

**ERGÄNZUNGSBLÄTTER VON Dr. GRAU**  
*zum Skriptum*  
**"ELEKTRODYNAMIK UND RELATIVITÄTSTHEORIE"**  
*von H. Nowotny*

**Kapitel 1-5**

I.1.D\* Vereinigung der fundamentalen Wechselwirkungen. Eichtheorien

vor 1831 (M. Faraday Induktionsgesetz) el. WW, magn. WW, Gravitation "getrennt" (schw. WW, starke WW noch unbekannt)

- 1862 J. C. Maxwell    Klassische Elektrodynamik    el. WW & magn. WW = elm. WW
- 1892 H. A. Lorentz
- 1905 A. Einstein        4dim. Raumzeit
- 1909 H. Minkowski  
u.a.
- 1929 W. Heisenberg    Quantenelektrodynamik    Elektronen und Positronen [Fermionen]  
W. Pauli                    4dim. Raumzeit                    elm. WW
- 1946-49 S. Tomonaga                    Träger:  $\gamma$  (Photon) [Boson]  
J. Schwinger  
R. P. Feynman  
F. J. Dyson  
u.a.

- 1967 S. L. Glashow    Elektroschwache Theorie    elm. WW & schw. WW = elektroschw. WW  
A. Salam            4dim. Raumzeit                    Träger:  $\gamma$      $W^\pm, Z^0$     [Bosonen]  
S. Weinberg

Suche nach GUTs (Grand Unified Theories), welche elektroschw. WW und starke WW "vereinigen".

- 1974 H. Georgi            Standardmodell                    Leptonen (6 Arten) und Quarks (6 Arten)  
S. L. Glashow (Standardtheorie)                    [Fermionen]  
A. Salam            4dim. Raumzeit                    elm. WW & schw. WW & starke WW  
S. Weinberg  
u.a.  
Träger:  $\gamma$                      $W^\pm, Z^0$                     Gluonen (8 Arten)  
masselos                    [Bosonen]                    ~100 Protonmassen                    masselos

Suche nach TOEs (Theories of Everything), welche zusätzlich die Gravitation "einbeziehen".

1982	M. B. Green J. H. Schwarz u. a.	Superstringtheorien (5 "Stück") 10dim. Raumzeit	Fermionen und Bosonen = Eigenschwingungen von Strings (Saiten) bzw. von Membranen
			elm. WW & schw. WW & starke WW & Gravitation
seit 1996		Träger:	$\gamma$ $W^\pm, Z^0$ Gluonen    Graviton (hypothetisch)
	J. H. Schwarz E. Witten C. Vafa A. Sen u. a.	M-Theory = "letzte Inkarnation" der Superstringtheorien, vereint die 5 Stringtheorien in einem kohärenten Rahmen ( <u>M</u> other of all Theories, <u>M</u> astertheory) 11dim. Raumzeit	

M. Kaku 1999: "Very little is known about M-Theory..."

Möglicherweise muß man auf die "Mathematik des nächsten Jahrhunderts" warten ...

Experimentell erfolgt die Vereinigung der WW bei Energien von  $10^{19}$  GeV =  $10^{28}$  eV (entsprechend Abständen von  $10^{-33}$  cm).

LHC (Large Hadron Collider) [CERN]: Energien bis 1 TeV =  $10^3$  GeV.

M. Kaku 1999: "Thus, to experimentally verify superstring theory means recreating creation in the laboratory."

Zu Abschnitt I, 4, Azur Formel zwischen den Gln. (16b) und (17):

1) Zeige selbst, dass  $\operatorname{div} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = 0$  für  $\vec{r} \neq \vec{r}'$ .

2) Damit folgt:

a) liegt  $\vec{r}'$  nicht im Volumen  $V$ , dessen Oberfläche  $F \equiv F(V)$  ist, so gilt

$$\oint_{F(V)} d^2\vec{f} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \int_V d^3r \operatorname{div} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = 0 \quad \checkmark$$

b) liegt  $\vec{r}'$  im Volumen  $V$ , so kann man statt über  $F(V)$  über eine beliebige Kugelfläche mit Mittelpunkt in  $\vec{r}'$  integrieren, was bei Verschiebung des Ursprungs in den Kugelmittelpunkt

$$\oint_{\text{Kugelfläche}} d^2\vec{f} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \int_{[4\pi]} d\Omega \underbrace{r^2 \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}}_1 = 4\pi \quad \checkmark$$

gibt.

Zu Abschnitt I.5.A: Erläuterungen zum Selbstdurcharbeiten als

### F1.1 Ungleiche Formeln (Mechanik)

Ergänzung zum Skriptum.  
Die Tabellen stammen von

H. Nowotny.

Größe	CGS-System	SI-System	RE-System
Länge	$l$ [cm]	$l$ [m]	$l$ [cm]
Zeit	$t$ [s]	$t$ [s]	$t$ [s]
Geschwindigkeit	$v$ [cm/s]	$v$ [m/s]	$v^{[RE]}$ [1]
Formel:	$v = \frac{l}{t}$		$v^{[RE]} = \frac{1}{c} \frac{l}{t}$ mit $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s
Umrechnung:	$l = 600$ cm	$= 6$ m	$= 600$ cm
	$t = 2$ s	$= 2$ s	$= 2$ s
	$v = 300$ cm/s	$= 3$ m/s	$v^{[RE]} = 10^{-8}$

Berechnung von $t$ :	$t = \frac{l}{v}$		$t = \frac{1}{c} \frac{l}{v^{[RE]}}$
gegeben:	$l = 600$ cm	$v = 3$ m/s	
umrechnen	$v = 300$ cm/s	$l = 6$ m	
berechnen	$t = \frac{600}{300}$ s	$= \frac{6}{3}$ s	
gegeben:		$l = 6$ m	$v^{[RE]} = 10^{-8}$
umrechnen		$v = 3$ m/s	$l = 600$ cm
berechnen		$t = \frac{6}{3}$ s	$t = \frac{1}{3 \cdot 10^{10}} \frac{600}{10^{-8}}$ s
<b>FALSCH</b>			
gegeben:		$l = 6$ m	$v^{[RE]} = 10^{-8}$
umrechnen			$l = 600$ cm
berechnen		$t = \frac{600}{10^{-8}}$ s	
gegeben:		$l = 6$ m	$v^{[RE]} = 10^{-8}$
umrechnen		$v = 3$ m/s	
berechnen			$t = \frac{1}{3 \cdot 10^{10}} \frac{6}{3}$ s

