Kantenlänge  $a_0$

Bezugssystem, in dem sich das Objekt

parallel zu Kante mit  $v$  bewegt:

Objekt ist Quader mit Kantenlängen

$\frac{a_0}{\gamma(v)}$ ,  $a_0$ ,  $a_0$

OBJEKT IST ... bezieht sich dabei auf die  
entsprechende MESSVORSCHRIFT FÜR

LÄNGEN: Lineardimension eines Objekts

in  $S$  in einer Raumrichtung = räumlicher

Abstand von Objektanfang und

Objektende (in dieser Richtung) gleichzeitig

in  $S$  (Koordinatenabstände auf "world map" =  
"Weltkarte" von  $S$ )

Was "sieht" man in den beiden Beispielen  
mit freiem Auge oder auf einer Fotografie?

Beispiel 1: Penrose 1959 (s. Abschnitt IX. 4. C)

Man "sieht" - unabhängig von der Größe  
der Geschwindigkeit und der Größe der  
Entfernung zum Objekt einen kreisförmigen  
Umriss.

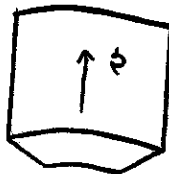
"Längenkontraktion"  
nicht sichtbar

Beispiel 2: Terrell 1959 (s. Folien VII-52', VII-52")

Befindet sich das Objekt in so großer  
Entfernung vom Auge bzw. vom Objektiv,  
daß man die vom Objekt kommenden  
Lichtstrahlen als parallel ansehen kann,  
so "sieht" man einen gedrehten Würfel.

"Längenkontraktion"  
nicht sichtbar  
in dem naiven Sinn w.o.  
sichtbar, aber nicht  
"Längenkontraktion"

Ist diese Bedingung nicht erfüllt,  
"sieht" man einen gedrehten,  
verzerrten und kontrahierten "Würfel"



GRUND: Summeneffekt von Längenkontraktion  
und Retardierung: Photonen, die gleichzeitig

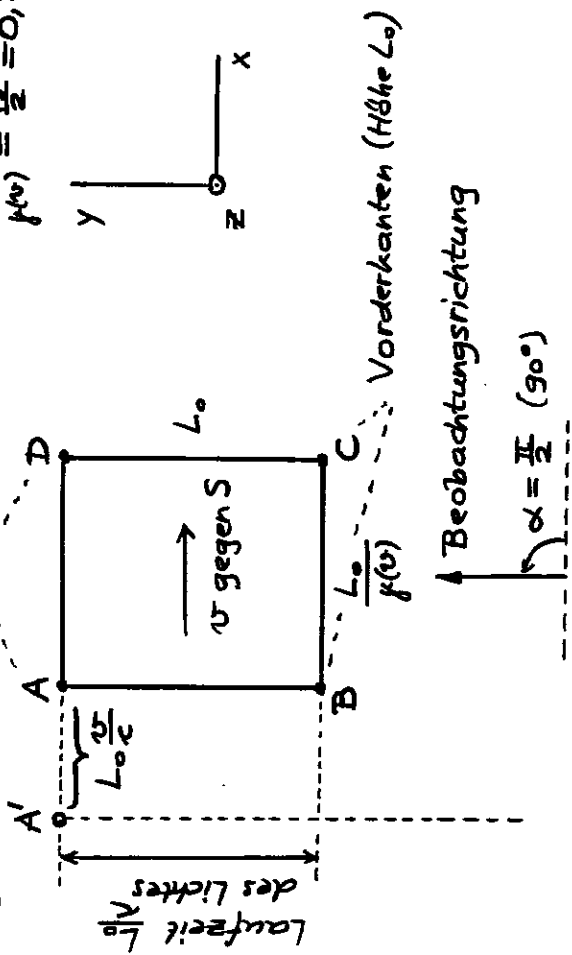
im Auge (beim Objektiv) einlangen, stammen

von verschiedenen Lagen des Objekts

(Retardierungen auf "world picture" = "Weltbild")

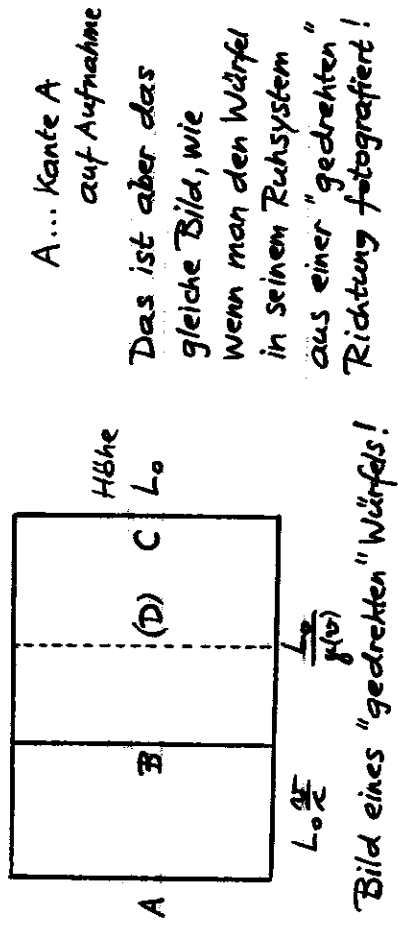
Würfel in großer Entfernung  
(Parallelstrahlen)