## F1.2 Ungleiche Formeln (Elektrodynamik)

Größe	CGS-System Gaußsche Einheiten	SI-System
Länge	$l$ [cm]	$l$ [m]
Kraft	$F$ [dyn] = [g cm s <sup>-2</sup> ]	$F$ [N] = [kg m s <sup>-2</sup> ]
elektrische Ladung	$Q$ [GE] = [g <sup>1/2</sup> cm <sup>3/2</sup> s <sup>-1</sup> ]	$Q^{[SI]}$ [C] = [s A]
Formel:	$F = \frac{Q_1 Q_2}{l^2}$	$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{l^2}$ mit $\epsilon_0 = 8,86 \cdot 10^{-12}$ As/Vm
Umrechnung:	$l = 6$ cm $F = 1$ dyn $Q = 6$ GE	$= 0,06$ m $= 10^{-5}$ N $Q^{[SI]} = 2 \cdot 10^{-9}$ C
Berechnung von $F$ :	$F = \frac{Q_1 Q_2}{l^2}$	$F = \frac{1}{4\pi 8,86 \cdot 10^{-12}} \frac{Q_1 Q_2}{l^2}$
<b>RICHTIG</b>		
gegeben:	$Q_1 = Q_2 = 6$ GE	$l = 0,06$ m
umrechnen	$l = 6$ cm	$Q_1^{[SI]} = Q_2^{[SI]} = 2 \cdot 10^{-9}$ C
berechnen	$F = \frac{6 \cdot 6}{6^2}$ dyn	$F = \frac{1}{4\pi 8,86 \cdot 10^{-12}} \frac{2 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{0,06^2}$ N
<b>FALSCH</b>		
gegeben:	$Q_1 = Q_2 = 6$ GE	$l = 0,06$ m
umrechnen	$l = 6$ cm	
berechnen		$F = \frac{1}{4\pi 8,86 \cdot 10^{-12}} \frac{6 \cdot 6}{6^2}$ ? (N, dyn) ?
gegeben:	$Q_1 = Q_2 = 6$ GE	$l = 0,06$ m
umrechnen		$Q_1^{[SI]} = Q_2^{[SI]} = 2 \cdot 10^{-9}$ C
berechnen	$F = \frac{2 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{0,06^2}$ ?	

### F1.3 (Formal) gleiche Formeln (Mechanik)

Größe	CGS-System	SI-System	RE-System
Länge	$l$ [cm]	$l$ [m]	$l^{[RE]}$ [s]
Zeit	$t$ [s]	$t$ [s]	$t$ [s]
Geschwindigkeit	$v$ [cm/s]	$v$ [m/s]	$v^{[RE]}$ [1]
Formel:	$v = \frac{l}{t}$		$l^{[RE]} = \frac{l}{c}$ $v^{[RE]} = \frac{1}{c} \frac{l}{t}$ mit $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s
Umrechnung:	$l = 600$ cm = 6 m $t = 2$ s = 2 s $v = 300$ cm/s = 3 m/s		$l^{[RE]} = 2 \cdot 10^{-8}$ s = 2 s $v^{[RE]} = 10^{-8}$
Berechnung von $t$ : RICHTIG ???		$t = \frac{l}{v}$	$t = \frac{l^{[RE]}}{v^{[RE]}}$
gegeben:		$l = 6$ m	$v^{[RE]} = 10^{-8}$
umrechnen			$l^{[RE]} = 2 \cdot 10^{-8}$ s
berechnen		$t = \frac{2 \cdot 10^{-8}}{10^{-8}}$ s	
gegeben:		$l = 6$ m	$v^{[RE]} = 10^{-8}$
umrechnen		$v = 3$ m/s	
berechnen			$t = \frac{6}{3}$ s

### F1.4 (Formal) gleiche Formeln (Elektrodynamik)

Größe	CGS-System Gaußsche Einheiten	SI-System
Kraft	$F \text{ [dyn]} = [\text{g cm s}^{-2}]$	$F \text{ [N]} = [\text{kg m s}^{-2}]$
elektrische Ladung	$Q \text{ [GE]} = [\text{g}^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ s}^{-1}]$	$Q^{[SI]} \text{ [C]} = [\text{s A}]$
el. Feldstärke	$E \text{ [GE]} = [\text{g}^{1/2} \text{ cm}^{-1/2} \text{ s}^{-1}]$	$E^{[SI]} \text{ [V/m]} = [\text{kg m s}^{-3} \text{ A}^{-1}]$
Formel:	$F = Q \cdot E$	$F = Q^{[SI]} \cdot E^{[SI]}$
Umrechnung:	$F = 1 \text{ dyn}$ $Q = 6 \text{ GE}$ $E = 0,1666 \text{ GE}$	$= 10^{-5} \text{ N}$ $Q^{[SI]} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ C}$ $E^{[SI]} = 5 \cdot 10^3 \text{ V/m}$
Berechnung von $F$ :	$F = Q \cdot E$	$F = Q^{[SI]} \cdot E^{[SI]}$
RICHTIG ???		
gegeben:	$Q = 6 \text{ GE}$	$E^{[SI]} = 5 \cdot 10^3 \text{ V/m}$
umrechnen	$E = 0,1666 \text{ GE}$	
berechnen		$F = 6 \cdot 0,1666 \text{ N(?) dyn(!)}$
gegeben:	$Q = 6 \text{ GE}$	$E^{[SI]} = 5 \cdot 10^3 \text{ V/m}$
umrechnen		$Q^{[SI]} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ C}$
berechnen	$F = 5 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-9} \text{ dyn(?) N(!)}$	



Zu den Gln. (33):

1. Schritt:  $k_1, k_3, k_4$  betrachtet

In Kapitel IV werden wir sehen, daß die Maxwellgleichungen mit  $\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -k_4 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{k_3}{k_1} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

die Ausbreitung elm. Wellen beschreiben.

$\vec{E}, \vec{B}$  genügen dann homogenen Wellengln.

welche die experimentell als  $c$  bestimmte Lichtgeschwindigkeit als Wellenausbreitungsgeschwindigkeit enthalten müssen:

$$\text{rot rot } \vec{E} = -k_4 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B}$$

$$\text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = \frac{k_3}{k_1} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{k_3 k_4}{k_1} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \vec{0}$$

(analog Gl. für  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ )

$$\Rightarrow \boxed{\text{Es muß } \frac{k_1}{k_3 k_4} = c^2 \text{ gelten.}} \quad (33)$$

2. Schritt:  $k_{2a}, k_{2b}$  einbezogen

Wir stellen Dimensionsbetrachtungen an und wählen für die elektrische Ladung und das magnetische Dipolmoment dabei beliebige Einheiten  $[Q_0], [M_0]$ .

Ziel: Zu zeigen, daß

$$\left[ \frac{k_1 k_{2b}}{k_3 k_{2a}} \right] = L^2 T^{-2} = \text{Quadrat einer Geschwindigkeit}$$

(unabh. von der Wahl der elm. Einheiten)

Weg:

$$1) \text{ rot } \vec{F} = k_1 \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \Rightarrow [F] = [k_1] \frac{[Q_0^2]}{L^2} \quad | \cdot L$$

Gl. (19):

$$\vec{N} = k_{2a} \vec{m} \times \vec{B} \quad [F]L = [k_{2a} k_{2b}] \frac{[M_0^2]}{L^3}$$