S' Ruhssystem des Würfels; Abb. für  $v = 0,5c$   
 $\Rightarrow \gamma(v) = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,154$   
 $\frac{1}{\gamma(v)} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$

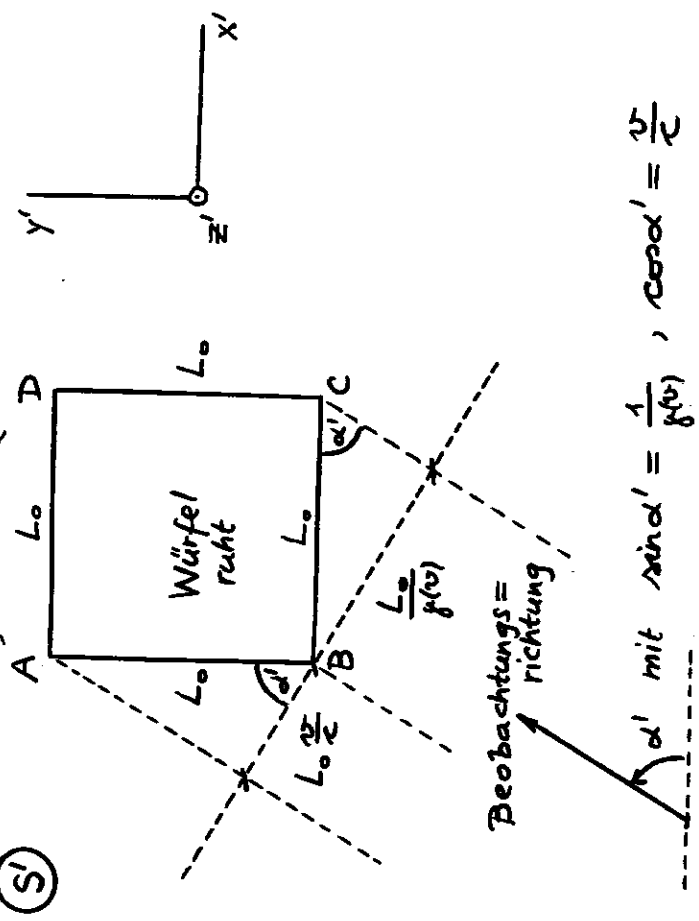


Kante A wird wegen Retardierung in Lage A' "gesehen" (fotografiert)!

Daher sieht die fotografische Aufnahme so aus:



Beweis: (S')



$\alpha'$  mit  $\sin \alpha' = \frac{1}{\gamma(v)}$ ,  $\cos \alpha' = \frac{v}{c}$

$(\sin^2 \alpha' + \cos^2 \alpha' = 1 \quad \checkmark)$

Für  $\frac{v}{c} = 0,5$  gilt  $\alpha' = \frac{\pi}{3}$  ( $60^\circ$ )

Bemerkung: Für ein beliebiges Objekt in großer Entfernung (Parallelstrahlen) gilt eine qualitativ gleiche Aussage (z.B. Kugel).

Ferner: Für ein solches Objekt gilt

Längenkontraktion + Retardierung = Aberration

Die Aberrationsformeln (IX.68) (s. Folie IX-35) liefern mit  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  unmittelbar  $\sin \alpha' = \frac{1}{\gamma}$ ,  $\cos \alpha' = \beta$ .

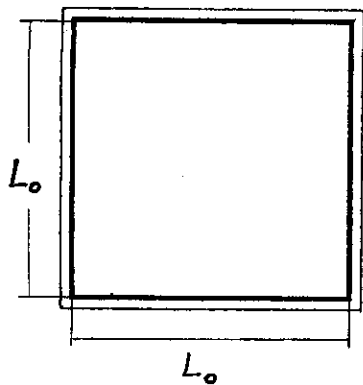


Abb. 5a: Würfel in Ruhe  
(Zentralprojektion)

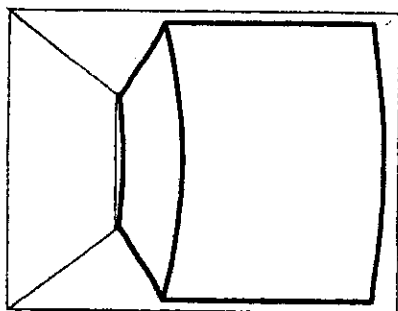


Abb. 5b: Würfel mit  $v=0.5c$   
aus geringer Entfernung  
(Zentralprojektion)

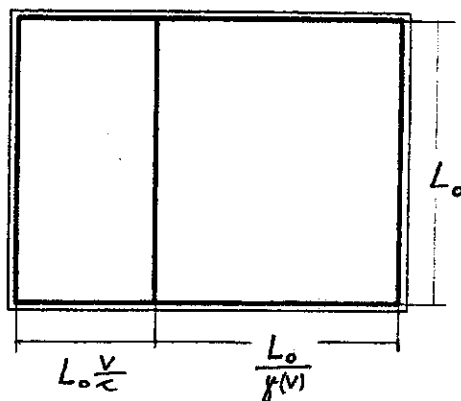


Abb. 5c: Würfel mit  $v=0.5c$   
aus großer Entfernung  
(Parallelprojektion)

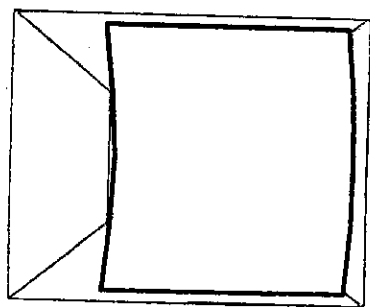


Abb. 7a:  $v=0.3c$

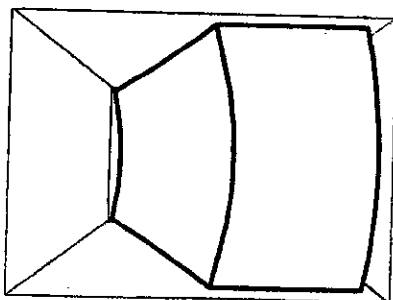


Abb. 7b:  $v=0.7c$

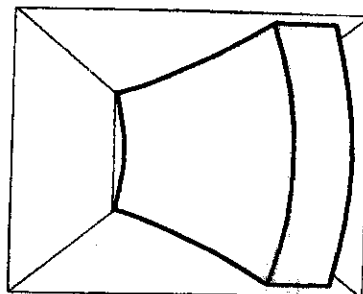


Abb. 7c:  $v=0.95c$

zu Abschnitt VIII. 2. A

zu Gl. (12):

$$\text{Mit } \vec{F} = m\gamma(u)\vec{a} + m\gamma^3(u) \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{u}$$

folgt

$$\frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c^2} = m\gamma(u) \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{c^2} \underbrace{\left(1 + \gamma^2(u) \frac{u^2}{c^2}\right)}_{\gamma^2(u)} = m\gamma^3(u) \frac{\vec{a} \cdot \vec{u}}{c^2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{m(u)}_{m\gamma(u)} \vec{a} = \vec{F} - \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c^2} \vec{u} \quad (\text{Newton: } m\vec{a} = \vec{F})$$

Die von der Kraft  $\vec{F}$  verursachte Beschleunigung besitzt also im Falle  $\vec{F} \cdot \vec{u} \neq 0$  nicht die Richtung der Kraft.

zu Gl. (15), (17):

Die Größe

$$T := mc^2 (\gamma(u) - 1)$$

wird als relativistische kinetische Energie des Teilchens bezeichnet. (Für  $u \ll c$  gilt  $T \approx \frac{mu^2}{2} = T_{\text{Newton}}$ .)

Mit dieser Größe folgt

$$cp^0 = m\gamma(u)c^2 = mc^2 + T$$

$\begin{array}{cc} \vdots & \vdots \\ \text{Ruheenergie} & \text{kinetische Energie} \end{array}$

und der Arbeitssatz lautet

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} (m\gamma(u)c^2) = \frac{dT}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{u},$$

in Analogie zum Newtonschen Arbeitssatz  $\frac{dT_{\text{Newton}}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{u}$ .

Der Energiesatz (17) lautet dann

$$mc^2 + T + V = E .$$

Zu Abschnitt VIII.2.D

zu Gl. (23):

Gleichwertig dazu ist (s. Seite VIII-1)

$$m\gamma(u)\vec{a} = \vec{F} - \frac{\vec{F}\vec{u}}{c^2} \vec{u} .$$

Aus dieser Gleichung ist es leichter zu sehen, dass für den Fall  $\vec{F} = (F, 0, 0)$ ,  $F$  zeitlich konstant  $> 0$ , und die AB  $\vec{u}(0) = \vec{0}$

$$\Rightarrow u_y(t) = u_z(t) = 0, \quad y(t) = z(t) = 0$$

$$u_x(t) = u(t) > 0$$

folgt.