Gl. (21):

$$\vec{B}_m = k_{2b} \frac{2\vec{m}}{r^3}$$

$$\Rightarrow [k_1] \frac{[Q_0^2]}{L} = [k_{2a} k_{2b}] \frac{[M_0^2]}{L^3}$$

$$\left[ \frac{k_1}{k_{2a} k_{2b}} \right] = \left[ \frac{M_0^2}{Q_0^2} \right] \frac{1}{L^2}$$

$$2) [I] = \frac{[Q_0]}{T} \Rightarrow [j] = \frac{[Q_0]}{L^2 T}$$

$$\text{rot } \vec{B} = k_3 \text{ rot } \vec{j} + \dots \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{[B]}{L} &= [k_3] \frac{[Q_0]}{L^2 T} \\ \text{von 1):} & \\ [B] &= [k_{2b}] \frac{[M_0]}{L^3} \end{aligned} \right\} \left[ \frac{k_{2b}}{k_3} \right] = \left[ \frac{Q_0}{M_0} \right] \frac{L^2}{T}$$

1) + 2):

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{k_1}{k_{2a} k_{2b}} \right] &= \left[ \frac{M_0^2}{Q_0^2} \right] \frac{1}{L^2} \\ \left[ \frac{k_{2b}}{k_3^2} \right] &= \left[ \frac{Q_0^2}{M_0^2} \right] \frac{L^4}{T^2} \end{aligned} \right\} \left[ \frac{k_1 k_{2b}}{k_3^2 k_{2a}} \right] = \frac{L^2}{T^2} \checkmark$$

unabhängig von  
Wahl der elm.  
Einheiten!

Experiment:

$$\boxed{\frac{k_1 k_{2b}}{k_3^2 k_{2a}} = c^2}$$

(33')

(33) / (33'):

Von den 5 Konstanten  $k_1, k_{2a}, k_{2b}, k_3, k_4$  können (und müssen) 3 Konstanten willkürlich gewählt werden, um ein Maßsystem festzulegen.

zu Abschnitt II.2.Azu Gl. (13b):

$$\text{In } \underline{\text{rot rot } \vec{a}(\vec{r}) = \text{grad div } \vec{a}(\vec{r}) - \Delta \vec{a}(\vec{r})}$$

Stellt  $\Delta$  den sog. "Vektorlaplaceoperator" dar, manchmal  $\star$  geschrieben, um Verwechslungen zu vermeiden. Vereinfacht man aber — und diese Vereinfachung gilt für das gesamte Skriptum —, dass man  $\star \vec{a}(\vec{r})$  nur nach kartesischen Komponenten zerlegt, so kann man wegen  $(\star \vec{a}(\vec{r}))_x = \Delta a_x(\vec{r}), \dots$  ( $\Delta$  hier "gewöhnlicher" Laplaceoperator)  $\Delta \vec{a}(\vec{r})$  schreiben, ohne das "etwas passieren kann". (Beachte:  $(\star \vec{a}(\vec{r}))_\vartheta$  ist beispielsweise ungleich  $\Delta a_\vartheta(\vec{r})$ ;  $\vartheta$  Kugelkoordinat.)

zu Abschnitt II.3.B

zu Gl. (31): Hier muß es noch  $D(\vec{r}, t; \vec{r}', t')$  heißen. Nur wenn keine AB und keine RB im Endlichen vorgegeben sind, können die Dgn. von  $\square D(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t')$  nur von  $|\vec{r} - \vec{r}'|, t - t'$  abhängen (Homogenität und Isotropie des Raumes und Homogenität der Zeit in bezug auf ein Inertialsystem).

zu Abschnitt II.3.C: zu Gl. (39)

$$D_{\text{ret}}(|\vec{r}-\vec{r}'|, t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} \int d\omega e^{-i\omega(t-t')} \frac{4\pi}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (38)$$

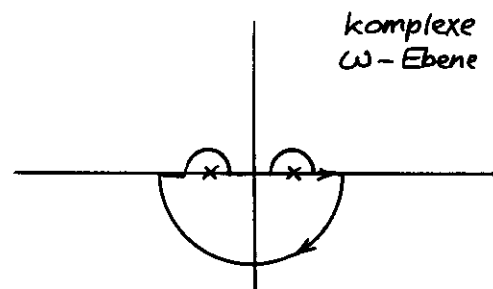
$$D_{\text{ret}}(r, t) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \int d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

$$\omega = \omega_r + i\omega_i$$

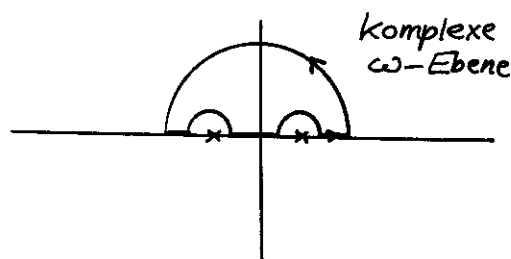
komplexe Variable

$$e^{-i\omega t} = e^{-i\omega_r t} e^{\omega_i t} =: F(k, t)$$

$t > 0$ : strebt in der unteren Halbebene  
im Unendlichen gegen null  
( $\omega_i \rightarrow -\infty$ )

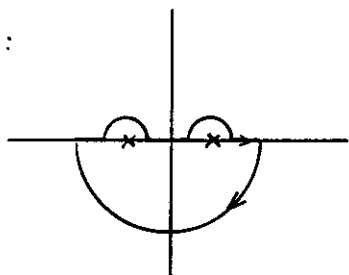


$t < 0$ : strebt in der oberen Halbebene  
im Unendlichen gegen null  
( $\omega_i \rightarrow +\infty$ )



$$F(k, t) = \int d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} =: f(k, t, \omega) \equiv f(\omega)$$

$t > 0$ :



$$\oint d\omega f(\omega) = \int d\omega f(\omega)$$

$$= -2\pi i [\text{Res } f(\omega)_{\omega=-ck} + \text{Res } f(\omega)_{\omega=+ck}]$$

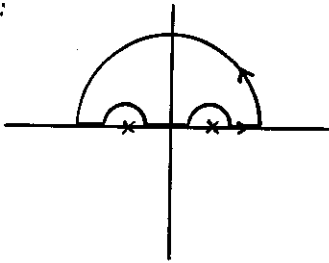
Residuensatz

$$\text{Res } f(\omega)_{\omega=-ck} = \lim_{\omega \rightarrow -ck} [(\omega+ck) \frac{e^{-i\omega t}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}] = \frac{c}{2k} e^{ickt}$$

$$\text{Res } f(\omega)_{\omega=+ck} = -\frac{c}{2k} e^{-ickt}$$

$$\int d\omega f(\omega) = -2\pi i \frac{c}{2k} [e^{ickt} - e^{-ickt}] \quad \text{für } t > 0$$

t < 0:



$$\oint_{\text{nn}} d\omega f(\omega) = \int_{\text{nn}} d\omega f(\omega) = 0$$

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad (40)$$

Somit:

$$F(k, t) = \int_{\text{nn}} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = -2\pi i \frac{c}{2k} \underbrace{[e^{ickt} - e^{-ickt}]}_{\text{...}} \Theta(t)$$

$$D_{\text{ret}}(r, t) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} F(k, t) = -\frac{i}{(2\pi)^2} c \Theta(t) \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \frac{1}{k} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} [\dots]$$