Zu Gl. (27):

Für die Berechnung von  $\tau$  benötigt man  $\sqrt{1 - \frac{u^2(t)}{c^2}}$ .

Wegen

$$\sqrt{1 - \frac{u^2(t)}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{m^2 c^2}}}$$

folgt durch Integration über  $t$ , wenn man  $\tau = 0$  für  $t = 0$  wählt, sofort Gl. (27).

Zur Überschrift von Abschnitt VIII.2.D

Die hyperbolische Bewegung wird als "gleichförmig beschleunigte Bewegung im Sinne der SRT" bezeichnet,



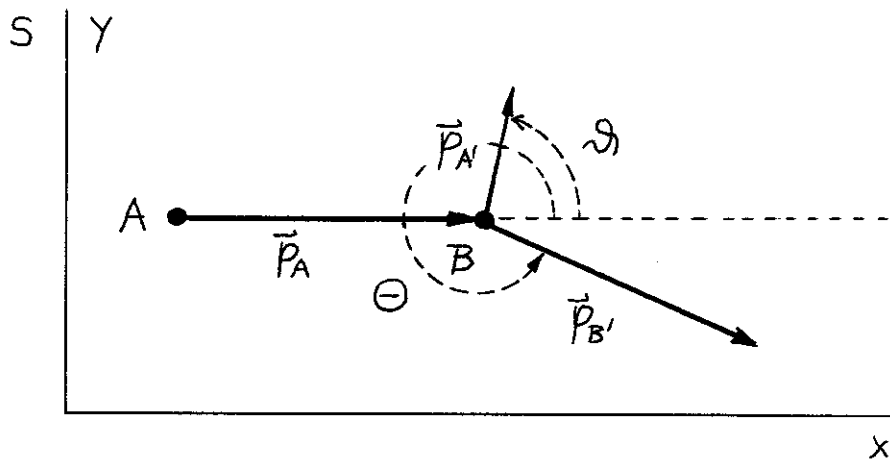
weil die Beschleunigung gegen das jeweilige momentane  
inertiale Ruhssystem konstant (und durch  $a := \frac{F}{m}$   
gegeben) ist. Für die Beschleunigung in S folgt durch  
 Ableitung von  $u(t) = u_x(t)$  (mit  $a = \frac{F}{m}$ )

$$a(t) = a_x(t) = \frac{a}{\left(1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}\right)^{3/2}},$$

also für "kleine"  $t$   $a(t) \approx a$ , aber  $a(t) \rightarrow 0$   
 für  $t \rightarrow +\infty$ .

zu Abschnitt VIII.4.A

Abbildung zur Streuung im Laborsystem:



$\vartheta$  Streuwinkel von A } im Laborsystem S  
 $\Theta$  Streuwinkel von B }

zu Gl. (54a), (54b):

Gl. (54a) gestattet die Berechnung von  $E_{A'}$  für gegebenen  
 Streuwinkel  $\vartheta$ , Gl. (54b) gestattet die Berechnung von  $E_{B'}$   
 für gegebenen Streuwinkel  $\Theta$ . Die Streuwinkel  $\vartheta, \Theta$  sind

aber natürlich nicht unabhängig. Den Zusammenhang zwischen  $\Theta$  und  $\mathcal{D}$  erhält man am einfachsten aus dem Erhaltungssatz für die  $y$ -Komponente des Gesamtimpulses:

$$\underbrace{p_{A'}(\mathcal{D})}_{\text{aus Gl. (54a)}} \sin \mathcal{D} + \underbrace{p_{B'}(\Theta)}_{\text{aus Gl. (54b)}} \sin \Theta = 0 \Rightarrow \Theta(\mathcal{D})$$

zu Abschnitt IX.1.A

Der Beweis aus dem Skriptum für die Vierervektorfeld =  
eigenschaft von  $(\rho, \vec{j})$  bezieht sich auf den  
Sonderfall, daß es ein Inertialsystem  $S_0$  gibt, in  
welchem eine rein statische Ladungsverteilung

$\rho_0(\vec{r}_0) \equiv \rho_{\text{ruhe}}(\vec{r}_0)$  vorliegt ( $\vec{j}_0(\vec{r}_0) = \vec{0}$ ). In einem  
relativ zu  $S_0$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{u}$  bewegten  
Inertialsystem  $S$  liegt dann wegen der Invarianz der  
Ladung,  $\rho_0 d^3r_0 = \rho d^3r$ , und der Längenkontraktion,  
welche  $d^3r = \frac{d^3r_0}{\gamma(u)}$  bedingt, die Ladungsdichte  
 $\rho = \rho_0 \gamma(u)$  und die Stromdichte  $\vec{j} = \vec{u} \rho = \vec{u} \gamma(u) \rho_0$  vor  
(Konvektion).