$\vec{k}$ -Integration: Polarachse in Richtung von  $\vec{r}$  gelegt:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = kr \cos \vartheta, \quad d^3k = 2\pi k^2 dk \underbrace{\sin \vartheta d\vartheta}_{-d(\cos \vartheta)}$$

$$D_{\text{ret}}(r, t) = -\frac{i}{2\pi} c \Theta(t) \int_0^{+\infty} dk k [\dots] \int_{-1}^{+1} d\xi e^{i k r \xi} \frac{e^{i k r} - e^{-i k r}}{i k r}$$

$$D_{\text{ret}}(r, t) = -\frac{1}{2\pi} \frac{c}{r} \Theta(t) \int_0^{+\infty} dk [e^{ickt} - e^{-ickt}] [e^{i k r} - e^{-i k r}]$$

$$\int_0^{+\infty} dk [e^{ik(r+ct)} - e^{ik(r-ct)}]$$

$$+ \int_0^{+\infty} dk [e^{-ik(r+ct)} - e^{-ik(r-ct)}]$$

2. Term:  $\int_{-\infty}^0 dk [e^{ik(r+ct)} - e^{ik(r-ct)}]$

$$D_{\text{ret}}(r, t) = -\frac{c}{r} \Theta(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk [e^{ik(r+ct)} - e^{ik(r-ct)}]$$

$$\delta(r+ct) - \delta(r-ct)$$

$$D_{\text{ret}}(r, t) = -\frac{c}{r} \Theta(t) \delta(r+ct) + \frac{c}{r} \Theta(t) \delta(r-ct)$$

$$D_{\text{ret}}(r, t) = \frac{\delta(t - \frac{r}{c})}{r} \quad \delta(r-ct) = \frac{\delta(t - \frac{r}{c})}{c}$$

zu Gl. (42a,b): Setzt man diese Ausdrücke in

die  $\vec{A}(\vec{r},t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi(\vec{r},t)}{\partial t}$  ein, so erhält man nach

geeigneten Umformungen, einer partiellen Integration bzw.

Anwendung des Gaußschen Satzes sowie <sup>Benützung</sup> der zeitlich

und räumlich asymptotischen Eigenschaften von  $D_{ret}$

schließlich

$$\text{div } \vec{A}_{ret}(\vec{r},t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi_{ret}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

$$= \int d^3r' \int dt' D_{ret}(\vec{r}-\vec{r}', t-t') \left[ \text{div}' \vec{j}(\vec{r}',t') + \frac{\partial \rho(\vec{r}',t')}{\partial t'} \right] = 0$$

$$0, \forall \vec{r}', t'$$

(Kontinuitätsgleichung)

Da  $\vec{A}_{ret}, \phi_{ret}$  also neben den Dgl. (16a,b) auch

die Nebenbedingung (15) erfüllen, stellen sie <sup>in Lorenzgleichung</sup>

Partikulärlösungen der FG für die Potentiale dar.

zu den Abschnitten II.4.A und II.4.B

Umformungen zur Berechnung von  $\vec{j} \cdot \vec{E}$  (siehe oberhalb von Gl. (45))

bzw. von  $\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$  Gl. (51)

$$\begin{array}{l}
 \vec{E} \cdot \left. \begin{array}{l} \vec{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{0} = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{E} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right\} \vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{c}{4\pi} \underbrace{(\vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{B})}_{\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{B})} \\
 \\
 \vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)}_{=: \omega_{em}} - \operatorname{div} \underbrace{\frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})}_{=: \vec{S}} \quad -\frac{1}{4\pi} \underbrace{(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t})}_{\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)}
 \end{array}$$

Zusammenfassung:

elm. Energiedichte (Feldenergiedichte) im Vakuum

$$\omega_{em}(\vec{r}, t) := \frac{1}{8\pi} [\vec{E}^2(\vec{r}, t) + \vec{B}^2(\vec{r}, t)] \quad (46)$$

elm. Energiestromdichte (Poyntingvektor<sup>†</sup>) im Vakuum

$$\vec{S}(\vec{r}, t) := \frac{c}{4\pi} [\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)] \quad (45)$$

<sup>†</sup>) eigentlich Vektorfeld

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E} \\ \vec{B} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \vec{E} \\ 0 = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \vec{B} \end{array} \right\} \rho \vec{E} = \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + \vec{B} \operatorname{div} \vec{B})$$

Maxwellgl. (4c), (4d):

$$\left. \begin{array}{l} \vec{J} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{0} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right\} \vec{J} \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi} (\operatorname{rot} \vec{E} \times \vec{E} + \operatorname{rot} \vec{B} \times \vec{B}) - \frac{1}{4\pi c} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \times \vec{E} \right)$$

$$\begin{aligned} \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} &= \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + \operatorname{rot} \vec{E} \times \vec{E} + \vec{B} \operatorname{div} \vec{B} + \operatorname{rot} \vec{B} \times \vec{B}) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi c} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} + \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) \end{aligned}$$

Formel (Beweis später):

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi c} (\vec{E} \times \vec{B}) \\ & (\vec{a} \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{rot} \vec{a} \times \vec{a})_k \\ & = \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i a_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} a^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B})_k &= - \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\frac{1}{4\pi c} (\vec{E} \times \vec{B})_k}_{=: g_k} + \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\frac{1}{4\pi} [E_i E_k + B_i B_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)]}_{=: T_{ik}} \end{aligned} \quad (51)$$

Zusammenfassung:

elm. Impulsdichte (Feldimpulsdichte) im Vakuum

$$\vec{g}_{em}(\vec{r}, t) := \frac{1}{4\pi c} [\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)] = \frac{\vec{S}(\vec{r}, t)}{c^2} \quad (53)$$

Maxwellscher Spannungstensor (= - elm. Impulsstromdichte) im Vakuum

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{T}(\vec{r}, t) &:= \frac{1}{4\pi} [\vec{E}(\vec{r}, t) \circ \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{B}(\vec{r}, t) \circ \vec{B}(\vec{r}, t) \\ &\quad - \frac{1}{2} \vec{1} (\vec{E}^2(\vec{r}, t) + \vec{B}^2(\vec{r}, t))] \\ &= \frac{1}{4\pi} [\vec{E}(\vec{r}, t) \circ \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{B}(\vec{r}, t) \circ \vec{B}(\vec{r}, t)] - \vec{1} \omega_{em}(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (52)$$