Alternativer Beweis (gilt allgemein, d.h. auch wenn es sich  
nicht um obigen Sonderfall reiner Konvektion handelt):

Zunächst werden Ladungs- und Stromdichte für den Fall  
einer einzigen, allerdings beliebig bewegten, Punktladung  
betrachtet:  $\rho(\vec{r}, t) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}(t))$ ,  $\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{u}(t) \rho(\vec{r}, t)$ .

L-Invarianz der Ladung:

$$\rho' d^3r' = \rho d^3r \iff \rho d^3r = \text{Viererskalarfeld}$$

$$\Rightarrow \rho d^3r dx^4 = \rho \underbrace{d^3r d(ct)}_{d^4x} \frac{1}{c} \frac{dx^4}{dt} = \text{Vierervektorfeld}$$

(kontravariante  
Komponenten)

L-Invarianz des vierdimensionalen Volumenelementes:

$$d^4x' = \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} d^4x = d^4x$$

det  $\Lambda = 1$  für beliebige LT

Beachte: Nach Gl. (VII.11) gilt für eine allgemeine LT

$$\Lambda = D' \Lambda^{st} \Lambda^D \quad (D, D' \text{ Drehungen, } st \text{ Standard-LT}),$$

$$\text{woraus } \det \Lambda = \underbrace{\det D'}_1 \cdot \underbrace{\det \Lambda^{st}}_1 \cdot \underbrace{\det D}_1 = 1 \text{ folgt.}$$

$$\underbrace{\frac{1}{c} d^4x}_{L\text{-Invariante}} \underbrace{\oint \frac{dx^\mu}{dt}}_{=: j^\mu} = \text{Vierervektorfeld (kontravariante Komponenten)}$$

Vierervektorfeld (kontravariante Komponenten)

Mit

$$j^\mu = \oint \frac{dx^\mu}{dt} = \oint \underbrace{\frac{d\tau}{dt}}_{\frac{1}{\gamma(u)}} \underbrace{\frac{dx^\mu}{d\tau}}_{u^\mu}$$

folgt aber

$$(j^\mu) = \oint \frac{1}{\gamma(u)} (u^\mu) = \oint \frac{1}{\gamma(u)} \gamma(u) (c, \vec{u}) \\ = (c\rho, \vec{u}\rho) = (c\rho, \vec{j}).$$

Nun lassen sich beliebige (mikroskopische) Quelloverteilungen additiv aus den Beiträgen von Punktladungen zusammensetzen. Mit  $\vec{j}_A$  (A Teilchenindex) ist aber auch

$$\sum_A \vec{j}_A = \vec{j} \text{ Vierervektorfeld.}$$

zu Abschnitt IX.1.C

zu Gl. (17): Die zur Berechnung der  $\hat{F}^{\mu\nu}$  benötigten kovarianten Komponenten von  $\vec{F}$  erhält man aus Gl. (14) und  $(g_{\beta r} = g_{r\beta})$

$$F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\mu} g_{\beta r} F^{\mu r} = g_{\alpha\mu} \underset{\uparrow}{F^{\mu r}} \underset{\uparrow}{g_{r\beta}}.$$

Es folgt damit

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

zu Abschnitt IX.1.D

Zu Gl. (23) bis (25):

Siehe die Anhänge A.1.3, A.1.4 des Skriptums.

zu Abschnitt IX.3.A

zum 1. Term in der Gleichung unterhalb von Gl. (40):

$$\begin{aligned} \downarrow \partial^\sigma (F^{\mu\nu} F_{\sigma\nu}) &= \partial^\sigma (F^{\mu\sigma} F_{\nu\sigma}) \\ \uparrow \uparrow & \quad \quad \quad \underbrace{-F_{\sigma\nu}} = -g_{\nu\tau} F_\sigma{}^\tau \\ &= \underbrace{-g_{\nu\tau}} \partial^\sigma (F^{\mu\sigma} F_\sigma{}^\tau) = -\partial_\nu (F^{\mu\sigma} F_\sigma{}^\nu) \\ & \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \quad \quad \quad (\text{1. Term Gl. (41)}) \\ & \quad \quad \quad \partial_\tau \end{aligned}$$

zu Abschnitt IX.3.B

zur 1. Zeile des Textes:

Die Symmetrie des 2. Termes in Gl. (42) ist wegen  $g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}$  offensichtlich. Die Symmetrie des 1. Termes sieht man aus

$$\begin{aligned} F^{\mu\sigma} F_\sigma{}^\nu &= g_{\sigma\tau} F^{\mu\sigma} \underbrace{F^{\tau\nu}}_{-F^{\nu\tau}} = -g_{\sigma\tau} F^{\mu\sigma} F^{\nu\tau} \\ &= F^{\nu\sigma} F_\sigma{}^\mu . \end{aligned}$$

zu Gl. (45):

$$T^{r\mu} = \frac{1}{4\pi c} \left( \underbrace{F^{\mu\sigma} F_{\sigma}{}^r}_{\text{"Faktor"} \quad \text{"1. Term"}} + \frac{1}{4} \underbrace{g^{r\mu} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau}}_{\text{"2. Term"}} \right)$$

"1. Term":  $F_{\sigma}{}^r = g_{\sigma\tau} F^{\tau r}$  gibt (Multiplikation der Matrix (VII.29) mit der Matrix (14))

$$\begin{array}{c} \text{Spalte} \\ \vdots \\ (F_{\sigma}{}^r) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \text{Zeile} \end{array}$$

Multiplikation der Matrix (14) mit dieser Matrix liefert

$$(F^{\mu\sigma} F_{\sigma}{}^r) = \begin{pmatrix} \vec{E}^2 & (\vec{E} \times \vec{B})_x & (\vec{E} \times \vec{B})_y & (\vec{E} \times \vec{B})_z \\ \cdot & \vec{B}^2 - (E_x^2 + B_x^2) & -E_x E_y - B_x B_y & -E_z E_x - B_z B_x \\ \cdot & \cdot & \vec{B}^2 - (E_y^2 + B_y^2) & -E_y E_z - B_y B_z \\ \cdot & \cdot & \cdot & \vec{B}^2 - (E_z^2 + B_z^2) \end{pmatrix}$$

"2. Term":  $\frac{1}{4} g^{r\mu} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau}$   
 (34a):  $-2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)$

$$\left( \frac{1}{4} g^{r\mu} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau} \right) = -\frac{1}{2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \text{diag} (1, -1, -1, -1)$$

"Faktor" · ("1. Term" + "2. Term") liefert dann Gl. (45) mit Gl. (44a-d).

zu Abschnitt IX.3.D

Zur Vierer-Lorentzkraft:

Nach Gl. (VIII.13), (VIII.14) muss für die Vierer-Lorentzkraft

$$(F^\mu) = q(u) \left( \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c}, \vec{F} \right) \text{ mit der Dreier-Lorentzkraft}$$

$$\vec{F} = q \left[ \vec{E} + \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \right] \text{ gelten, also}$$

$$(F^\mu) = q q(u) \left( \frac{\vec{E} \cdot \vec{u}}{c}, \vec{E} + \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \right).$$


---

Es muss möglich sein,  $F^\mu$  durch den Feld(stärke)tensor und die Vierergeschwindigkeit auszudrücken.

Es gilt:

$$\underline{F^\mu = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu}$$

$$\underline{\mu=0}: F^0 = \frac{q}{c} F^{0\nu} u_\nu = \frac{q}{c} \underbrace{F^{0i} u_i}_{q(u) \vec{E} \cdot \vec{u}} \quad \checkmark$$

$$\underline{\mu=1}: F^1 = \frac{q}{c} F^{1\nu} u_\nu = \frac{q}{c} \underbrace{F^{10} u_0}_{c q(u) E_x} + \frac{q}{c} \underbrace{F^{1i} u_i}_{q(u) (\vec{B}_z u_y - \vec{B}_y u_z)} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{(\vec{u} \times \vec{B})_x} \quad \checkmark$$

$\mu=2,3$  analog.

zu Abschnitt IX.4.A

zu Gl. (58):

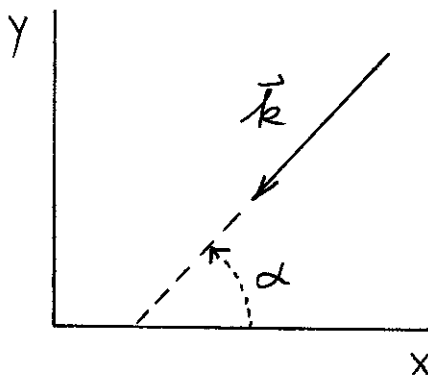
$$\square F^{\nu\mu} = \underbrace{f^{\nu\mu}}_{\substack{\text{nicht } \forall \nu, \mu \\ \text{gleich } 0}} \underbrace{\square e^{-ik_\sigma x^\sigma}}_{\text{muß } 0 \text{ sein}} = 0$$

$$\begin{aligned} \square e^{-ik_\sigma x^\sigma} &= -g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta e^{-ik_\sigma x^\sigma} \\ -g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta e^{-ik_\sigma x^\sigma} &= g^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta e^{-ik_\sigma x^\sigma} = 0, \quad \forall x^0, x^1, x^2, x^3 \\ \vec{k} \cdot \vec{k} &= 0 \quad \text{notwendige Bedingung} \end{aligned}$$

zu Abschnitt IX.4.B, IX.4.C

Abbildung für S:

$$\vec{k} = k \vec{n} = \frac{\omega}{c} \vec{n}$$



Analoge Abbildung für S'.

zum letzten Absatz von Abschnitt IX.4.C

Die betrachtete Abbildung ist konform (winkeltreu),

Kreise (und Geraden) der Projektionsebene werden

auf Kreise auf der Kugel ("Himmelskugel") abgebildet.



Daraus folgt die Unsichtbarkeit der Längenkontraktion für ein Objekt, welches in seinem Ruhesystem eine Kugel ist, für beliebige Beobachter. Ein beliebiger Beobachter, gleichgültig wie nah oder fern, gleichgültig wie groß seine Relativgeschwindigkeit zu einem solchen Objekt ist, sieht von ihm einen kreisförmigen Umriss. Angenommen das Objekt ruht in  $S'$ .  $B'$  sieht dann einen Kreisumriss auf seiner "Himmelskugel". Die Projektion dieses Kreisumrisses auf  $B'$ 's "Schirm" ist ebenfalls ein Kreis. Relativ zu dem (mit  $B'$  raum-zeitlich koinzidierten) Beobachter  $B$  von  $S$  bewegt sich das Objekt mit der Geschwindigkeit  $v$ .  $B$ 's "Schirmbild" des Objektumrisses unterscheidet sich von  $B'$ 's "Schirmbild" des Objektumrisses aber nur in der Größe, ist also ebenfalls ein Kreis. Daraus folgt schließlich, daß der Umriss des Objektes, den  $B$  auf seiner "Himmelskugel" sieht, auch ein Kreis ist.

Zu Abschnitt X.1.A, X.1.B

Zu Gl. (4a), (6a) und (14a):

Als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und Geschwindigkeiten besitzt die kinetische Energie in der nichtrelativistischen Mechanik die Form

$$T(q, \dot{q}) = \sum_{r,s} \frac{1}{2} a_{rs}(q) \dot{q}_r \dot{q}_s \quad (\text{n. z. B. Landau-Lifschitz Bd.1}).$$

(Vgl. die Newtonsche u. relativistische kin. Energie eines Teilchens!)  
Als homogene Funktion vom Grade 2 in den  $\dot{q}_r$  erfüllt  $T$  dann die Dgl.

$$\sum_r \dot{q}_r \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} = 2T.$$

Zu Gl. (14b):

Die Größe

$$E(q, \dot{q}, t) = \sum_r \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - L(q, \dot{q}, t)$$

wird als Energie des System bezeichnet.

≠ nichtrelativistische

Bei einem abgeschlossenen System bzw. bei einem nicht abgeschlossenen System, bei dem sich die äußeren Kräfte aus einem zeitunabhängigen Potential herleiten lassen,

gilt Gl. (6a), also  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ ,  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}$ , und die Energie

$$E(q, \dot{q}) = 2T(q, \dot{q}) - L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) + V(q)$$

ist Erhaltungsgröße. Geht man von  $q, \dot{q}$  auf  $q, p$  über, so hat man

$$H(q, p) = \sum_r p_r \dot{q}_r - L = T(q, p) + V(q)$$

$$\text{und } \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

zu Abschnitt X.3.C

zu Gl. (35), (36):

$$\mathcal{L}_{em}(\partial^\sigma A^\tau) = -\frac{1}{16\pi} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \overbrace{(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha)}^{F^{\alpha\beta}} \overbrace{(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)}^{F^{\mu\nu}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial(\partial^\sigma A^\tau)} = -\frac{1}{16\pi} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} [(\delta_\sigma^\alpha \delta_\tau^\beta - \delta_\sigma^\beta \delta_\tau^\alpha) F^{\mu\nu} + F^{\alpha\beta} (\delta_\sigma^\mu \delta_\tau^\nu - \delta_\sigma^\nu \delta_\tau^\mu)]$$

$$= -\frac{1}{16\pi} [g_{\sigma\mu} g_{\tau\nu} F^{\mu\nu} - g_{\tau\mu} g_{\sigma\nu} F^{\mu\nu} + g_{\alpha\sigma} g_{\beta\tau} F^{\alpha\beta} - g_{\alpha\tau} g_{\beta\sigma} F^{\alpha\beta}]$$