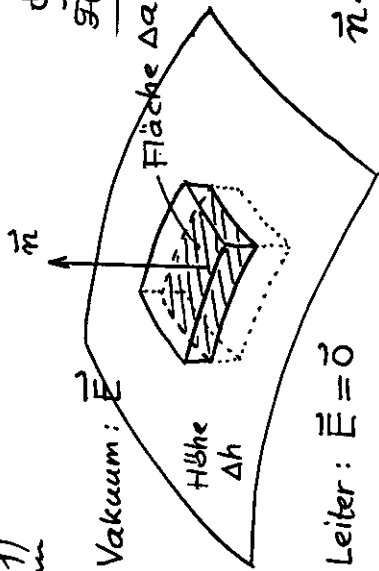


Fehlender Beweisschritt:

$$\begin{aligned}
 & (\vec{a} \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{rot} \vec{a} \times \vec{a})_k \\
 &= a_k \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \epsilon_{kij} (\operatorname{rot} \vec{a})_i a_j \\
 & \quad \quad \quad \epsilon_{ijk} \quad \quad \quad \epsilon_{ilm} \frac{\partial a_m}{\partial x_l} \\
 &= a_k \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \underbrace{(\delta_{je} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{ke})}_{a_j \frac{\partial a_k}{\partial x_j} - a_j \frac{\partial a_j}{\partial x_k}} \frac{\partial a_m}{\partial x_e} a_j
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\vec{a} \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{rot} \vec{a} \times \vec{a})_k \\
 &= a_k \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \underbrace{a_j \frac{\partial a_k}{\partial x_j}}_{a_i \frac{\partial a_k}{\partial x_i}} - \underbrace{a_j \frac{\partial a_j}{\partial x_k}}_{\delta_{ik} a_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i}} \\
 & \quad \quad \quad \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} (a_i a_k)}_{\frac{\partial}{\partial x_i} (a_i a_k)} \quad \quad \quad = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2} \delta_{ik} \vec{a}^2 \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_i a_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \vec{a}^2 \right) \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$1) \quad \oint_{S(\sigma)} d\vec{r} \cdot \vec{E} = 4\pi \int_V d^3r \rho$$



Bis auf höhere Ordnungen in  $\Delta a, \Delta h$  gilt:

$$\vec{n} \cdot (\vec{E} - \vec{0}) \Delta a = 4\pi \int_{-\frac{\Delta h}{2}}^{+\frac{\Delta h}{2}} \rho dh \cdot \Delta a$$

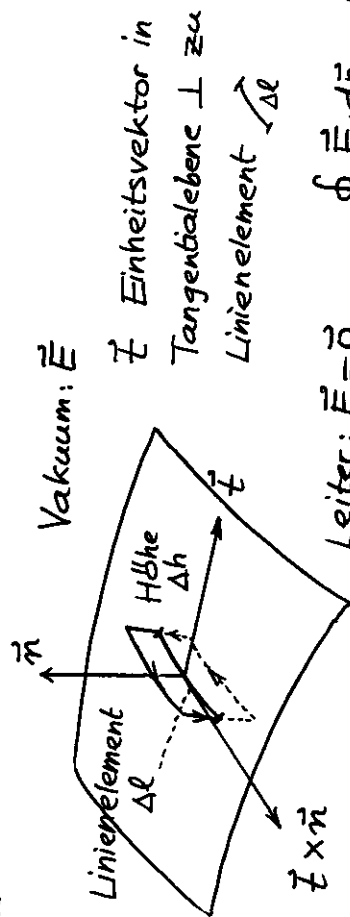
$\Delta a \rightarrow 0, \Delta h \rightarrow 0$ :

$$\vec{n} \cdot \vec{E} \equiv E_n = 4\pi\sigma + \frac{\Delta h}{2}$$

mit  $\sigma = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{-\frac{\Delta h}{2}}^{+\frac{\Delta h}{2}} \rho dh$

(Physikalisch:  $\int \rho dh$  über dünne Oberflächenschicht)

2)



Bis auf höhere Ordnungen in  $\Delta l, \Delta h$  gilt:  $(\vec{t} \times \vec{n}) \cdot (\vec{E} - \vec{0}) \Delta l = 0$

$$(\vec{t} \times \vec{n}) \cdot \vec{E} = (\vec{n} \times \vec{E}) \cdot \vec{t} = 0$$

muss für beliebige Linienelemente durch den Flächenpunkt, also für beliebiges  $\vec{t}$ , gelten

$$\Rightarrow \vec{n} \times \vec{E} = \vec{n} \times \vec{E}_{tg} = \vec{0}$$

bzw.  $\vec{E}_{tg} = \vec{0}$  •

zu Abschnitt III.2.C

zu Gl. (40):

Beweis von

$$\vec{I}(\vec{r}') \equiv \frac{3}{4\pi R^3} \oint_{r=R} d^2\vec{f} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \begin{cases} \frac{r'}{r'^3} & \text{für } r' \geq R \\ \frac{r'}{R^3} & \text{für } r' \leq R \end{cases}$$

$\vec{r}'$  ist für die Integration fest, für Integration wird  $\frac{\vec{r}'}{r'} = \vec{e}_z$  gewählt (Wahl der z-Achse):

$$\vec{I}(\vec{r}') = \frac{3}{4\pi R^3} R^2 \int_{[4\pi]} d\Omega (\cancel{\sin\vartheta \cos\varphi \vec{e}_x} + \cancel{\sin\vartheta \sin\varphi \vec{e}_y} + \overbrace{\cos\vartheta}^{P_1(\cos\vartheta)} \vec{e}_z) \underbrace{\frac{1}{|\vec{r}-r'\vec{e}_z|}}_{\frac{r'}{r'}} \cdot \underbrace{\sum_{\ell} P_{\ell}(\cos\vartheta)}_{\begin{cases} \frac{R^{\ell}}{r'^{\ell+1}}, & r' > R \\ \frac{r'^{\ell}}{R^{\ell+1}}, & r' < R \end{cases}}$$

$\varphi$ -Integral null

$$\vec{I}(\vec{r}') = \frac{3}{2R} \frac{r'}{r'} \sum_{\ell} \int_{-1}^{+1} d\vartheta P_{\ell}(\vartheta) P_{\ell}(\vartheta) \cdot \begin{cases} \frac{R^{\ell}}{r'^{\ell+1}}, & r' > R \\ \frac{r'^{\ell}}{R^{\ell+1}}, & r' < R \end{cases}$$

$$\vec{I}(\vec{r}') = \begin{cases} \frac{1}{R} \frac{r'}{r'} \frac{R}{r'^2}, & r' \geq R \\ \frac{1}{R} \frac{r'}{R} \frac{R}{R^2}, & r' \leq R \quad \checkmark \end{cases} \quad \frac{2}{3} \delta_{\ell 1}$$

zu Abschnitt III.3.B

zu Gl. (55):

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(C_{mn})} \begin{pmatrix} C_{22} & -C_{12} \\ -C_{21} & C_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  für  $Q_1 = -Q_2 = Q$  folgt

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{1}{\det(C_{mn})} (C_{22} + C_{12} + C_{21} + C_{11}) Q \Rightarrow \text{Gl. (55)}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{1}{C}}$

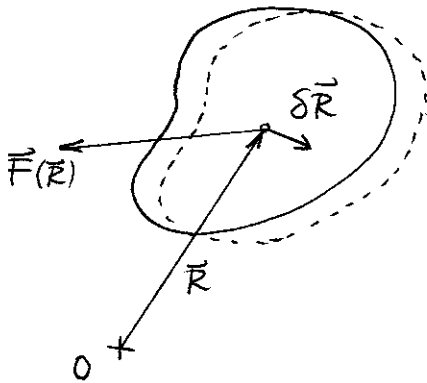
zu Abschnitt III.4. A

zu Gl. (67):

Energiebilanz bei Verschiebung einer statischen Ladungsverteilung:

$$W(\vec{R}) = W^{WW}(\vec{R})$$

potentielle Energie der Ladungsverteilung  
(mit Zentrum am Ort  $\vec{R}$ ) = als Feldenergie  
gespeicherte WW-Energie mit dem äußeren  
Feld



$\vec{F}(\vec{R})$  Kraft auf diese Ladungsverteilung  
im äußeren Feld

$$W(\vec{R}) + (-\vec{F}(\vec{R}) \cdot \delta \vec{R}) = W(\vec{R} + \delta \vec{R})$$

$$W(\vec{R}) - \vec{F}(\vec{R}) \cdot \delta \vec{R} = W(\vec{R}) + \delta \vec{R} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}} W(\vec{R})$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{F}(\vec{R}) = -\vec{\nabla}_{\vec{R}} W(\vec{R})}}$$

zu Abschnitt III.4. B

zu Gl. (70) bis (72):

$$\text{Mit } \vec{E} = |\vec{E}| \begin{pmatrix} \sin \vartheta \\ 0 \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \text{ folgt}$$

$$E_x^2 - \frac{1}{2} \vec{E}^2 = \vec{E}^2 \frac{1}{2} (2 \sin^2 \vartheta - 1)$$

$$E_y^2 - \frac{1}{2} \vec{E}^2 = -\frac{1}{2} \vec{E}^2 \quad -\cos 2\vartheta$$

$$E_z^2 - \frac{1}{2} \vec{E}^2 = \vec{E}^2 \frac{1}{2} (2 \cos^2 \vartheta - 1) \quad \cos 2\vartheta$$

$$E_x E_z = \vec{E}^2 \frac{1}{2} \sin 2\vartheta$$

$$\vec{T} = \frac{\vec{E}^2}{8\pi} \begin{pmatrix} -\cos 2\vartheta & 0 & \sin 2\vartheta \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin 2\vartheta & 0 & \cos 2\vartheta \end{pmatrix}$$

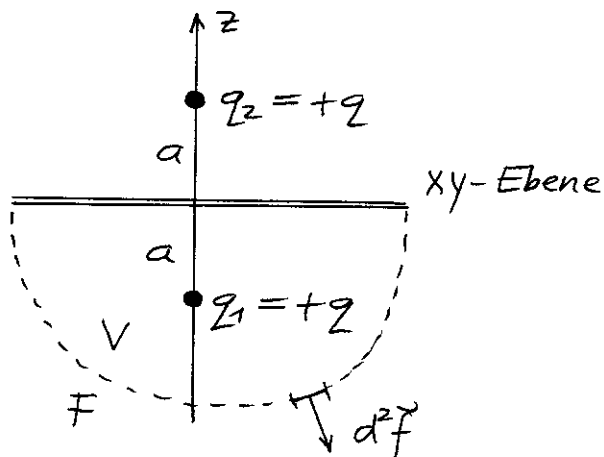
$$\vec{T} = \vec{e}_z \cdot \vec{T} = \frac{\vec{E}^2}{8\pi} \begin{pmatrix} -\cos 2\vartheta & 0 & \sin 2\vartheta \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin 2\vartheta & 0 & \cos 2\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{T} = \frac{\vec{E}^2}{8\pi} \begin{pmatrix} \sin 2\vartheta \\ 0 \\ \cos 2\vartheta \end{pmatrix}$$

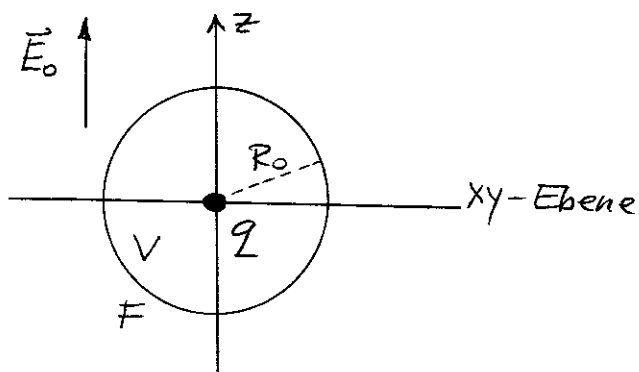

---

Beispiele zum Selbstrechnen:

- 1) Kraft einer Punktladung  $q_2$  auf eine Punktladung  $q_1$   
für den Fall  $q_1 = q_2 = +q$



- 2) Kraft auf eine Punktladung im homogenen Feld  $\vec{E}_0$



zu Abschnitt IV.1.A

zu Gl. (3):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}) &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) = \operatorname{grad} \underbrace{\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r})}_{0 \text{ gew\u00e4hlt}} - \underbrace{\Delta \vec{A}(\vec{r})}_{\text{Eichung (2)}} \\ &= \underline{\underline{\frac{4\pi}{\epsilon} \vec{j}(\vec{r})}} \end{aligned}$$

zu Gl. (4): (4) erf\u00fcllt die Eichbedingung, da

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r})}} &= \frac{1}{\epsilon} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{-\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}} \\ &= -\frac{1}{\epsilon} \int d^3r' \vec{\nabla}' \cdot \left( \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) + \frac{1}{\epsilon} \int d^3r' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \underbrace{\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}')}_{\text{(II.5): } 0} \\ &= \text{(Gau\u00df)} = -\frac{1}{\epsilon} \oint d^2\vec{f}' \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \underline{\underline{0}} \text{ gilt.} \end{aligned}$$

zu Gl. (6), (7):

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\vec{B}(\vec{r})}} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon} \int d^3r' \vec{\nabla} \times \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\ &= -\frac{1}{\epsilon} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \times \underbrace{\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{-\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}} = \underline{\underline{\frac{1}{\epsilon} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}}} \end{aligned}$$

Zu Abschnitt IV. 1. B

Zu Gl. (11a):

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} (j_i(\vec{r}') x'_k) = \underbrace{\frac{\partial j_i(\vec{r}')}{\partial x'_i}}_0 x'_k + j_i(\vec{r}') \delta_{ik} = \underline{j_k(\vec{r}')}$$

0 (Kontinuitätsgl. (10))

zu Gl. (11b):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'_i} (j_i(\vec{r}') x'_l x'_l x'_k) &= \underbrace{\frac{\partial j_i(\vec{r}')}{\partial x'_i}}_0 x'_l x'_l x'_k + j_i(\vec{r}') x'_l \delta_{il} x'_k \\ &\quad + j_i(\vec{r}') x'_l x'_l \delta_{ik} \\ &= \underline{(\vec{r}' \cdot \vec{j}(\vec{r}')) x'_k + (\vec{r}' \cdot \vec{r}') j_k(\vec{r}')} \end{aligned}$$

zu Gl. (17):

$$\vec{\nabla} \times (\vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3}) = \vec{m} (\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}) - (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{r}}{r^3}$$