$$= -\frac{1}{16\pi} [F_{\sigma\tau} - \underbrace{F_{\tau\sigma}}_{-F_{\sigma\tau}} + F_{\sigma\tau} - \underbrace{F_{\tau\sigma}}_{-F_{\sigma\tau}}] = -\frac{1}{4\pi} F_{\sigma\tau}$$

$$\underbrace{\partial^\sigma \frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial(\partial^\sigma A^\tau)}}_{-\frac{1}{4\pi} F_{\sigma\tau}} - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial A^\tau}}_0 = 0 \Rightarrow \partial^\sigma F_{\sigma\tau} = 0.$$

zu Gl. (37), (38):

$$\pi_\tau = \frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial \dot{A}^\tau} = \frac{1}{c} \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial(\partial^0 A^\tau)}}_{-\frac{1}{4\pi} F_{0\tau}} = -\frac{1}{4\pi c} F_{0\tau}$$

$$\pi_{\tau} = - \frac{1}{4\pi\epsilon} F_{0\tau}$$

$$(F_{\sigma\tau}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{gl. (38)}$$

zu gl. (40a), (40b):

Wegen  $\text{div } \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$  (freies Feld) gilt  $\vec{E} \cdot \text{grad } \phi = \vec{\nabla}(\phi \vec{E})$ ,  
also

$$\mathcal{H}_{em}(\vec{r}, t) = \underbrace{\frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2(\vec{r}, t) + \vec{B}^2(\vec{r}, t))}_{\omega_{em}(\vec{r}, t) \text{ "von früher"}} + \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}(\phi(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t)).$$

gl. (40b) folgt daraus, falls Potential und Feldstärken im Unendlichen hinreichend stark verschwinden, was für freie elm. Felder keineswegs garantiert ist.

zu Kapitel X.4

Die Wirkung des "gekoppelten" Teilchen-Feld-Systems ist durch

$$S = S_{ft} + S_{em} + S_{ww}$$

gegeben, und für die Lagrangefunktion gilt entsprechend

$$L = L_{ft} + L_{em} + L_{ww}$$

mit

$$L_{em} = \int d^3r \mathcal{L}_{em} \quad , \quad L_{ww} = \int d^3r \mathcal{L}_{ww} .$$

Für die Ableitung der BG des elm. Feldes ist aber  $L_{ft}$  irrelevant (enthält keine Feldvariablen), weshalb in Abschnitt X.4.B nur

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{em} + \mathcal{L}_{ww}$  benötigt wird. Analog wird in Abschnitt  
 X.4.C für die Ableitung der BG des Teilchens nur  
 $L = L_{ft} + L_{ww}$  benötigt.

Zu Abschnitt X.4.A

zu Gl. (41):

Obwohl  $\mathcal{L}_{ww} = -\frac{1}{2} A^\mu j_\mu$  nicht eichinvariant ist, sind  
 die mit Hilfe von  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{em} + \mathcal{L}_{ww}$  abgeleiteten FG  
 und die mit Hilfe von  $L = L_{ft} + L_{ww}$  abgeleitete BG  
 eichinvariant! Bei einer Eichtransformation

$$A^\mu \longrightarrow A^\mu + \partial^\mu \psi$$

gilt nämlich wegen der Kontinuitätsgleichung  $\partial^\mu j_\mu = 0$   
 (Ladungserhaltung)

$$A^\mu j_\mu \longrightarrow A^\mu j_\mu + j_\mu \partial^\mu \psi = A^\mu j_\mu + \partial^\mu (\psi j_\mu).$$

zu Gl. (45):

Diese Gleichung kann man auch in der Form

$$L_{ww}(t) = -\frac{q}{c} \frac{1}{f(u(t))} A^\mu(x^\sigma(\tau)) u_\mu(\tau)$$

schreiben, die Größe  $f(u) L_{ww}(\vec{r}, \vec{u}, t)$  ist also — wie  
 erforderlich —  $L$ -invariant:

$$f(u(t)) L_{ww}(t) = -\frac{q}{c} A^\mu(x^\sigma(\tau)) u_\mu(\tau).$$

zu Abschnitt X.4.B

zu Gl. (48):

Berechne selbst die entsprechende Hamiltondichte. (Was  
 erwartet man als Ergebnis?)

zu Abschnitt X.4. C

zu Gl. (57):

$$\begin{aligned}
 (\vec{u} \times \text{rot } \vec{A})_i &= \varepsilon_{ijk} u_j \underbrace{\text{rot}_k \vec{A}}_{\varepsilon_{k\ell m} \frac{\partial A_m}{\partial x_\ell}} \\
 &= \underbrace{\varepsilon_{kij} \varepsilon_{k\ell m}}_{\delta_{ie} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{je}} u_j \frac{\partial A_m}{\partial x_\ell} = u_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - u_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j}
 \end{aligned}$$