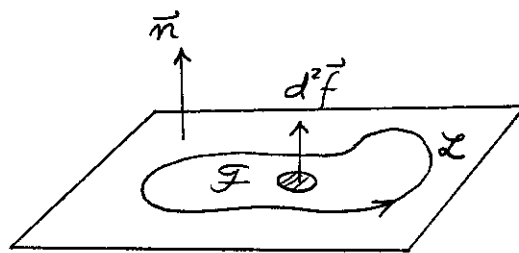
$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{x_i}{r^3} = \frac{1}{r^3} \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_i}}_3 + x_i \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r^3}}_{-3 \frac{x_i}{r^5}} = 0$$

$$\begin{aligned} [(\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{r}}{r^3}]_i &= m_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_i}{r^3} = m_j \frac{\delta_{ij}}{r^3} - m_j x_i \frac{3x_j}{r^5} \\ &= \frac{m_i}{r^3} - \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r}) x_i}{r^5} \end{aligned}$$

$$\underline{\vec{\nabla} \times (\vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3}) = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{m}}{r^5}}$$

Zu Gl. (18a,b): Zu zeigen ist

$$\frac{1}{2} \oint_{\mathcal{L}} (\vec{F} \times d\vec{r}) = \int_{\mathcal{F}} d^2\vec{f} = F\vec{n}$$



Beweis:

$\mathcal{L}$  ebene Kurve = Rand von  $\mathcal{F}$  ( $\mathcal{F}$  Inhalt von  $\mathcal{F}$ )

$$\frac{1}{2} \oint_{\mathcal{L}} (\vec{F} \times d\vec{r})_{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{L}} \varepsilon_{lmk} x_m dx_k$$

$$= \oint_{\mathcal{L}} dx_k \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{lmk} x_m \right) = (\text{Stokes; (I.11b)})$$

$$= \int_{\mathcal{F}} d^2f_i \underbrace{\varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{lmk} x_m \right)}_{\frac{1}{2} \varepsilon_{lmk} \delta_{jm}} = \int_{\mathcal{F}} d^2f_i \underbrace{\frac{1}{2} \varepsilon_{imk} \varepsilon_{lmk}}_{(\text{A.6a}): \delta_{il}}$$

$$= \int_{\mathcal{F}} d^2f_i$$

zu Abschnitt IV.2.A

zu Gl. (28):

$$\begin{aligned} \Delta (\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r})) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (x_k B_k) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( B_i + x_k \frac{\partial B_k}{\partial x_i} \right) \\ &= \underbrace{\frac{\partial B_i}{\partial x_i}}_0 + \underbrace{\frac{\partial B_i}{\partial x_i}}_0 + x_k \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} B_k = \vec{r} \cdot \Delta \vec{B}(\vec{r}) \\ &\quad (\text{div } \vec{B} = 0) \end{aligned}$$



$$\underline{\Delta \vec{B}(\vec{r}) = \underbrace{\text{grad div } \vec{B}(\vec{r})}_0 - \underbrace{\text{rot rot } \vec{B}(\vec{r})}_{\frac{4\pi}{\epsilon} \vec{j}(\vec{r})} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \text{rot } \vec{j}(\vec{r})}$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta (\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r})) = -\frac{4\pi}{\epsilon} \vec{r} \cdot \text{rot } \vec{j}(\vec{r})}$$

$$\begin{aligned} \underline{\vec{\nabla} \cdot (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}))} &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\epsilon_{ikl} x_k j_l) \\ &= \underbrace{\epsilon_{ikl} \delta_{ik} j_l}_0 + \underbrace{\epsilon_{ikl} x_k}_{-\epsilon_{kil}} \frac{\partial j_l}{\partial x_i} \\ &= -x_k \epsilon_{kil} \frac{\partial j_l}{\partial x_i} = \underline{-\vec{r} \cdot \text{rot } \vec{j}(\vec{r})} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta (\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r})) = \frac{4\pi}{\epsilon} \vec{\nabla} \cdot (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}))}$$

zu Abschnitt IV. 2. C

$$\begin{aligned} (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) \cdot \vec{\nabla} u(\vec{r}) &= -\vec{j}(\vec{r}) \cdot (\vec{r} \times \vec{\nabla}) u(\vec{r}) \\ &= -i \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{L} u(\vec{r}) \quad (= +i \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{L}^* u(\vec{r})) \end{aligned}$$

$$\text{mit } \vec{L} := -i(\vec{r} \times \vec{\nabla}), \quad \vec{L}^* = i(\vec{r} \times \vec{\nabla})$$

zu Abschnitt IV. 3. C

zu Gl. (53):

$$\text{Gl. (13) mit } \vec{r}' \rightarrow \vec{r}, \quad \vec{\nabla}' \rightarrow \vec{\nabla}, \quad \vec{r} \rightarrow \vec{a}$$

gibt die folgende Formel:

$$\underline{(\vec{r} \cdot \vec{a}) \vec{j}(\vec{r}) = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) \times \vec{a} + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r})) (\vec{r} \cdot \vec{a}) \vec{r}} \quad (F)$$

Dabei steht  $\vec{a}$  für einen beliebigen von  $\vec{r}$  unabhängigen Vektor oder Vektoroperator.

Setzt man in (F)  $\vec{a} \rightarrow \vec{\nabla}_R$ , so erhält man Gl. (53).

zu Gl. (54):

$$\begin{aligned} \underline{[(\vec{r} \times \vec{j}(F)) \times \vec{\nabla}_R] \cdot \vec{A}(\vec{R})} &= \underbrace{\varepsilon_{ikl}}_{\varepsilon_{kli}} (\vec{r} \times \vec{j}(F))_k \frac{\partial A_i(\vec{R})}{\partial R_l} \\ &= (\vec{r} \times \vec{j}(F))_k \varepsilon_{kli} \frac{\partial A_i(\vec{R})}{\partial R_l} \\ &= (\vec{r} \times \vec{j}(F)) \cdot (\vec{\nabla}_R \times \vec{A}(\vec{R})) = (\vec{r} \times \vec{j}(F)) \cdot \vec{B}(\vec{R}) \end{aligned}$$

zu Abschnitt IV.4.A

Zur Rechnung zwischen Gl. (60) und Gl. (61):

1)  $\int d^3r (\vec{r} \cdot \vec{j}(F)) = 0$ , da

$$\begin{aligned} \underline{(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(F)) \frac{1}{2} r^2} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2} r^2 j_i(F) \right) \\ &= \cancel{\frac{x_i}{r}} j_i + \frac{1}{2} r^2 \underbrace{\frac{\partial j_i}{\partial x_i}}_{(10): 0} = \underline{\vec{r} \cdot \vec{j}(F)} \end{aligned}$$

2) Formel (F) von Seite IV-4 mit  $\vec{a} \rightarrow \vec{B}(\vec{R})$  angewendet.

zu Abschnitt V.3.A

$$\underline{\omega_{em}(\vec{r}, t) = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2(\vec{r}, t) + \vec{B}^2(\vec{r}, t)) = \frac{\vec{E}^2(\vec{r}, t)}{4\pi}}$$

$$\underline{\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{c}{4\pi} (\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)) = \frac{\vec{E}^2(\vec{r}, t)}{4\pi} c \vec{n} = \omega_{em}(\vec{r}, t) c \vec{n}}$$

$\vec{n} \times \vec{E}(\vec{r}, t), \vec{n} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$

mit

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{E}_0^* e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{E}^2(\vec{r}, t) = \vec{E}_0^2 e^{2i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \underbrace{\vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0}_{\equiv |\vec{E}_0|^2 \text{ bezeichnet}} + \text{c.c.}$$

$$\underline{\vec{E}^2(\vec{r}, t) = |\vec{E}_0|^2 + \vec{E}_0^2 e^{2i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.}}$$

zu Abschnitt V.3.B

Beachte, dass alle für  $\vec{n} \cdot \vec{r} = d$  genommenen Feldgrößen für die ebene Welle mit Ausbreitungsrichtung  $\vec{n}$  nur mehr von  $t$  abhängen!

zu Gl. (32):

$$\begin{aligned}\vec{E}_{(1)}(\vec{r}, t) &= E_{(1)} \vec{e}_{(1)} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.} \\ &= |E_{(1)}| \vec{e}_{(1)} \underbrace{\left( e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_{(1)})} + \text{c.c.} \right)}_{2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_{(1)})}\end{aligned}$$

$$\underline{\vec{E}_{(1)}^2(\vec{r}, t) = 4 |E_{(1)}|^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_{(1)})}$$

zu Gl. (33):

$$\begin{aligned}\vec{E}_{(+)}(\vec{r}, t) &= E_{(+)} \vec{e}_{(+)} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.} \\ &= |E_{(+)}| \left( e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_{(+)})} \vec{e}_{(+)} + \text{c.c.} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} |E_{(+)}| \left[ e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_{(+)})} (\vec{e}_{(1)} + i\vec{e}_{(2)}) \right. \\ &\quad \left. + e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_{(+)})} (\vec{e}_{(1)} - i\vec{e}_{(2)}) \right] \\ &= \sqrt{2} |E_{(+)}| \left[ \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_{(+)}) \vec{e}_{(1)} \right. \\ &\quad \left. - \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_{(+)}) \vec{e}_{(2)} \right]\end{aligned}$$

$$\underline{\vec{E}_{(+)}^2(\vec{r}, t) = 2 |E_{(+)}|^2}$$

zu Abschnitt V.4.C

zum letzten Teil des Abschnittes unterhalb von Gl. (47):

Aus den Gln. (35) bis (37) folgt mit  $\vec{E}_e \equiv \vec{0}$ ,  $\vec{B}_e \equiv \vec{0}$   
und  $k = \frac{\omega}{c}$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_t \cdot \vec{E}_t(x,y) &= 0 \\ \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t(x,y) &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$\text{RB: } \vec{E}_{tg} = \vec{0} \text{ auf } C$$

$$\vec{B}_t(x,y) = \vec{e}_z \times \vec{E}_t(x,y)$$

$$\vec{\nabla}_t \cdot \vec{B}_t(x,y) = 0$$

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{B}_t(x,y) = \vec{0}$$

$$\text{RB: } B_n = 0 \text{ auf } C$$

$$-\vec{E}_t(x,y) = \vec{e}_z \times \vec{B}_t(x,y)$$

Es ist offensichtlich, daß die nicht "gerahmten" Gln. (inkl. RB) erfüllt sind, wenn die "gerahmten" erfüllt sind.

Aus den FG für  $\vec{E}_t(x,y)$  und der zugehörigen RB folgt:

TEM-Wellen können nur bei mehrfach zusammenhängenden

Querschnitten existieren.

$$\text{Beweis: } \vec{E}_t(x,y) = -\vec{\nabla}_t \phi(x,y) \text{ in } F$$

$$\Delta_t \phi(x,y) = 0 \text{ in } F$$

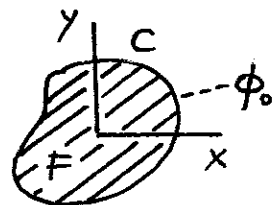
$\phi$  regulär in  $F$

$$\phi(x,y) = \text{konstant auf } C$$

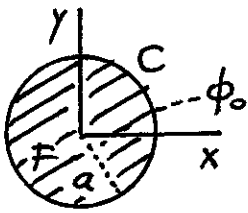
Querschnitt  $F$  einfach zusammenhängend:

$$\phi(x,y) = \phi_0 \text{ in } F \Rightarrow \vec{E}_t(x,y) \equiv \vec{0} \text{ in } F$$

(damit auch  $\vec{B}_t \equiv \vec{0}$ )



z.B. Kreisquerschnitt



Lösungsbasis für die Entwicklung von

$\phi(\rho, \varphi)$  ( $\rho, \varphi$  Polarkoordinaten):

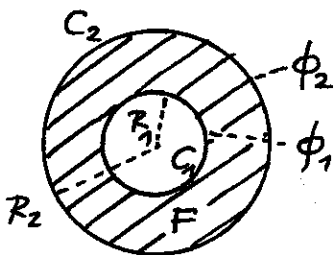
Konstante,  $\ln \rho$

$\rho^m \cos m\varphi, \rho^m \sin m\varphi$   $m=1,2,3,\dots$

$\frac{1}{\rho^m} \cos m\varphi, \frac{1}{\rho^m} \sin m\varphi$

Wegen der RB  $\phi(a, \varphi) = \phi_0, \forall \varphi$ , und der Regularitätsforderung für  $\rho < a$  "bleibt" nur die Konstante, also folgt  $\phi(\rho, \varphi) = \phi_0$  in F.

Dagegen: Kreisringquerschnitt (Koaxial-Wellenleiter)



Hier  $\ln \rho$  "zulässig"!

$$\phi(\rho, \varphi) = A \ln \rho + B$$

$$A = \frac{\phi_2 - \phi_1}{\ln R_2 - \ln R_1}, \quad B = \frac{\phi_1 \ln R_2 - \phi_2 \ln R_1}{\ln R_2 - \ln R_1}$$

(A, B durch RB  $\phi(R_j, \varphi) = \phi_j, j=1,2$ , bestimmt)

$\Rightarrow \vec{E}_t(x, y) \neq 0$  (selbst ausrechnen...)

Feldamplitude proportional zu  $\phi_2 - \phi_1$  (B bedeutungslos).

zu Abschnitt V.4.D

zu den TM-Wellen:

Hat man die longitudinale Komponente  $E_z^{(n)}(x, y)$

zur Mode n gefunden, so findet man die

zugehörigen transversalen Komponenten  $\vec{E}_t^{(n)}(x, y)$ ,

$\vec{B}_t^{(n)}(x, y)$  aus den Gln. (43a, b):

$$\vec{E}_t^{(n)}(x,y) = \frac{ik^{(n)} \vec{\nabla}_t E_z^{(n)}(x,y)}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^{(n)2}}$$

$$\vec{B}_t^{(n)}(x,y) = -i \frac{\omega}{c} \frac{\vec{\nabla}_t E_z^{(n)}(x,y) \times \vec{e}_z}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^{(n)2}}$$

Man setzt dann

$$\vec{E}^{(n)}(x,y) = \vec{E}_t^{(n)}(x,y) + E_z^{(n)}(x,y) \vec{e}_z$$

$$\vec{B}^{(n)}(x,y) = \vec{B}_t^{(n)}(x,y)$$

Zusammen mit  $k = k^{(n)}$  in Gl. (42a,b) ein und erhält  $\vec{E}^{(n)}(\vec{r},t)$ ,  $\vec{B}^{(n)}(\vec{r},t)$  für die Mode  $n$ .